Solucionario PC 3: Matemática para Economía y Finanzas 3

Profesor: Jorge Chávez Fuentes
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra, Marcelo Gallardo y Mauricio Vallejos

28 de Mayo 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1. Sea el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1, x_2) \\ x_2' &= g(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

a) Si el determinante de la matriz Jacobiana evaluada en el equilibrio x^* es negativo, este se comporta localmente como una silla.

(2 puntos)

b) Si el determinante de la matriz Jacobiana evaluada en el equilibrio x^* es igual a cero, este equilibrio es hiperbólico.

(2 puntos)

c) Si los valores propios de la Jacobiana evaluada en el equilibrio x^* cumplen que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, entonces el equilibrio es inestable.

(2 puntos)

d) Si $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ y $g(x_1, x_2) = x_1^2+x_2^2$, el sistema no posee equilibrios.

(2 puntos)

a) El determinante de una matriz está dado por el producto de sus valores propios[1]. En el caso 2×2

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2.$$

De este modo, si $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 < 0$, se tiene que cumplir (s.p.d.g) que

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Así, la proposición es verdadera pues, sabemos que este tipo de equilibrios corresponde a una silla. Note que no pueden estar en $\mathbb{C}$ pues $z\overline{z} = |z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$[3].

b) Si $|A| = 0$, no puede tenerse en cualquier caso, que los valores propios tenga parte real no nula. Considere por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$|A| = 0$ y $\lambda_1 = 1$ pero $\lambda_2 = 0$. O sea, si $|A| = 0$ el equilibrio no tiene porque ser hiperbólico. Así, la proposición es falsa.

c) Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, o bien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ o bien $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Luego, si $\lambda_1 + \lambda_1 < 0$, esto implica que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. En efecto, de ser ambos valores propios positivos, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Por ende, ambos valores propios son negativos; lo cual implica que el equilibrio es estable. Así, la proposición es falsa.

d) Si $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, $f(x_1, x_2) > 0$ (la exponencial es positiva). Por ende, el sistema no puede tener equilibrios; en ningún caso se tiene simultáneamente que $x_1' = 0$ y $x_2' = 0$. La afirmación es entonces verdadera.

2. Se sabe que el sistema dinámico que se presenta a continuación tiene como único equilibrio no hiperbólico al punto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

Si al pasar a coordenadas polares el sistema adquiere la forma

$$\begin{aligned} r' &= (1 - \alpha^2)r \\ \theta' &= 2, \end{aligned}$$

resuelva lo siguiente

[1] En efecto, $A = PJP^{-1}$[2]. Luego,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PJP^{-1}) \\ &= \det(P)\det(J)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(J)\frac{1}{\det(P)} \\ &= \det(J) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \lambda_j. \end{aligned}$$

[3] La notación, $|\cdot|$ es la del módulo de un número complejo. Por otro lado, $\overline{z}$ es el conjugado.

a) Analice el comportamiento de las trayectorias en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4 puntos)

b) Tomando $\alpha = 1/2$, esboce el diagramas de fases cerca del equilibrio $(0,0)$ en el plano $X - Y$.

(2 puntos)

Recuerde que al pasar a coordenadas polares, teniendo en cuenta todos los supuestos (único equilibrio $(0,0)$ y es no hiperbólico), se tiene que r mide la distancia al origen de coordenadas,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por ende, si $r' > 0$, las trayectorias se alejan del equilibrio. Si $r' < 0$ las trayectorias se acercan al equilibrio. Finalmente, en el caso $r' = 0$, las trayectorias se mantienen a una distancia constante formando círculos. Luego, teniendo en cuenta que

$$\theta' = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2 > 0,$$

se puede asignar los siguientes comportamientos en función de α:

- Si $r' > 0$, las trayectorias se alejan en espirales, rotando en sentido anti-horario. Eso sucede cuando $1 - \alpha^2 > 0$, o sea, $|\alpha| < 1$.

- Si $r' = 0$, las trayectorias se comportan como círculos concéntricos (el centro es el origen) rotando en sentido anti-horario. Esto sucede cuando $\alpha = \pm 1$.

- Finalmente, si $|\alpha| > 1$, $r' < 0$. Por ende, las trayectorias se acercan en espirales, rotando en sentido anti-horario.

Localmente, se tienen los siguientes comportamientos en función de $\alpha \in \mathbb{R}$.

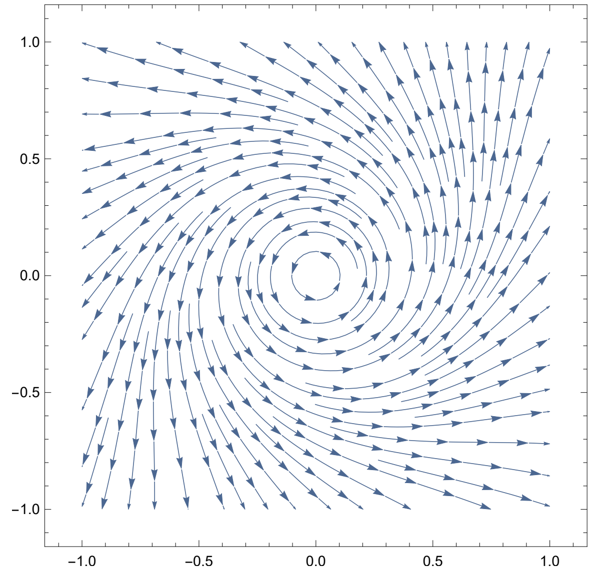

Figure 1: $|\alpha| < 1$.

