Práctica Calificada 1

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 23/04/22
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (`jrchavez@pucp.edu.pe`)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (`jrivadeneyrab@pucp.edu.pe`),
Marcelo Gallardo (`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`),
Mauricio Vallejos (`mauricio.vallejos@pucp.edu.pe`).

Puntaje: 20 puntos.

Observación: La solución de la PC debe ser colgada en PAIDEIA como máximo hasta las 10.15 a.m. Después de esa hora, ningún documento será aceptado.

Pregunta 1) Dada la ecuación diferencial

$$x' + 2x = e^t,$$

se requiere saber cuál de las siguientes funciones es solución:

(a) $x(t) = e^t + t$.

(b) $x(t) = 4e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$.

(4 puntos)

Solución)

Se verifica directamente que, $x(t) = e^t + t$ no es solución pues

$$x'(t) = e^t + 1.$$

Por ende,

$$\begin{aligned} x' + 2x = e^t + 1 + 2(e^t + t) &= 3e^t + 2t + 1 \\ &\neq e^t, \ \forall \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Luego, $x(t) = 4e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$ sí es solución pues

$$x'(t) = -8e^{2t} + \frac{e^t}{3}.$$

Así,

$$x' + 2x = -8e^{2t} + \frac{e^t}{3} + 2(4e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t) = e^t.$$

Alternativamente se podía encontrar la solución general $x(t) = Ce^{-2t} + e^t/3$, que en particular corresponde al caso $C = 4$.

Pregunta 2) (Modelo de Malthus). El modelo de Malthus para el crecimiento de la población, denotada por P, y de los recursos, denotados por R, propone las siguientes dinámicas:

$$\begin{aligned} P'(t) &= rP(t),\ \ P(t_0) = P_0 > 0 \\ R'(t) &= a,\ \ R(t_0) = R_0 > 0, \end{aligned}$$

donde $r > 0$ y $a > 0$ denotan tasas de crecimiento.

2.1) Encuentre $P(t)$ y $R(t)$. **(2 puntos)**

2.2) ¿Después de cuánto tiempo se duplicarán la población y los recursos respecto a sus condiciones iniciales. Exprese el resultado en términos de las tasas r y a.

(3 puntos)

Solución)

2.1) Para $P(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \\ \frac{dP}{P} &= rdt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int rdt \\ \ln|P(t)| &= rt + C \\ P(t) &= C_1 e^{rt}. \end{aligned}$$

Usando la condición inicial,

$$P(t_0) = C_1 e^{rt_0} = P_0.$$

Por ende,

$$C_1 = P_0 e^{-rt_0}.$$

Así,

$$P(t) = P_0 e^{r(t-t_0)}.$$

Luego, para los recursos,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= a \\ dR &= a\ dt \\ \int dR &= \int adt \\ R(t) &= at + C. \end{aligned}$$

Usando la condición inicial,

$$R(t_0) = at_0 + C = R_0,$$

Se obtiene,

$$R(t) = a(t - t_0) + R_0.$$

2.2) Calculamos t^* tal que $P(t^*) = 2P_0$:

$$\begin{aligned} P(t^*) &= P_0 e^{r(t^* - t_0)} = 2P_0 \\ e^{r(t^* - t_0)} &= 2 \\ r(t^* - t_0) &= \ln 2 \\ t^* &= \frac{\ln 2}{r} + t_0. \end{aligned}$$

En conclusión, transcurrió un tiempo $t^* - t_0 = \frac{\ln 2}{r}$ para que la población duplique su valor (de población) inicial.

De manera análoga para los recursos,

$$\begin{aligned} R(t^{**}) &= a(t^{**} - t_0) + R_0 = 2R_0 \\ a(t^{**} - t_0) &= R_0 \\ t^{**} &= \frac{R_0}{a} + t_0. \end{aligned}$$

En transcurrió un tiempo $t^{**} - t_0 = \frac{R_0}{a}$ para que los recursos dupliquen su valor inicial.

