Práctica Calificada 4

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 11/06/2022
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (`jrchavez@pucp.edu.pe`)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (`jrivadeneyrab@pucp.edu.pe`),
Marcelo Gallardo (`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`),
Mauricio Vallejos (`mauricio.vallejos@pucp.edu.pe`).

---

1. En esta pregunta, es suficiente si se provee un contra ejemplo en cada incisos pues todas las afirmaciones son falsas.

a) Si $a < 0$, la trayectoria es oscilante pues, para $t = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $a^t > 0$, mientras que para $t = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $a^t < 0$. En caso $x_0 = x^*$, sería constante. (Falso).

b) Si $x_0 = x^*$, $x(t) = x^*$ para todo t. (Falso).

c) Si bien $x^* = \frac{2}{1-3} = -1$, como $|a| > 1$, la trayectoria no converge necesariamente, basta con tomar $x_0 \neq x^*$. (Falso).

d) La gráfica muestra que la trayectoria converge. Si $a = -5/4$, $|a| > 1$, por lo que la trayectoria no convergería, a menos que $x_0 = x^*$, pero en dicho caso sería constante. (Falso).

2. **a)** Según la información, como $C(t) = \delta Y(t) + C_0$ e $I(t) = I$ para todo t,

$$Y(t+1) = \delta Y(t) + C_0 + I.$$

Esta es una ecuación en diferencias de la forma $x(t+1) = ax(t) + b$, siendo $a = \delta$ y $b = C_0 + I$. Por ende, la solución general es de la forma

$$\varphi(t) = \delta^t(Y(0) - Y^*) + Y^*, \ Y^* = \frac{C_0 + I}{1-\delta}.$$

b) Si $\delta > 1$ y $Y_0 > Y^*$, la producción crece indeterminadamente pues

$$\lim_{t\to\infty} \delta^t(Y(0) - Y^*) + Y^* = \infty.$$

c) Si $\delta > 1$ y $Y_0 < Y^*$, la producción decrece indeterminadamente.

d) Si $0 < \delta < 1$ o $Y_0 = Y^*$,

$$\lim_{t\to\infty} \delta^t(Y(0) - Y^*) + Y^* = Y^* = \frac{C_0 + I}{1-\delta}.$$

3. **a)** El sistema en forma matricial es el siguiente

$$\begin{pmatrix} k(t+1) \\ c(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\delta & -1 \\ 0 & \rho(\delta+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k(t) \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

b) Para obtener la solución general necesitamos los valores propios y vectores propios de la matriz A. Como

$$p_A(\lambda) = (1+\delta-\lambda)((1+\delta)\rho - \lambda),$$

los valores propios son $\lambda_1 = 1+\delta$ y $\lambda_2 = (1+\delta)\rho$. Luego, los vectores propios son, respectivamente

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\delta)(1-\rho) \end{pmatrix}.$$

Luego, como $x(t) = A^t x(0)$, con $x(t) = (k(t), c(t))^T$, $x(0) = x_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= PD^tP^{-1}x_0 \\ &= \begin{pmatrix} (1+\delta)^t + \frac{\rho^t(1+\delta)^{t-1} - (1+\delta)^{t-1}}{1-\rho} \\ \rho^t(1+\delta)^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La primera componente corresponde al capital $k(t)$ y la segunda entrada es el consumo $c(t)$.

c) Finalmente, para analizar para que el consumo sea decreciente, basta con notar que $c(t+1) < c(t)$ si

$$\rho(1+\delta) < 1 \implies \rho < \frac{1}{1+\delta}.$$

En efecto, si para todo $t \in \mathbb{Z}^+$

$$\rho(1+\delta)^{t+1} < \rho(1+\delta)^t \implies \rho < \frac{1}{1+\delta}.$$

1. Anexo

Detallamos enseguida paso a paso la obtención de $(k(t), c(t))$

$$\begin{aligned}
x(t) &= PD^tP^{-1}x_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (1+\delta)(1-\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\delta)^t & 0 \\ 0 & (1+\delta)^t\rho^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (1+\delta)(1-\rho) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k(0) \\ c(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (1+\delta)(1-\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\delta)^t & 0 \\ 0 & (1+\delta)^t\rho^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{(1+\delta)(1-\rho)} \\ 0 & \frac{1}{(1+\delta)(1-\rho)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(0) \\ c(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1+\delta)^t & \rho^t(1+\delta)^t \\ 0 & \rho^t(1-\rho)(1+\delta)^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{(1+\delta)(1-\rho)} \\ 0 & \frac{1}{(1+\delta)(1-\rho)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(0) \\ c(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1+\delta)^t & \frac{\rho^t(1+\delta)^{t-1} - (1+\delta)^{t-1}}{1-\rho} \\ 0 & \rho^t(1+\delta)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1+\delta)^t + \frac{\rho^t(1+\delta)^{t-1} - (1+\delta)^{t-1}}{1-\rho} \\ \rho^t(1+\delta)^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$