Práctica Dirigida 3: Matemática para Economía y Finanzas 3

Marcelo Gallardo

Mayo 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardob@gmail.com

Pregunta 1) Tenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observación. Por un cálculo directo, es posible obtener las trayectorias $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{-2t} \\ y(t) &= C_1e^{2t} + Ce^{-2t}. \end{aligned}$$

Sin embargo, vamos a proceder de la manera habitual, con el objetivo de efectuar un análisis cualitativo posteriormente.

1.a) Lo primero es calcular los valores y vectores propios del sistema:

- $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$
- $v_1 = (-4, 1)^T$, $v_2 = (0, 1)^T$.

Definición 1. El espacio estable corresponde al conjunto

$$E^s = \{w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha v\}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y v el vector propio cuyo valor propio asociado es negativo (en el caso de dos raíces reales diferentes).

Definición 2. El espacio estable corresponde al conjunto

$$E^u = \{w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha v\}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y v el vector propio cuyo valor propio asociado es positivo (en el caso de dos raíces reales diferentes).

Por ende,

$$E^s = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$E^u = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1.b) El diagrama de fases es

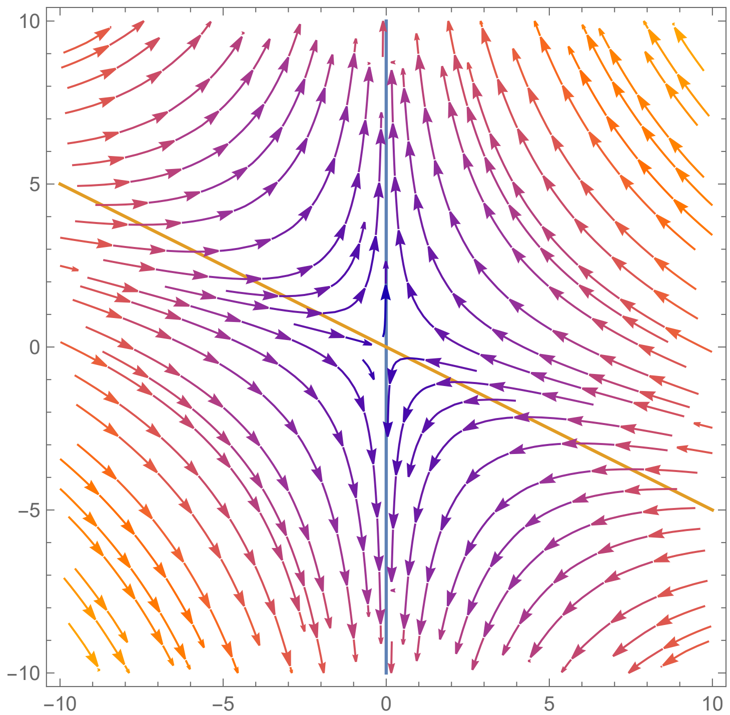

Figure 1: Diagrama de fases

1.c) Por ejemplo, para $\alpha = 1/2$, $x(0) = (-2, 1/2) \in E^s$. Por ende, $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$.

Pregunta 2) Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Valores propios: $\lambda = -2$, $\lambda = 1$.
- Vectores propios: $v_1 = (2, 1)^T$, $v_2 = (1, 2)^T$.

2.1) La variedad estable es

$$E^s = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esto corresponde a la recta $y = x/2$. Analíticamente, como

$$\begin{aligned} x(t) &= 2c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \\ y(t) &= c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^t, \end{aligned}$$

en $y = \frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^t &= \frac{1}{2}\left(2c_1 e^{-2t} + c_2 e^t\right) \\ &= c_1 e^{-2t} + \frac{c_2}{2} e^t. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$2c_2 e^t = \frac{c_2}{2} e^t \implies c_2 = 0.$$

Por ende, en E^s (recta $y = x/2$),

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{-2t} \\ c_1 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} 2c_1 e^{-2t} \\ c_1 e^{-2t} \end{pmatrix} = (0,0)^T.$$

