Examen Final

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 09/07/2022
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (`jrchavez@pucp.edu.pe`)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (`jrivadeneyrab@pucp.edu.pe`),
Marcelo Gallardo (`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`),
Mauricio Vallejos (`mauricio.vallejos@pucp.edu.pe`).

---

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias lineales

$$x_1(t+1) = 5x_1(t) - x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = 2x_1(t) + 2x_2(t)$$

con $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 1$. Se le pide que resuelva las siguientes cuestiones.

a) Plantee el sistema en forma matricial. **(1 punto)**

b) Obtenga la trayectoria solución. **(2 puntos)**

c) Identifique el equilibrio y analice su estabilidad. **(2 puntos)**

2. En relación a la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(t+1) = 2x(t) + 3^t, \ x(1) = 1/2,$$

demuestre que $x(t) = 3^t - 5 \cdot 2^{t-2}$. **(2 puntos)**

3. El siguiente modelo de crecimiento poblacional, conocido como *modelo de Rickers*, puede ser usado para modelar la evolución de la población de peces en cierto ecosistema. Este modelo está determinado por la siguiente ecuación en diferencias no lineal

$$x(t+1) = x(t)e^{r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)}, \ r, K > 0.$$

a) Tome $K = 1$. Encuentre el (los) equilibrio(s) del sistema. **(2 puntos)**

b) Analice la estabilidad de (los) equilibrio(s), nuevamente para $K = 1$. **(2 puntos)**

4. Considere el siguiente problema de maximización de la utilidad

$$\begin{aligned} \text{máx } U(x,y) &= \sqrt{x} + y \\ s.a. : p_x x + p_y y &\leq I \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Considere para el resto del problema $p_x = p_y = 1$ e $I = 2$.

a) ¿Puede asegurarse que el problema tiene solución? Grafique el conjunto determinado por las restricciones del problema en el plano $X - Y$. **(2 puntos)**

b) Plantee el Lagrangiano el problema. **(1 punto)**

c) Enuncie y aplique las condiciones de Kuhn-Tucker a este problema. **(1 punto)**

d) Resuelva el problema usando las condiciones de Kuhn-Tucker. *(Obtenga x^* y y^*).* **(2 puntos)**

5. Sea

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}, \quad a, b > 0$$

y $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$.

a) Demuestre que, si $a < b^2$, f es una contracción. **(2 puntos)**

b) En dicho caso, es decir, si $a < b^2$, definiendo $x(t+1) = f(x(t))$, deduzca la existencia y unicidad de x^*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*,$$

y calcule su valor en términos de a y b. **(1 punto)**