Solucionario Examen Parcial

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 21/05/22
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (jrchavez@pucp.edu.pe)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (jrivadeneyrab@pucp.edu.pe),
Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe),
Mauricio Vallejos (mauricio.vallejos@pucp.edu.pe).

Puntaje: 20 puntos.

Observación: La solución del parcial debe ser colgada en PAIDEIA como máximo hasta las 11.15 a.m. Después de esa hora, ningún documento será aceptado.

Pregunta 1.a) Dado que la oferta y la demanda son iguales en todo tiempo, tenemos

$$\begin{gathered} Q_d(t) = Q_s(t) \\ -3P''(t) - 2P'(t) + 14P(t) = P''(t) + 6P'(t) + 2P(t). \end{gathered}$$

Así, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para $P(t)$

$$4P''(t) + 8P'(t) - 12P(t) = 0.$$

Dividiendo entre 4, queda

$$P''(t) + 2P'(t) - 3P(t) = 0.$$

(0. 5 puntos por plantear la ecuación). Luego, efectuando el cambio de variable $P = P_1$ y $P' = P_2$, se el siguiente sistema lineal (0. 5 puntos por plantear el sistema lineal).

$$\begin{aligned} P_1' &= P_2 \\ P_2' &= 3P_1 - 3P_2. \end{aligned}$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Obteniendo los valores y vectores propios

$$\lambda_1 = -3,\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se deduce que la solución general es (0.5 puntos por los valores y vectores propios).

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, usando las condiciones iniciales, (0.5 puntos por las constantes y la solución final).

$$\begin{pmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por ende, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. Con esto, concluimos que

$$\boxed{P(t) = P_1(t) = -e^{-3t} + 2e^t.}$$

Pregunta 1.b) Sacando el límite de $P(t)$ en infinito,

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{-e^{-3t}}_{\to 0} + 2e^t = \infty.$$

El precio crece sin límites en el largo plazo. (1 punto).

Pregunta 2.a) Tenemos la siguiente ecuación diferencial escalar

$$x' = ax - bx^2.$$

Por el método de separación de variables, (0.5 puntos por identificar el método, ya sea este o Bernouilli y plantear el problema)

$$\frac{dx}{dt} = x\left(a - bx\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x\left(a - bx\right)} &= dt \\
\int \frac{dx}{x\left(a - bx\right)} &= \int dt \\
\int \left(\frac{1}{ax} - \frac{b}{a(bx - a)}\right) dx &= t + C \\
\frac{\ln x - \ln|bx - a|}{a} &= t + C \\
\ln\left|\frac{x}{a - bx}\right| &= at + aC \\
\frac{x}{a - bx} &= \tilde{C}e^{at} \\
x &= \tilde{C}e^{at}(a - bx) \\
x(1 + b\tilde{C}e^{at}) &= a\tilde{C}e^{at} \\
x(t) &= \frac{a\tilde{C}e^{at}}{1 + b\tilde{C}e^{at}}.
\end{aligned}$$

Luego, como $x(0) = x_0$

$$x_0 = \frac{a}{1 + b\tilde{C}}.$$

$$\tilde{C} = \frac{x_0}{a - bx_0}.$$

Si se procede por Bernouilli se debe llegar a

$$y' = -ay + b.$$

Luego,

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{-at} + \frac{b}{a} \\ x(t) &= \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{b}{a}} \\ &= \frac{a}{aCe^{-at} + b}. \end{aligned}$$

En este caso,

$$x_0 = \frac{a}{aC + b}.$$

O sea,

$$C = \frac{a - bx_0}{x_0 a}.$$

(1 punto por integrar, 0.5 por despejar logaritmos y 1 punto por despejar x y C en términos de x_0. No se le descuenta si no es explícito con el método al comienzo). Si se usa Bernouilli, 1 punto por llegar a la EDO lineal, 1 por llegar a x y 0.5 puntos por despejar C).

Pregunta 2.b) Como se trata de un modelo de crecimiento $a > 0$, así,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a\left(\frac{x_0}{a-bx_0}\right)e^{at}}{1 + b\left(\frac{x_0}{a-bx_0}\right)e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a}{\frac{1}{\left(\frac{x_0}{a-bx_0}\right)e^{at}} + b} = \frac{a}{0 + b} = \frac{a}{b}.$$

(1 punto. Todo o nada).

Pregunta 3.a) Dado el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -1 & \theta \end{pmatrix} x$$

como el polinomio característico es

$$p(\lambda) = (\lambda - \beta)(\lambda - \theta),$$

y no se tratan de complejos, (especificado), se tiene que $\lambda_1 = \beta$ y $\lambda_2 = \theta$

- Si $\beta > 0$, $\theta > 0$, se trata de un repulsor (inestable).
- Si $\beta < 0$, $\theta < 0$, se trata de un atractor (estable).
- Si $\beta < 0$, $\theta > 0$, o $\beta > 0$, $\theta < 0$, se trata de una silla (inestable).

