Práctica Dirigida 1

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 09/04/22
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (jrchavez@pucp.edu.pe)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (jrivadeneyrab@pucp.edu.pe),
Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe),
Mauricio Vallejos (mauricio.vallejos@pucp.edu.pe).

---

1) Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) + x(t) = e^t. \tag{1}$$

Para verificar que $x(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ es la solución (general), $C \in \mathbb{R}$, reemplazamos con esta expresión en (1):

$$x'(t) = -Ce^{-t} + \frac{e^t}{2}$$

$$x'(t) + x(t) = -Ce^{-t} + \frac{e^t}{2} + Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t = e^t.$$

Así pues, hemos verificado que $x(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ es la solución (general) a la ecuación diferencial $x'(t) + x(t) = e^t$. Para encontrar la solución que pasa por $(0,1)$, reemplazamos en la expresión general de $x(t)$, $t = 0$ e igualamos a 1:

$$x(0) = C + \frac{1}{2} = 1.$$

Así, $C = 1/2$. Por ende, la solución que pasa por $(0,1)$ es

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

2.1) Algebraicamente tenemos que $xe^{tx} = C$. Derivando respecto a t, se obtiene (regla de la cadena y derivada de un producto):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(xe^{tx}) &= x'e^{tx} + x\frac{d}{dt}(e^{tx}) \\
&= x'e^{tx} + x(x + tx')e^{tx} \\
&= x'e^{tx}(1 + tx) + x^2e^{tx} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pasando el término x^2e^{tx} del lado derecho,

$$x'e^{tx}(1 + tx) = -x^2e^{tx}.$$

Multiplicando por e^{-tx} en ambos lados, se obtiene en efecto,

$$(1+tx)x' = -x^2.$$

2.2) De manera análoga,

$$\begin{aligned} x^2 &= 2at \\ \frac{d}{dt}(x^2) &= \frac{d}{dt}(2at) \\ 2xx' &= 2a. \end{aligned}$$

Así, $x' = a/x$. Por ende

$$2t(x')^2 + a = \frac{2ta^2}{x^2 a} = \frac{2ta^2}{2at} + a = 2a = 2xx'.$$

2.3) Dada la ecuación algebraica

$$\begin{aligned} (1-t)x^2 &= t^3 \\ x^2 - tx^2 &= t^3 \\ \frac{d}{dt}(x^2 - tx^2) &= t^3 \\ 2xx' - x^2 - 2xx't &= 3t^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 2t^3x' &= 2(1-t)x^2x' \\ x(x^2+3t^2) &= x(x^2 + 2xx' - x^2 - 2xx't) = x[2xx' - 2xx't] = 2x^2x'(1-t) \end{aligned}$$

3) Sea

$$x' = 2tx + t(1+x).$$

Si la función $x(t)$ pasa por $(0,0)$, $x(0) = 0$. Ahora, si x tiene un mínimo local en $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x'(0) &= 0 \\ x''(0) &> 0. \end{aligned}$$

Veamos.

$$\begin{aligned} x'(0) &= 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0(1+0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{d}{dt}(x') \\ &= \frac{d}{dt}(3xt + t) \\ &= 3x + 3tx' + 1. \end{aligned}$$

Como $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$,

$$x''(0) = 1 > 0.$$

Esto prueba que x tiene un mínimo local en $t = 0$.

Recordemos que dada un ecuación diferencial lineal de primer orden, del tipo

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{2}$$

la solución general (no contempla condiciones de paso) es de la forma

$$x(t) = e^{\int a(t)dt} \left[C + \int e^{-\int^t a(s)ds} b(t)dt \right]. \tag{3}$$

4.1) Tenemos

$$x' + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}.$$

Lo ponemos bajo la forma de la expresión (2):

$$x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Identificamos:

$$\begin{aligned} a(t) &\triangleq -\frac{1}{2} \\ b(t) &\triangleq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La solución general es entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int -\frac{1}{2}dt} \left[C + \int e^{\int^t \frac{1}{2}ds} \frac{1}{4} ds \right] \\ &= Ce^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \int \frac{e^{\frac{t}{2}}}{4} dt \\ &= Ce^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{2} \\ &= Ce^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.2) En este caso la ecuación diferencial ya tiene la expresión general, por lo que, se puede aplicar directamente el método de resolución:

$$x' = -x + 10$$

$$\begin{aligned} a(t) &\triangleq -1 \\ b(t) &\triangleq 10. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{\int -1dt}\left[C+\int e^{\int 1ds}10dt\right] \\
&= Ce^{-t}+e^{-t}\int 10e^{t}dt \\
&= Ce^{-t}+10.
\end{aligned}
$$