2.2) Por otro lado, la variedad inestable es

$$E^u = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \ w = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esto corresponde a la recta $y = 2x$. Análogamente, podemos verificar que, si $y = 2x$,

$$\begin{aligned} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^t &= 2\left(2c_1 e^{-2t} + c_2 e^t\right) \\ &= 4c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^t. \end{aligned}$$

Así, $c_1 = 0$. Luego, en E^u

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 e^t \\ 2c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} c_2 e^t \\ 2c_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{cases} (+\infty, +\infty), & \text{si } c_2 > 0 \\ (-\infty, -\infty), & \text{si } c_2 < 0. \end{cases}$$

Observe que $c_2 = 0$ implica $(x, y) = (0, 0)$, $\forall\ t$.

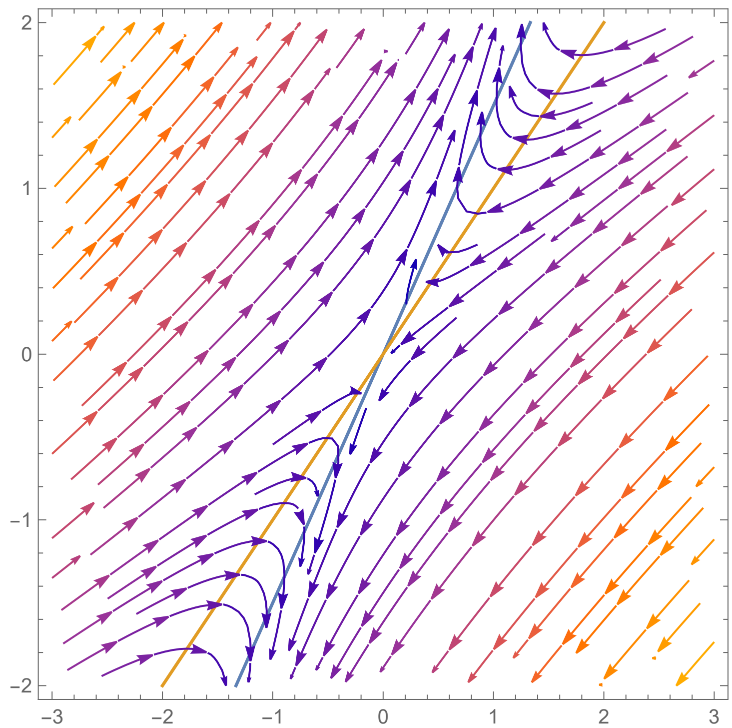

Figure 2: Diagrama de fases

Pregunta 3) Sea ahora el sistema, **no lineal**

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) = e^x y \\ y' &= g(x, y) = xe^y. \end{cases}$$

Para analizar el (los) equilibrio(s), se trabaja con el SLA (Sitema Lineal Asociado), y se aplica el **Teorema de Hartman-Grobman**.

3.1) Primero, encontramos los equilibrios.

$$\begin{cases} x' &= e^x y = 0 \\ y' &= xe^y = 0. \end{cases}$$

Como $e^x, e^y > 0$ para cualquier x, y, se tiene que tener, $x = 0$ y $y = 0$. Así, el equilibrio (el único) es $(0, 0)$.

3.2) Luego, se analiza su estabilidad. Entonces, el SLA es

$$\boldsymbol{x}' = J(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}.$$

En este caso, $\boldsymbol{x} = (x, y)$ y

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ e^y & e^y x \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$J(\boldsymbol{x}^*) = J((0,0)) = \begin{pmatrix} e^0(0) & e^0 \\ e^0 & e^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de $J((0,0))$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda = 1$. En efecto, $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Se trata de un equilibrio hiperbólico que se comporta como un equilibrio tipo silla (H-G).

