Práctica Calificada 5

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 25/06/2022
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (`jrchavez@pucp.edu.pe`)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (`jrivadeneyrab@pucp.edu.pe`),
Marcelo Gallardo (`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`),
Mauricio Vallejos (`mauricio.vallejos@pucp.edu.pe`).

---

1. Pregunta 1

a) Resolviendo la ecuación algebraica $x^* = (x^*)^2$, nos percatamos que $x^* = 0$ o $x^* = 1$.

b) Como $x^* = f(x^*) = e^{x^*} + x^*$, se llega a la contradicción $0 = e^{x^*}$, lo cual no tiene solución para $x^* \in \mathbb{R}$ (no hay equilibrios en $\mathbb{R}$).

2. Pregunta 2

a) Para hallar el equilibrio, resolvemos

$$\begin{aligned} k^* &= s\sqrt{k^*} + (1-\theta)k^* \\ k^*(\theta) &= s\sqrt{k^*} \\ \frac{k^*}{\sqrt{k^*}} &= \frac{s}{\theta} \\ \sqrt{k^*} &= \frac{s}{\theta} \\ k^* &= \left(\frac{s}{\theta}\right)^2. \end{aligned}$$

b) Para analizar la estabilidad del equilibrio, calculamos

$$\frac{df(k)}{dk} = \frac{d}{dk}(s\sqrt{k} + (1-\theta)k) = \frac{s}{2\sqrt{k}} + (1-\theta).$$

Reemplazando los valores de los parámetros $s = 1/2$, $\theta = 4/5$, y evaluando en $k^* = s^2/\theta^2$.

$$f'(k^*) = \frac{1/2}{2\sqrt{25/64}} + (1-4/5) = \frac{3}{5} < 1.$$

Por ende, como $|f'(k^*)| < 1$, k^* es l.a.e.

3. Pregunta 3

a)

$$I(t) = \alpha(C(t) - C(t-1)) = \alpha(\beta Y(t-1) - \beta Y(t-1-1)) = \alpha\beta(Y(t-1) - Y(t-2)).$$

Así,

$$Y(t) = \underbrace{\beta Y(t-1)}_{=C(t)} + \underbrace{\alpha\beta(Y(t-1) - Y(t-2))}_{=I(t)} + G.$$

Reajustando el índice, queda

$$Y(t+2) = (\alpha+1)\beta Y(t+1) - \alpha\beta Y(t) + G.$$

b) El sistema en forma matricial es el siguiente

$$\begin{pmatrix} Y_1(t+1) \\ Y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & (\alpha+1)\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}.$$

c) Reemplazando con los valores numéricos, se obtiene

$$\begin{pmatrix} Y_1(t+1) \\ Y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\lambda_1 = 2,\ v_1 = (1,2)^T$$
$$\lambda_2 = 1,\ v_2(1,1)^T.$$

Así,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2^t + 2 & 2^t - 1 \\ -2^{t+1} + 2 & 2^{t+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por $(Y_1(0), Y_2(0))^T = (Y(0), Y(1))^T$,

$$Y_1(t) = 2^t$$
$$Y_2(t) = 2^{t+1}.$$

4. Pregunta 4

a) Dada la ecuación

$$x(t+1) = \frac{x(t)}{x(t)+1}$$

obtenemos el equilibrio resolviendo la ecuación algebraica

$$x^* = \frac{x^*}{x^*+1}.$$

$$(x^*)^2 + x^* - x^* = 0 \implies x^* = 0.$$

b) Reemplazando

$$
\begin{aligned}
x(1) &= \frac{x_0}{x_0+1} \\
x(2) &= \frac{x(1)}{x(1)+1} = \frac{\frac{x_0}{x_0+1}}{\frac{x_0}{x_0+1}+1} = \frac{x_0}{2x_0+1} \\
&\vdots \\
x(t) &= \frac{x_0}{(t-1)x_0+1} \\
x(t+1) &= \frac{\frac{x_0}{(t-1)x_0+1}}{\frac{x_0}{(t-1)x_0+1}+1} = \frac{x_0}{tx_0+1}.
\end{aligned}
$$

c) Aplicando el teorema que involucra la derivada de f se llega a $f(x^*) = f(0) = 1$. Por lo cual, el teorema no puede aplicarse. Sin embargo, observamos que para cualquier x_0, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ($x_0 \neq -1$). O sea, el equilibrio es estable.