PC3 – Solucionario

Ejercicio 1. Considere el siguiente problema de consumo intertemporal $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \max_{c_t} \quad & \sum_{t=1}^{T} \delta^t \ln c_t \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{t=1}^{T} c_t \leq R \\ & c_t > 0, \end{aligned}$$

donde T denota el numero de periodos en los que se ha dividido el horizonte temporal, c_t es el consumo en el periodo t, δ es un factor de descuento con $0 < \delta < 1$ y $R > 0$ denota los recursos con los que cuenta el consumidor al inicio del primer periodo.

1.1) Explique por que **no se puede** aplicar el Teorema de Weierstass para asegurar que el problema $\mathcal{P}$ tiene solución.

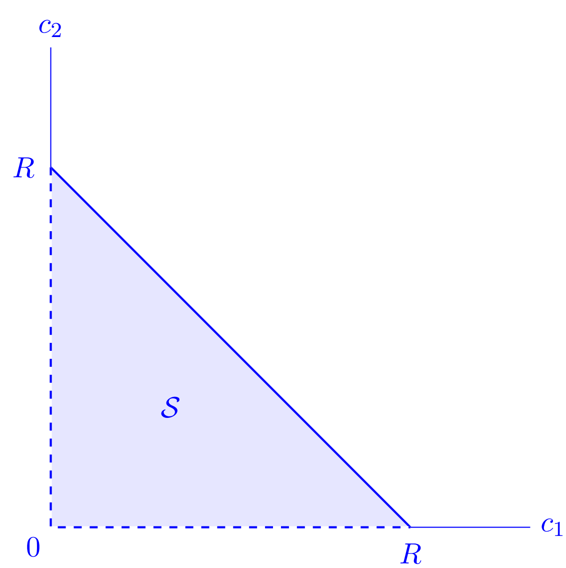
   Sugerencia: Por ejemplo, puede reducir el problema a solo dos periodos, esto es, cuando $T = 2$. Luego, puede graficar el conjunto de oportunidad reducido y, a partir de ello, elaborar su respuesta.

1.2) Supongamos que $c^* = (c_1^*, \dots, c_T^*)$ es una solución del problema $\mathcal{P}$; esta solución se conoce como la *política optima de consumo*. Verifique que c^* satisface la hipótesis de regularidad.

1.3) Dado que c^* satisface la hipótesis de regularidad, entonces existe λ^*, tal que se cumplen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Plantee estas condiciones.

Solución.

1.1) Al graficar para $T = 2$, tenemos que el conjunto de oportunidad $\mathcal{S}$ es:



   el cual claramente no es cerrado $\{c_t > 0\}$. Por ello, no es compacto, y no se puede usar el Teorema de Weierstrass.

1.2) Dado que la función de utilidad es creciente en c_t, entonces la solución debe darse sobre la recta presupuestaria $\sum_{t=1}^{T} c_t = R$, es decir que dicha restricción es activa. Sea $g = R - \sum_{t=1}^{T} c_t$, es directo que $\nabla g = (-1, \dots, -1) \neq 0$, que claramente es L.I. (un unico vector no nulo siempre forma un conjunto de vectores L.I.)

1.3) El lagrangiano es

$$L(\mathbf{c}, \lambda) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \ln c_t + \lambda \left[R - \sum_{t=1}^{T} C_t \right]$$

y, entonces, las condiciones son

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\delta^t}{c_t} - \lambda \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - \sum_{t=1}^{T} C_t \geq 0$$

$$c_t \cdot \frac{\partial L}{\partial c_t} = c_t \left[\frac{\delta^t}{c_t} - \lambda \right] \leq 0$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \left[R - \sum_{t=1}^{T} C_t \right] \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Aun cuando no se puede aplicar el Teorema de Weierstrass para asegurar la existencia de una solución, podría recurrirse al siguiente resultado para resolver el problema $\mathcal{P}$.

Teorema (Teorema f-g). *Considere el siguiente problema de optimización sobre* $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & f(\mathbf{x}) \\ s.a. & g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} \gg 0, \end{array}$$

donde $f(\mathbf{x})$ *es cóncava y* $g_1(\mathbf{x}),\ g_2(\mathbf{x}), \dots,\ g_m(\mathbf{x})$ *son convexas. Si existen* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *que verifican las condiciones de KKT, entonces* x^* *es una solución del problema (las condiciones necesarias se vuelven suficientes).*

Ejercicio 2. Considere de nuevo el problema $\mathcal{P}$.

