Práctica Calificada 2: Soluciones

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 23/04/22
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (`jrchavez@pucp.edu.pe`)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (`jrivadeneyrab@pucp.edu.pe`),
Marcelo Gallardo (`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`),
Mauricio Vallejos (`mauricio.vallejos@pucp.edu.pe`).
Puntaje: 20 puntos.

Observación: La solución de la PC debe ser colgada en PAIDEIA como máximo hasta las 10.15 a.m. Después de esa hora, ningún documento será aceptado.

Pregunta 1.a) Dado $\beta \in \mathbb{R}$, nos preguntamos para que valores (o valor), el equilibrio es único. Recuerde que un equilibrio a un sistema dinámico del tipo $x' = Ax$, con $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es aquel punto $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax = 0$. De manera inmediata note que $x = (0,0)^T$ cumple. Luego, para que este sea el único equilibrio, debe cumplirse que $\det(A) \neq 0$. Esto es lo mismo que verificar que la solución al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \beta x_1 + 9x_2 &= 0 \\ 3x_1 + \beta^2 x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

es únicamente el $(0,0)$. Luego,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \beta & 9 \\ 2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^3 - 27.$$

Así, si $\beta \neq \sqrt[3]{27} = 3$, se cumple que el único equilibrio es $(0,0)^T$. Caso contrario, se generan infinitos equilibrios, a lo largo de una recta.

Pregunta 1.b) Si $\beta = 2$, el sistema queda

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Luego,

- Calculamos el polinomio característico.
- Encontramos los valores propios.
- Se obtienen los vectores propios.
- Se plantea la solución general (pues no hay condiciones de paso): $x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.

Veamos.

1. El polinomio característico ($det(A-\lambda I)$) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 19.$$

2. Los valores propios son $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{7}$ y $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{7}$.

3. Los vectores propios asociados son (resuelva $Av = \lambda v$)

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1-2\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{(3-2\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} -1-2\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{(3+2\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 1.c) Como $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el equilibrio es inestable tipo silla (verifique que $2\sqrt{7} > 5$). Luego, para trazar el diagrama de fases, observe que

$$\begin{aligned} x_1' > 0 &\implies x_2 > -\frac{2}{9}x_1 \\ x_1' < 0 &\implies x_2 < -\frac{2}{9}x_1 \\ x_2' > 0 &\implies x_2 > -\frac{3}{4}x_1 \\ x_2' < 0 &\implies x_2 < -\frac{3}{4}x_1. \end{aligned}$$

Luego:

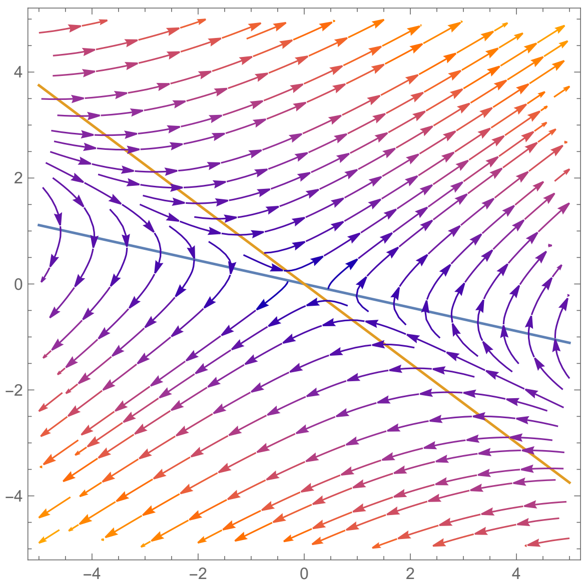

Figura 1: Diagrama de fases.

Pregunta 2.a) Para hallar el equilibrio del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene(n) el (los) punto(s) tal(es) que

$$\begin{aligned} x_1' &= 6x_1 + \sqrt{7}x_2 + 3 = 0 \\ x_2' &= 3x_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{-9+\sqrt{7}}{18}, -1/3\right)$.

Pregunta 2.b) La solución al sistema es de la forma $x = x_h + x_p$. Luego, para encontrar x_h, se resuelve $x' = Ax$. De manera usual, primero se calcula $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = (6 - \lambda)(3 - \lambda).$$

Los valores propios son por ende $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 6$. Luego, resolviendo $Av = \lambda v$, se obtienen los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $x_p = -A^{-1}b = x^*$,

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-9+\sqrt{7}}{18} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pregunta 2.c) Finalmente, el equilibrio es inestable tipo repulsor pues ambos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. No se pedía el diagrama de fases pero es el siguiente:

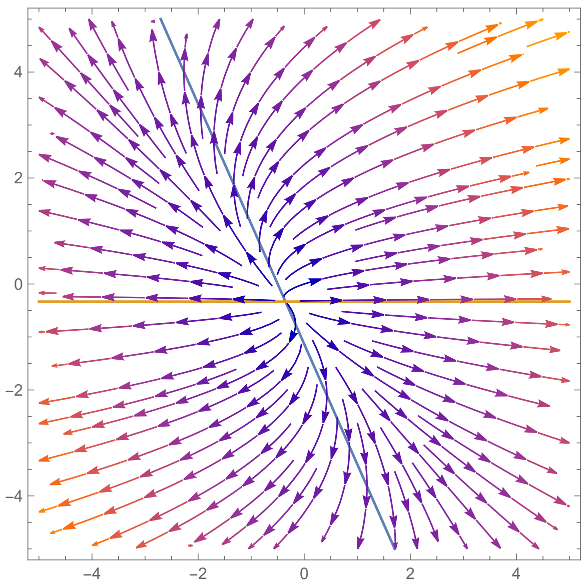

Figura 2: Diagrama de fases.

Pregunta 3.a) Dada la ecuación diferencial

$$2x'' + 18x' - 12x = 0, \;\; x(0) = 1, x'(0) = 1,$$

haciendo el cambio de variables $x_1 = x$ y $x_2 = x'$, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -9x_2 + 6x_1. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 3.b) Se resuelve el sistema lineal.

1. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{-9-\sqrt{105}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-9+\sqrt{105}}{2}$

2. Los vectores propios asociados a los valores propios son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9-\sqrt{105} \\ 12 \end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix} 9+\sqrt{105} \\ 12 \end{pmatrix}.$$

3. Luego,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\left(\frac{-9-\sqrt{105}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} 9-\sqrt{105} \\ 12 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(\frac{-9+\sqrt{105}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} 9+\sqrt{105} \\ 12 \end{pmatrix}.$$

4. Usando las condiciones iniciales $x_1(0) = x(0) = 1$ y $x_2(0) = x'(0) = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_1(9-\sqrt{105}) + c_2(9+\sqrt{105}) &= 1 \\ 12c_1 + 12c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Así, $c_1 = \frac{9+\sqrt{105}-12}{24\sqrt{105}}$ y $c_2 = \frac{\sqrt{105}-9+12}{24\sqrt{105}}$.

5. Finalmente, como $x(t) = x_1(t)$,

$$x(t) = \left(\frac{9+\sqrt{105}-12}{24\sqrt{105}}\right)(9-\sqrt{105})e^{\left(\frac{-9-\sqrt{105}}{2}\right)t} + \left(\frac{\sqrt{105}-9+12}{24\sqrt{105}}\right)(9+\sqrt{105})e^{\left(\frac{-9+\sqrt{105}}{2}\right)t}.$$

Pregunta 4) Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 5x + \frac{1}{2}y, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
x' > 0 &\implies y < \frac{3}{2}x \\
x' < 0 &\implies y > \frac{3}{2}x \\
y' > 0 &\implies y > -10x \\
y' < 0 &\implies y < -10x.
\end{aligned}$$

En base a lo previo, trazando el campo vectorial, se observa que el equilibrio es inestable (en espiral) tipo fuente. Las trayectorias rotan en sentido anti-horario.

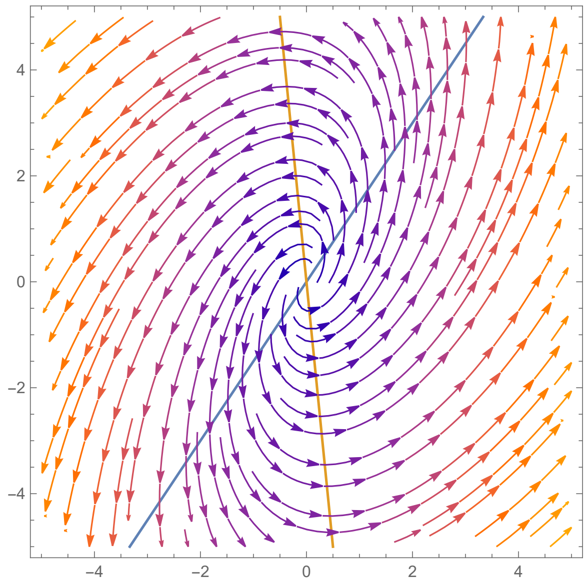

Figura 3: Diagrama de fases.

Note que estas mismas conclusiones podían deducirse si calculaba los valores propios de la matriz asociada al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = \frac{7}{4} - i\frac{3\sqrt{15}}{4}$ y $\lambda_2 = \frac{7}{4} + i\frac{3\sqrt{15}}{4}$. Como la parte real $\alpha > 0$, es fuente.