4.3) Expresamos la ecuación diferencial

$$x'-3x=27$$

bajo la forma de la ecuación (2):

$$x'=3x+27.$$

Resolviendo

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{\int 3dt}\left[C+\int 27e^{\int^{t} -3ds}dt\right] \\
&= Ce^{3t}+e^{3t}\int 27e^{-3t}dt \\
&= Ce^{3t}-9.
\end{aligned}
$$

4.4) Dada

$$x'=x+t,$$

aplicando (3)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{\int 1dt}\left[C+\int te^{\int^{t} -1ds}dt\right] \\
&= Ce^{t}+e^{t}\int te^{-t}dt \\
&= Ce^{t}+e^{t}\left[-(1+t)e^{-t}\right] \\
&= Ce^{t}-(1+t).
\end{aligned}
$$

Recuérdese que:

$$\int udv = uv-\int vdu.$$

Por ejemplo:

$$\int \beta te^{\alpha t}dt=\frac{\beta t}{\alpha}e^{\alpha t}-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}dt+C=\frac{\beta t}{\alpha}e^{\alpha t}-\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}+C.$$

4.5) Sea finalmente la ecuación diferencial

$$x'=-2x+t^2.$$

Acá

$$\begin{aligned} a(t) &\triangleq -2 \\ b(t) &\triangleq t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int -2dt}\left[C + \int e^{\int 2ds} t^2 dt\right] \\ &= Ce^{-2t} + e^{-2t}\int e^{2t}t^2 dt \\ &= Ce^{-2t} + e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} \\ &= Ce^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

1 Variables Separables

Recordemos que una ecuación de variables separables es de la forma

$$x' = f(x)g(t).$$

5.1) En la ecuación diferencial

$$x' = \frac{dx}{dt} = x^2 + 1 = \underbrace{f(x)}_{=f(x)}\underbrace{1}_{=g(t)}.$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2+1} &= 1dt \\ \int \frac{dx}{x^2+1} &= \int dt \\ \arctan(x) &= t + C \\ x(t) &= \tan(t + C). \end{aligned}$$

5.2) En la ecuación diferencial

$$x' = \frac{dx}{dt} = xt + t = \underbrace{(x+1)}_{=f(x)}\underbrace{t}_{=g(t)}.$$

Resolviendo

$$\frac{dx}{x+1} = tdt$$
$$\int \frac{dx}{x+1} = \int tdt$$
$$\ln|x+1| = \frac{t^2}{2} + C$$
$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}} - 1.$$

5.3) En la ecuación diferencial

$$x' = \frac{dx}{dt} = xt + xt^2 = \underbrace{x}_{=f(x)} \underbrace{t+t^2}_{=g(t)}.$$

Resolviendo

$$\frac{dx}{x} = (t+t^2)dt$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int (t+t^2)dt$$
$$\ln|x| = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$$
$$x(t) = Ce^{\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}}.$$

5.4) La ecuación diferencial

$$xx' = x\frac{dx}{dt} = e^{xt}\sqrt{1+t^2}$$

no puede expresarse bajo la forma de una ecuación diferencial de variables separables.

6.1) Tenemos

$$x' = te^t - t$$
$$\frac{dx}{dt} = te^t - t$$
$$dx = (te^t - t)dt$$
$$\int dx = \int (te^t - t)dt$$
$$x(t) = e^t t - e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

6.2) Tenemos

$$
\begin{aligned}
x^2 x' &= t+1 \\
x^2 \frac{dx}{dt} &= t+1 \\
x^2 dx &= (t+1)dt \\
\int x^2 dx &= \int (t+1)dt \\
\frac{x^3(t)}{3} &= \frac{t^2}{2} + t + C \\
x^3(t) &= 3\left(\frac{t^2}{2} + t + C\right) \\
x(t) &= \left[3\left(\frac{t^2}{2} + t + C\right)\right]^{1/3}.
\end{aligned}
$$

6.3) Tenemos

$$
\begin{aligned}
e^x x' &= t+1 \\
e^x \frac{dx}{dt} &= t+1 \\
e^x dx &= (t+1)dt \\
\int e^x dx &= \int (t+1)dt \\
e^x &= \frac{t^2}{2} + t + C \\
x(t) &= \ln\left(\frac{t^2}{2} + t + C\right).
\end{aligned}
$$

Se debe tener $t \in I$ tal que $\frac{t^2}{2} + t + C > 0$.