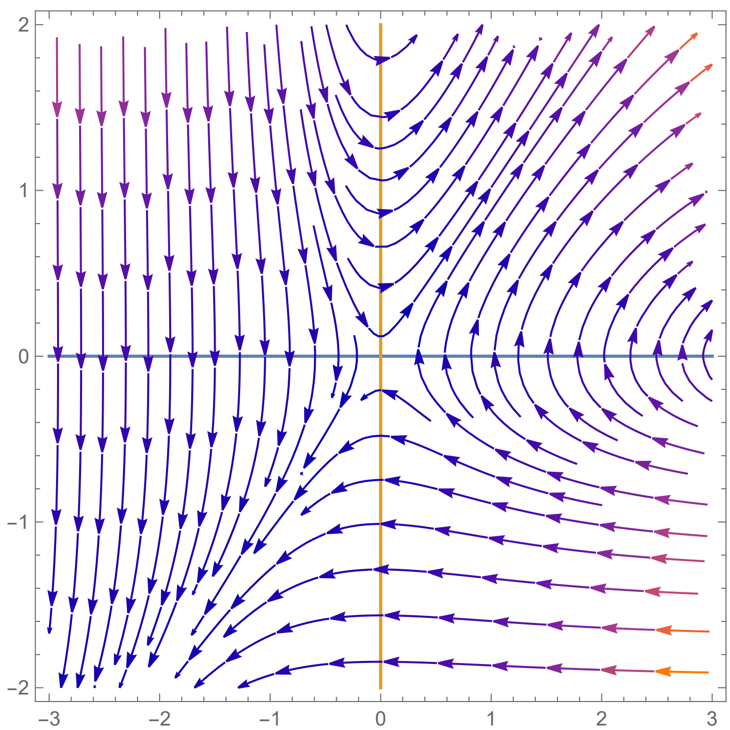

Figure 3: Diagrama de fases del sistema original (no lineal).

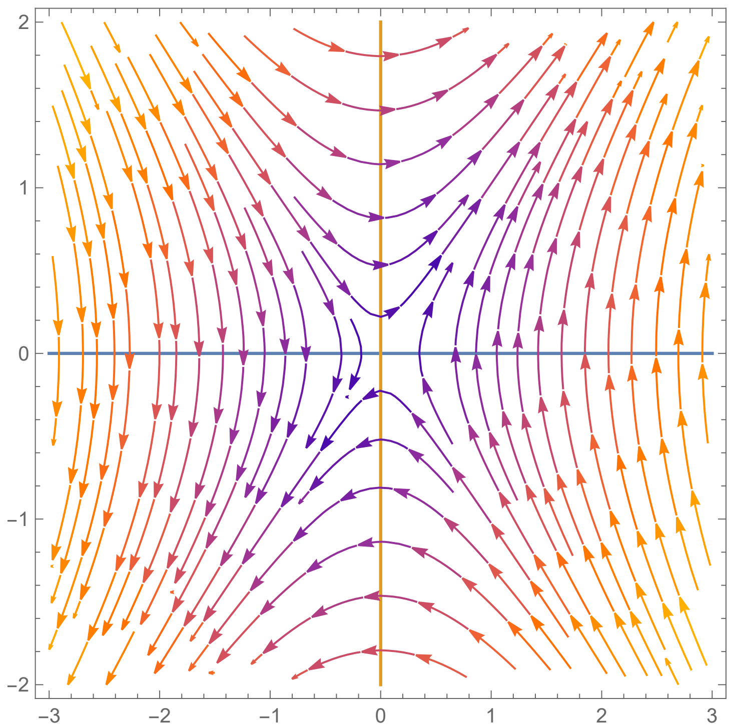

Figure 4: Diagrama de fases del sistema lineal asociado.

