Práctica Dirigida 5: 1MAT27

Profesor: Jorge Chávez
Jefe de Prácticas: Joaquin Rivadeneyra, Mauricio Vallejos & Marcelo Gallardo

Junio 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1 Sistemas de ecuaciones en diferencias

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(t)$ con $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
3. $x(t+2) = 2x(t+1) + 3x(t) + 2$, $x(0) = 1/2$, $x(1) = -1/2$.
4. $x(t+2) = 3x(t+1) + 2x(t) + 1$.

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$
\begin{aligned}
x(t+1) - x(t) - \frac{1}{3}y(t) &= -1 \\
x(t+1) + y(t+1) - \frac{1}{6}y(t) &= \frac{17}{2} \\
x(0) = 5,\ y(0) &= 4.
\end{aligned}
$$

2 Ecuaciones en diferencias non lineales

3. Con respecto a la ecuación

$$x(t+1) = \alpha x(t)(1 - x(t)).$$

Se le pide que,

- Encuentre los equilibrios.
- Clasifique los equilibrios de acuerdo al valor del parámetro α.

4. Encuentre la trayectoria solución de la ecuación

$$x(t+1) = \frac{1}{2x(t)}, \quad x(0) = x_0 \neq 0.$$

5. Resuelva la siguiente ecuación en diferencias no lineal:

$$x^2(t+1) = \frac{1}{3}x^2(t); \; x(0) = x_0.$$

6. Encuentre los equilibrios de las siguientes ecuaciones

a) $x(t+1) = x^2(t) - 2.$

b) $x(t+1) = x^3(t) + 2x^2(t) - 2.$

Luego, analice la estabilidad de estos equilibrios.

7. Los cinco primeros términos de la ecuación $x(t+1) = f(x(t))$ son

$$x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 4, x(3) = 16, x(4) = 65536.$$

Se le pide que encuentre una posible función f.

8. Pruebe que la siguiente función es una contracción:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \; x > 1.$$

¿Es la función $f(x) = e^x$ una contracción?

3 Profundización

9. Sea $t \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\begin{cases} x(1) & \geq 0 \\ x(t+1) & = \sqrt{2 + x(t)}. \end{cases}$$

1. Muestre que $|x(t+1) - 2| \leq \frac{1}{2}|x(t) - 2|$. *Sugerencia*: note que $|x(t) - 2| \leq \frac{1}{2^{t-1}}|x_1 - 2|$.
2. Concluya que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$.

10. (Fibonacci). Considere la sucesión (variable de estado), $x(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, definida de la siguiente manera

$$\begin{cases} x(1) & = x(2) = 1 \\ x(t+2) & = x(t+1) + x(t). \end{cases}$$

Demuestre que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^t - \beta^t),$$

donde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Luego, muestre que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = \alpha.$$

11. (Modelo de Solow en tiempo discreto - Acemoglu). En macroeconomía y teoría del crecimiento, uno de los modelos más conocidos e importantes por su impacto en la historia de la economía, es el modelo de Solow-Swan, también conocido como el modelo de crecimiento neoclásico. El modelo fue producto delos trabajos de Robert Solow y Trevor Swan (1956). Una versión en tiempo discreto presentada por el economista Daron Acemolgu, profesor del MIT, es la siguiente[1]:

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t),$$

donde

- $k(t)$ es el capital per capita.
- f es una función de producción neoclásica.
- s la tasa de ahorro y δ la tasa de depreciación del capital.

Encuentre el equilibrio y analice sus propiedades para $f(k) = k^\alpha$, α positivo y $\alpha \neq 1$.

12. En el caso general, dada la ecuación

$$x(t+2) = ax(t+1) + bx(t),$$

el sistema correspondiente, en términos de las variables de estado, es

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0,$$

de donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}.$$

Deduzca las soluciones de acuerdo con el valor del discriminante $\triangle = a^2 + 4b$.

[1] Esta ecuación se deriva con bastante detalle en `https://economics.mit.edu/files/7181`