6.4) Tenemos

$$
\begin{aligned}
tx' &= x(1-t) \\
t\frac{dx}{dt} &= x(1-t) \\
\frac{dx}{x} &= \frac{1-t}{t}dt \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{1-t}{t}dt \\
\ln|x| &= \ln|t| - t + C \\
x(t) &= C_1 t e^{-t}.
\end{aligned}
$$

6.5) Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
(1+t^3)x' &= t^2 x \\
(1+t^3)\frac{dx}{dt} &= t^2 x \\
\frac{dx}{x} &= \frac{t^2}{1+t^3}dt \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{t^2}{1+t^3}dt \\
\ln|x| &= \frac{1}{3}\ln(t^3+1) + C \\
x(t) &= C_1(t^3+1)^{1/3}.
\end{aligned}$$

2 Ecuación de Bernouilli

En relación a las ecuaciones diferenciales de tipo de Bernouilli, recordemos que, cuando tenemos

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{\alpha}(t),\ \ \alpha \in \mathbb{R},$$

con $\alpha \neq 0, 1$, aplicamos el siguiente cambio de variable $y = x^{1-\alpha}$. Derivando, se obtiene

$$\begin{aligned}
y' &= (1-\alpha)x^{-\alpha}x' \\
&= (1-\alpha)[a(t)y + b(t)].
\end{aligned}$$

Esta, es una ecuación diferencial lineal en y. Al resolverla, será posible obtener x.

7.1) Tenemos

$$x' = x + e^t x^2.$$

Identificamos

$$\begin{aligned}
a(t) &= 1 \\
b(t) &= e^t \\
\alpha &= 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= (1-2)[1 \cdot y + e^t] \\
&= -y - e^t.
\end{aligned}$$

Resolvemos,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\int 1dt}\left[C + \int e^{-\int^t(-1)ds}(-e^{-t})dt\right] \\
&= Ce^{-t} + e^{-t}\int -e^t e^t dt \\
&= Ce^{-t} - e^{-t}\int e^{2t}dt \\
&= Ce^{-t} - e^{-t}\frac{e^{2t}}{2} \\
&= Ce^{-t} - \frac{e^t}{2}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $x(t) = y^{\frac{1}{1-\alpha}} = y^{-1}$. Así

$$
x(t) = \frac{1}{Ce^{-t} - \frac{e^t}{2}} = -\frac{2}{C_1 + e^{2t}}.
$$

7.2) Tenemos

$$
x' = x^4 t - x.
$$

Identificamos

$$
\begin{aligned}
a(t) &= -1 \\
b(t) &= t \\
\alpha &= 4.
\end{aligned}
$$

La ecuación diferencial para $y = x^{1-\alpha} = x^{-3}$ es

$$
y' = (1-4)[(-1)y + t] = 3y - 3t.
$$

Resolvemos esta ecuación diferencial lineal

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{\int 3dt}\left[e^{-\int^t 3sds}(-3t)\right] \\
&= Ce^{3t} + e^{3t}\left(\int -3te^{-3t}dt\right) \\
&= Ce^{3t} + t + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Por ende

$$
x(t) = \left(\frac{1}{Ce^{3t} + t + \frac{1}{3}}\right)^{-1/3} = \left(\frac{3}{C_1 e^{3t} + 3t + 1}\right)^{-1/3}.
$$

7.3) Considere la siguiente ecuación diferencial

$$
tx' - (1+t)x = tx^2.
$$

Bajo la forma $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, tenemos

$$x' = x^2 + \left(\frac{1+t}{t}\right)x.$$

Simplificando

$$x' = x^2 + \left(\frac{1+t}{t}\right)x.$$

Usando el cambio de variable $y = x^{1-\alpha}$, con $\alpha = 2$ obtenemos

$$y' = (1-2)\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)y + 1\right].$$