Pregunta 5) Considérese el siguiente modelo con parámetro $\gamma > 0$ y variables de estado P y N:

$$\begin{cases} P' &= P(1-P) - \gamma PN \\ N' &= N + \gamma PN. \end{cases}$$

5.1) Los equilibrios del sistema se obtienen haciendo $P' = 0$ y $N' = 0$ (simultáneamente).

$$\begin{cases} 0 &= P - P^2 - \gamma PN \\ 0 &= N + \gamma PN = N(1+\gamma P). \end{cases}$$

De la segunda ecuación, o $N = 0$ o $P = -\frac{1}{\gamma}$. Si $N = 0$, $P - P^2 = 0$, lo cual implica que $P = 0$ o $P = 1$. Por otro lado, si $P = -\frac{1}{\gamma}$, $N = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}$. Tenemos entonces 3 equilibrios:

$$\begin{aligned} P_1^* &= (0,0) \\ P_2^* &= (1,0) \\ P_3^* &= \left(-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right). \end{aligned}$$

Para analizar la estabilidad, requerimos pasar por el SLA. Para ello, calculamos la matriz Jacobiana del sistema no lineal:

$$J = \begin{pmatrix} -2P + 1 - \gamma N & -\gamma P \\ \gamma N & 1 + \gamma P \end{pmatrix}.$$

Evaluando:

$$\begin{aligned} J(P_1^*) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ J(P_2^*) &= \begin{pmatrix} -1 & -\gamma \\ 0 & 1 + \gamma \end{pmatrix} \\ J(P_3^*) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 1 \\ 1 + \frac{1}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, para el primer caso, el equilibrio es hiperbólico pues $\lambda = 1$, y se comporta como un repulsor.

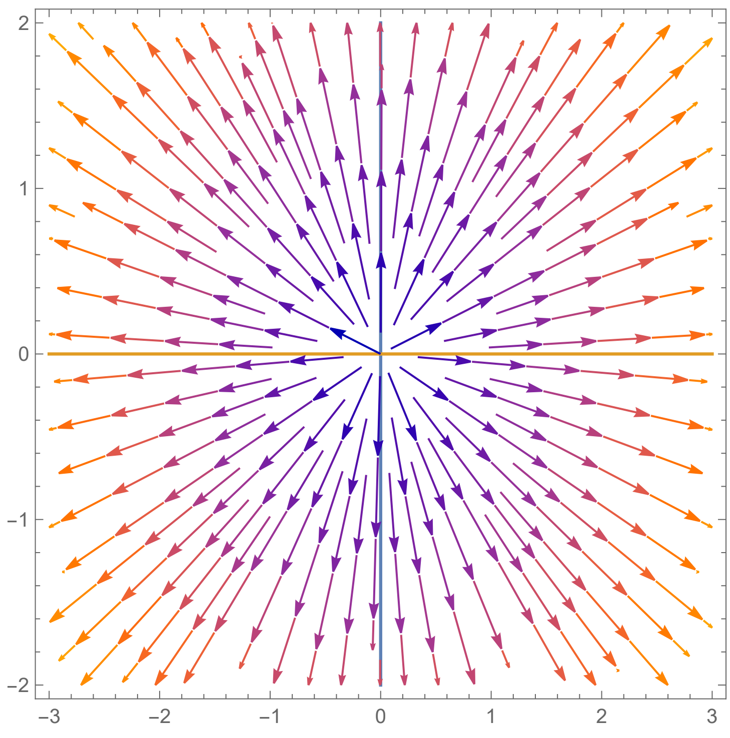

Figure 5: Diagrama de fases del sistema lineal asociado para P_1^*.

En el segundo caso,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \gamma\lambda - 1 - \gamma$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4 + 4\gamma}}{2}.$$

Por ende, el equilibrio es hiperbólico. En función de γ el comportamiento varía (repulsor, atractor o silla). Finalmente, en el tercer caso,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\gamma}\lambda - 1 - \frac{1}{\gamma}[...].$$