Pregunta 3) Resuelva los siguientes PVI:

3.1) $x' = 2x + 1$; $x(0) = 3$. **(3 puntos)**

3.2) $x' = x^2 t$; $x(0) = 2$. **(3 puntos)**

Solución)

3.1) Aplicando la fórmula general $a(t) = 2$, $b(t) = 1$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int a(t)dt} \left[C + \int e^{-\int^t 2ds} (1) dt \right] \\ &= Ce^{2t} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando con la condición inicial para hallar C,

$$x(0) = 3 = C - \frac{1}{2}.$$

Luego,

$$C = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Así,

$$x(t) = \frac{7}{2} e^{2t} - \frac{1}{2}.$$

3.2) Aplicando el método de separación de variables,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x^2 t \\
\frac{dx}{x^2} &= t dt \\
\int \frac{dx}{x^2} &= \int t dt \\
-\frac{1}{x} &= \frac{t^2}{2} + C \\
x(t) &= -\frac{1}{C + t^2/2}.
\end{aligned}$$

Luego, como

$$x(0) = 2 = -\frac{1}{C},$$

$C = -1/2$. Así,

$$x(t) = -\frac{2}{t^2 - 1}.$$

Pregunta 4) En cuanto al sistema

$$\begin{aligned}
x_1' &= -2x_1 + 3x_2 + 2 \\
x_2' &= 2x_1 - x_2 + 1.
\end{aligned}$$

4.1) Encuentre la solución general. **(3 puntos)**

4.2) Encuentre la trayectoria que en el instante $t = 0$ pasa por el punto $(0, 0)$ **(2 puntos)**

Solución)

4.1) El sistema homogéneo bajo forma matricial es

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Primero, hallamos los valores y vectores propios de la matriz

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + 2)(\lambda + 1) - 6 \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 2 - 6 \\
&= (\lambda + 4)(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Así,

$$\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 1.$$

Resolviendo $Av = \lambda v$ para $v \in \mathbb{R}^2$, se encuentran los vectores propios

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -2v_1 + 3v_2 &= -4v_1 \\ 2v_1 - v_2 &= -4v_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3v_2 &= -2v_1 \\ 2v_1 &= -3v_2. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -2v_1 + 3v_2 &= v_1 \\ 2v_1 - v_2 &= v_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3v_2 &= 3v_1 \\ 2v_1 &= 2v_2. \end{aligned}$$

Así, en particular[1] los siguientes vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son vectores propios asociados a $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 1$ respectivamente. La solución general a la ecuación homogénea $Ax = x'$, es entonces,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-4t} v_1 + c_2 e^t v_2 = \begin{bmatrix} -3c_1 e^{-4t} + c_2 e^t \\ 2c_1 e^{-4t} + c_2 e^t \end{bmatrix}.$$

Enseguida, obtenemos la solución particular,

$$\begin{aligned} x_p &= -A^{-1} b \\ &= -\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Cualesquiera sean los vectores del tipo $u_1 = \alpha v_1$ y $u_2 = \alpha v_2$, cumplen también.

De este modo, la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 e^{-4t} v_1 + c_2 e^t v_2 - A^{-1} b = \begin{bmatrix} -3c_1 e^{-4t} + c_2 e^t \\ 2c_1 e^{-4t} + c_2 e^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{5}{4} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

4.2) Finalmente, para encontrar la trayectoria que pasa por $(0, 0)$, se resuelve

$$\begin{aligned} 0 &= -3c_1 + c_2 - \frac{5}{4} \\ 0 &= 2c_1 + c_2 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{20} \\ c_2 &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Concluimos

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-3}{20} e^{-4t} + \dfrac{7}{5} e^t \\ \\ \dfrac{2}{20} e^{-4t} + \dfrac{7}{5} e^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{5}{4} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$