Aplicando (3)

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\int\left(1+\frac{1}{t}\right)}\left[C + \int e^{1+\frac{1}{t}}(-1)dt\right] \\
&= Ce^{-(t+\ln t)} - e^{-(t+\ln t)}\int e^{t+\ln t}dt \\
&= \frac{Ce^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\int te^{t}dt \\
&= \frac{Ce^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\left(t-1\right)e^{t} \\
&= \frac{Ce^{-t} - t + 1}{t}.
\end{aligned}$$

Por ende,

$$x(t) = \frac{t}{Ce^{-t} - t + 1} = \frac{-e^{t}t}{C_2 + (t-1)e^{t}}.$$

7.4) Sea

$$t^2x' + x^2 = tx.$$

Despejando para expresar $x' = F(x,t)$

$$x' = \frac{x}{t} - \frac{x^2}{t^2}.$$

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{t} \\
b(t) &= -\frac{1}{t^2} \\
\alpha &= 2.
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial obtenida con el cambio de variable usual, es

$$y' = (1-2)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{t^2}\right) = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\int \frac{1}{t}dt}\left[C + \int e^{\int^t \frac{ds}{s}} \frac{1}{t^2}\right] \\
&= Ce^{-\ln t} + e^{-\ln t}\int \frac{e^{\ln t}}{t^2} \\
&= \frac{C}{t} + \frac{1}{t}\int \frac{1}{t}dt \\
&= \frac{C + \ln t}{t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, despejando para x

$$x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{t}{C + \ln t}.$$

3 Sistemas Lineales

Recordemos que dado un sistema lineal del tipo

$$x' = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $n = 2$, la solución general estará dada por, en caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, por

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$x(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2(tv + w)e^{\lambda t}.$$

con w solución a

$$(A - \lambda I)w = v.$$

En caso $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \alpha + i\beta \to v_1 = r + is \\
\lambda_2 = \alpha - i\beta \to v_2 = r - is
\end{aligned}$$

la solución al sistema será

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))r + (c_2\cos(\beta t) - c_1\sin(\beta t))s\right]$$

8.1) Tenemos

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Los vectores propios, son respectivamente, $v_1 = (1,1)^T$ y $v_2 = (1,2)^T$. Por ende:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

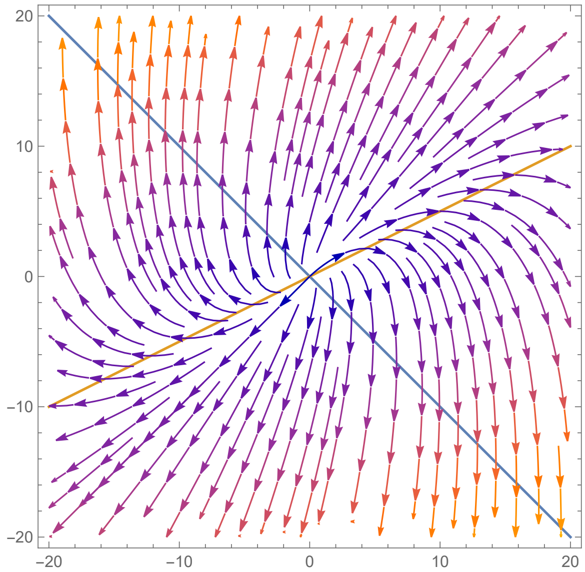

Figure 1: Diagrama de fase.

8.2) Tenemos

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Por ende, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$. Primero calculamos v resolviendo $v = (x_1, x_2)^T$ tal que $Av = 3v$. Se obtiene, por ejemplo, $v = (-2, 1)$. Luego, obtenemos el vector propio generalizado

$$(A - 3I)w = v.$$

Esto es

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos, por ejemplo, tomar $w = (-1, 0)^T$. Así,