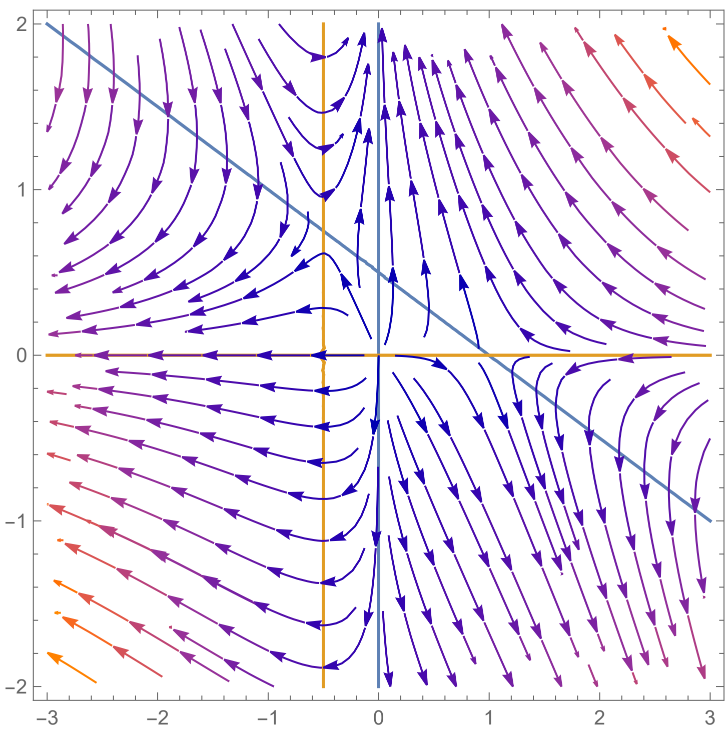

Figure 6: Diagrama de fases del sistema original.

Pregunta 8) Dado el sistema dinámico no lineal

$$x' = y - x$$
$$y' = x^2 - 4x - y + 5.$$

8. 1) Haciendo $x', y' = 0$, se obtiene que, $x = y$ y $x^2 - 5x + 5 = 0$. Así,

$$P_1^* = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$P_2^* = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).$$

La matriz Jacobiana del sistema es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2x-4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$J(P_1^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5-\sqrt{5}-4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\sqrt{5}-1}$. Como la parte real es no nula (es negativa), por HG se trata de un sumidero, sentido horario pues $x' > 0$ si $y > x$. Luego,

$$J(P_2^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5+\sqrt{5}-4 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+\sqrt{5}}$. Por ende, por H-G. el equilibrio se comporta como una silla.

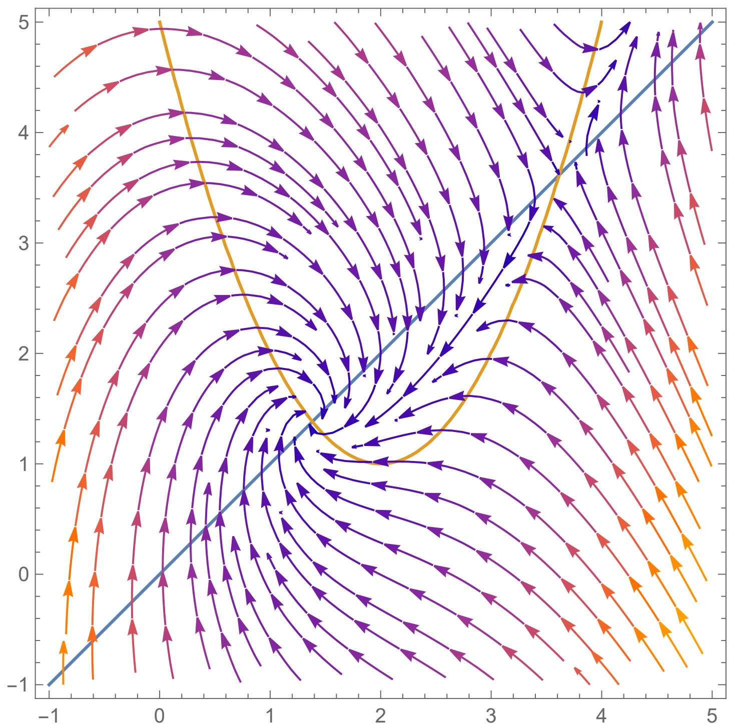

Figure 7: Diagrama de fases del sistema original.