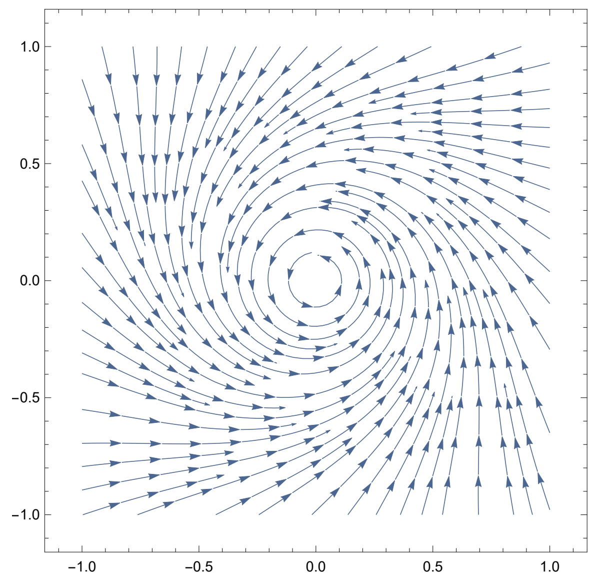

Figure 2: $|\alpha| > 1$.

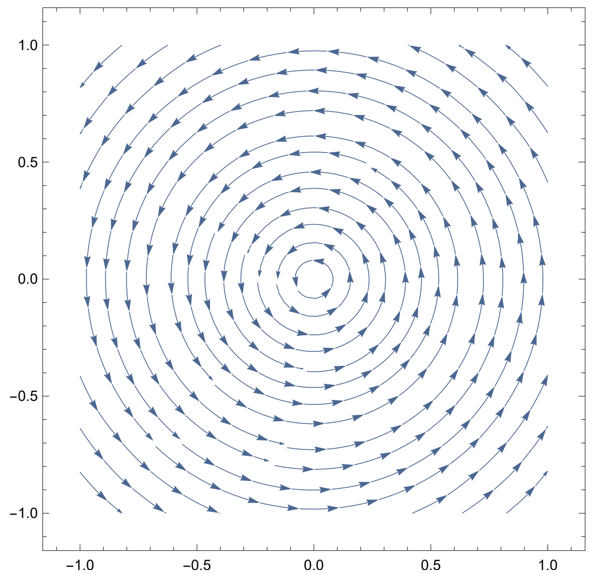

Figure 3: $\alpha = \pm 1$.

El caso $\alpha = 1/2$ corresponde a la figura (1). En efecto,

$$1 - \alpha^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

Esto no es consecuencia de que $\alpha = 1/2 > 0$, es consecuencia de que $1 - \alpha^2 > 0$.

3. Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

cuyo diagrama de fases es el siguiente:

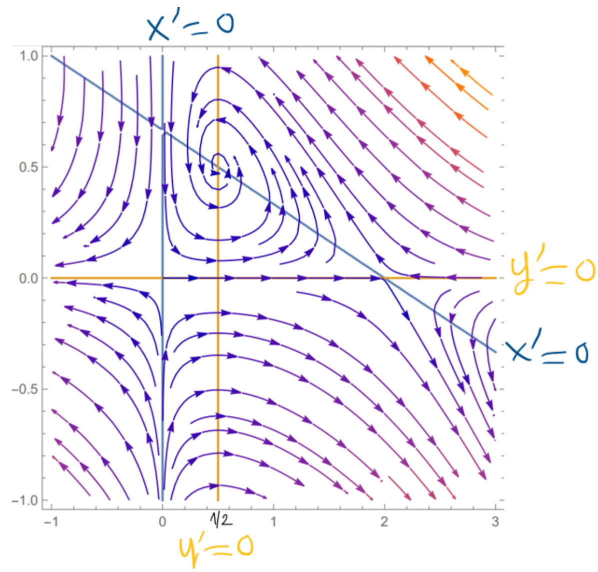

Figure 4: Diagrama de fases. En azul $x' = 0$ y en naranja $y' = 0$.

Resuelva lo siguiente:

a) Encuentre los equilibrios. **(2 puntos)**

b) La matriz Jacobiana de este sistema es la siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} -2x - 3y + 2 & -3x \\ 2y & 2x - 1 \end{pmatrix}.$$

Determine los equilibrios para los cuales es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman.

(2 puntos)

c) De acuerdo con el teorema de Hartman-Grobman, ¿qué tipo de estabilidad tienen los equilibrios encontrados?

(2 puntos)

a) Los equilibrios, por análisis gráfico (cruce de isoclinas) son

$$P_1^* = (0, 0)$$
$$P_2^* = (1/2, 1/2)$$
$$P_3^* = (2, 0).$$

b) Evaluando en $(0, 0)$

$$J(P_1^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Como la parte real es no nula, son hiperbólicos, y por ello, se puede aplicar HG.

Análogamente, para P_2^*

$$J(P_2^*) = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, los valores propios son $\lambda_{1,2} = -1/4 \pm i\sqrt{23}/4$. El equilibrio es hiperbólico (parte real no nula) y por ende, el teorema de HG puede aplicarse.

Finalmente, para P_3^*

$$J(P_3^*) = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$. El equilibrio es hiperbólico (parte real no nula) y por ende HG puede aplicarse.

c) Recordemos que el teorema de HG nos asegura que, en caso el equilibrio de un sistema no lineal sea hiperbólico, se comporta, localmente, como el equilibrio del SLA (Sistema Lineal Asociado). Por ende, en contraste con la imagen, podemos afirmar que el equilibrio $(0, 0)$ se comporta localmente como una silla, el equilibrio $(1/2, 1/2)$ como un sumidero, y finalmente, el equilibrio $(2, 0)$ como una silla.

Lima, 28 de mayo del 2022.