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

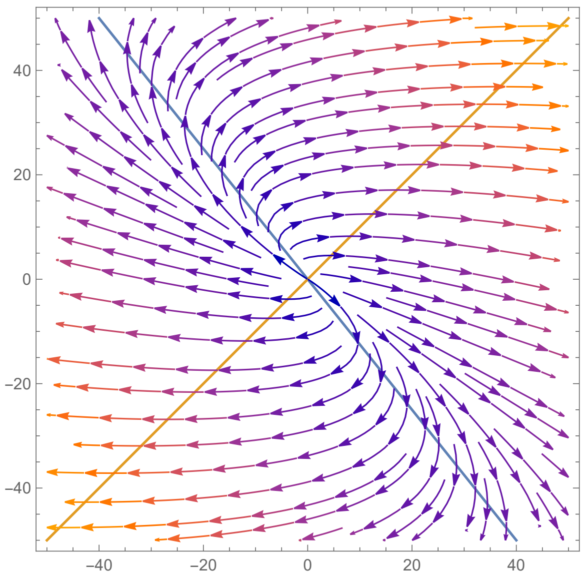

Figure 2: Diagrama de fase.

8.3) Tenemos

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Los vectores propios, son respectivamente, $v_1 = (1,0)^T$ y $v_2 = (1,3)^T$. Por ende:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

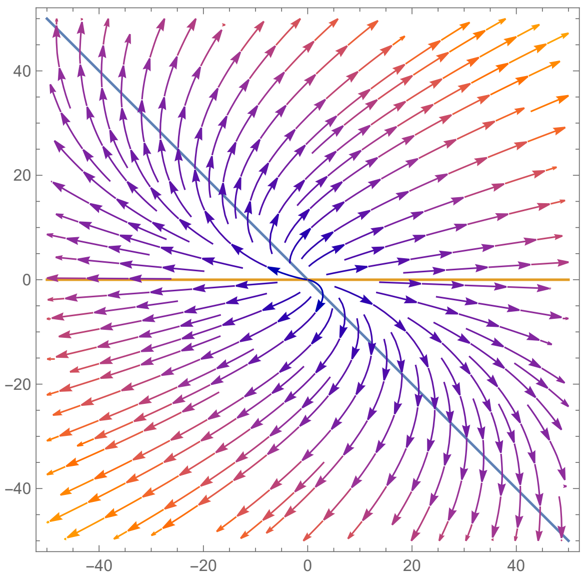

Figure 3: Diagrama de fase.

8.4) Tenemos

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Por ende, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Primero calculamos v resolviendo $v = (x_1, x_2)^T$ tal que $Av = v$. Se obtiene, por ejemplo, $v = (1, 2)$. Luego, obtenemos el vector propio generalizado

$$(A - I)w = v.$$

Esto es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos, por ejemplo, tomar $w = (1, 1)^T$. Así,

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} t + 1 \\ 2t + 1 \end{pmatrix} e^t.$$

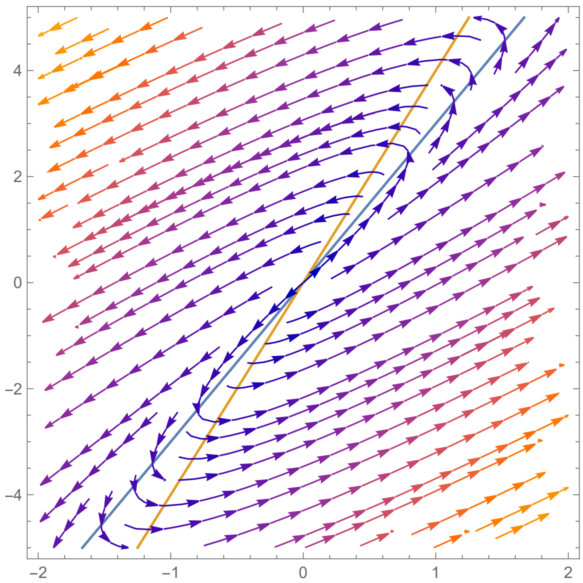

Figure 4: Diagrama de fase.

4 Sistemas Lineales no homogéneos

Si se tiene

$$x' = Ax + b$$

la solución será

$$x = x_h + x_p$$

con $x_p = -A^{-1}b$.

9.1) Ya se tiene

$$x_h(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Calculamos únicamente

$$x_p = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9.2) Finalmente, para el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya tenemos que la solución homogénea es

$$x_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Basta con obtener x_p:

$$x_p = -A^{-1}b = -\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Por ende,

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$