El análisis es válido cuando $\beta = \theta > 0$ (repulsor) y $\beta = \theta < 0$ (atractor). (0.5 puntos por $p(\lambda)$ y los valores propios, 0.5 por caracterizar el caso atractor, 0.5 por el caso repulsor y 0.5 el caso por silla).

Pregunta 3.b) Con los parámetros dados, el sistema lineal se torna en el siguiente

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Obteniendo los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$ (0.5 puntos) y sus respectivos vectores propios $v_1 = (0,1)^T$, $v_2 = (3,1)^T$ (1 punto), se tiene que la solución general está dada (0.5 puntos)

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 3.c) Luego, (0.5 punto cada uno).

$$E^u = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E^s = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pregunta 3.d) Trazamos el diagrama de fases

- 0.5 puntos por las isoclinas y caracterizar el equilibrio.
- 0.5 puntos por el campo vectorial.
- 0.5 puntos por el dibujo final.
- 0.5 puntos por la condición inicial.
- *En caso el alumno use los subespacios para graficar, las isoclinas y el campo ya no son necesarios y se le atribuye el puntaje correspondiente.*

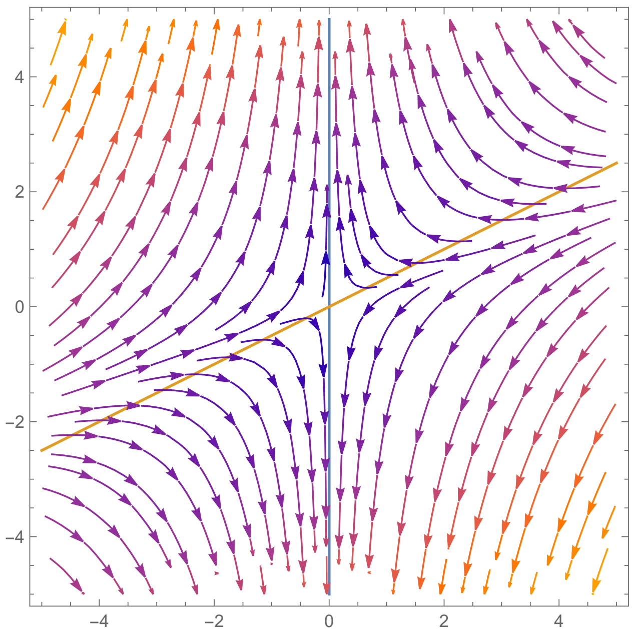

Figura 1: Diagrama de fases.

La condición inicial debe ser $(x_0, y_0) \in E^s$. Por ejemplo, $(3, 1)$.

Pregunta 4.a) Los equilibrios son el $(0, 0)$ y $(2, 2)$ (0.5 puntos cada uno). Esto se deduce planteando

$$\begin{aligned} x' &= y(x-2) \\ y' &= x(y-2). \end{aligned}$$

Pregunta 4.b) La matriz Jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el equilibrio $(0, 0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, como $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$. Así, el equilibrio es hiperbólico (H-G se puede aplicar) y por ende, se comporta localmente como una silla. Análogamente, evaluando esta vez en el equilibrio $(2, 2)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

se obtiene que $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Así, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. El equilibrio es hiperbólico (H-G se puede aplicar) y por ende, se comporta localmente como un repulsor. (1 punto por cada caracterización).

Pregunta 4.d) (2 puntos por subespacios estable e inestable / campo + isoclinas o en su defecto una buena caracterización gráfica de los equilibrios. 1 punto por trayectorias y gráfico final - precisión).

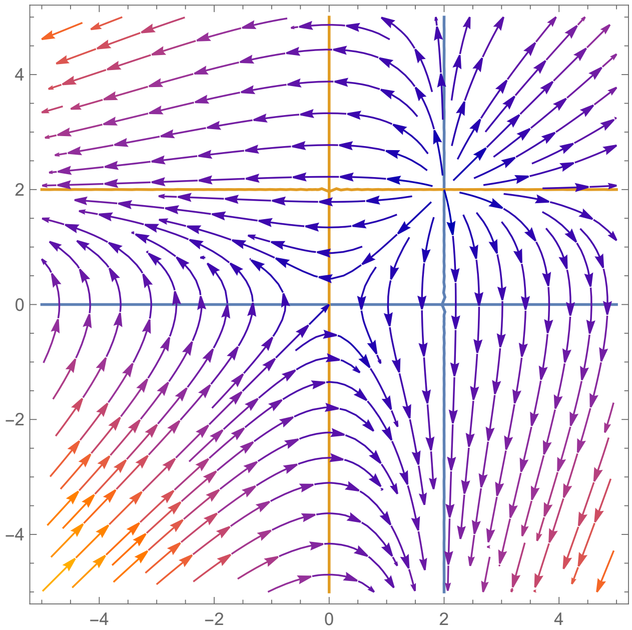

Figura 2: Diagrama de fases.