2.1) Verifique que el problema $\mathcal{P}$ satisface la hipótesis del Teorema f-g.

2.2) Pruebe que la política optima viene dada por

$$c_t^* = \frac{R\delta^t(1-\delta)}{\delta - \delta^{T+1}}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Sugerencia: Posiblemente vaya a necesitar la siguiente fórmula:

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^t = \frac{\delta - \delta^{T+1}}{1-\delta}.$$

2.3) De acuerdo con la política optima, ¿se consume mas ahora o en el futuro? Explique su respuesta.

2.4) Si el horizonte de tiempo fuera “infinito”, es decir, un horizonte de tiempo muy largo, ¿cuál sería el consumo óptimo en el largo plazo?

Solución.

2.1) $f(c) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \ln c_t$ *es cóncava en* $c \gg 0$; $g_1(c) = \sum_{t=1}^{T} c_t - R \leq 0$ *es convexa (afín). Las desigualdades estrictas* $c_t > 0$ *no requieren multiplicadores porque la forma logarítmica fuerza interioridad. Por tanto, al verificarse KKT, éstas son suficientes.*

2.2) De la estacionariedad,

$$\frac{\delta^t}{c_t} = \lambda \quad \Rightarrow \quad c_t = \frac{\delta^t}{\lambda}.$$

Actividad de presupuesto: $\sum_{t=1}^{T} c_t = R$. *Luego*

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{\delta^t}{\lambda} = R \;\Rightarrow\; \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^{T} \delta^t = R.$$

Usando $\sum_{t=1}^{T} \delta^t = \dfrac{\delta - \delta^{T+1}}{1-\delta}$:

$$\lambda = \frac{\delta - \delta^{T+1}}{R(1-\delta)} \quad \Rightarrow \quad c_t^* = \frac{\delta^t}{\lambda} = \frac{R\,\delta^t(1-\delta)}{\delta - \delta^{T+1}}.$$

2.3) La razón $c_{t+1}^*/c_t^* = \delta \in (0,1)$. *Por tanto, el perfil es estrictamente decreciente: se consume más hoy que mañana.*

2.4) Para $T \to \infty$, $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = \dfrac{\delta}{1-\delta}$, *de modo que*

$$\lambda_\infty = \frac{\delta}{R(1-\delta)}, \qquad c_t^{*\infty} = \frac{\delta^t}{\lambda_\infty} = R(1-\delta)\,\delta^{\,t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

El consumo de largo plazo satisface $\lim_{t\to\infty} c_t^{*\infty} = 0$ *y el perfil decae geométricamente.*

Ejercicio 3. Un modelo de difusión de una epidemia en una población de 1000 personas está dado por

$$x'(t) = -0{,}1\,x(t) + 100, \qquad x(0) = 10.$$

3.1) Obtenga $x(t)$ y grafique.

3.2) ¿Cuándo se infecta la mitad de la población?

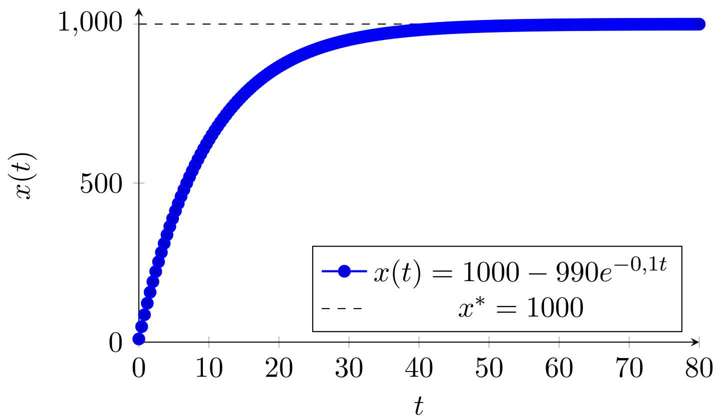
3.3) Explique por qué, según este modelo, toda la población termina infectada.

Solución.

3.1) Es EDO lineal con punto fijo $x^* = \dfrac{100}{0{,}1} = 1000$. *La solución con condición inicial es*

$$x(t) = x^* + \big(x(0) - x^*\big)e^{-0{,}1t} = 1000 - 990\, e^{-0{,}1t}.$$

Gráfica:



3.2) Resolver $x(t) = 500$:

$$500 = 1000 - 990e^{-0{,}1t} \;\Rightarrow\; e^{-0{,}1t} = \frac{50}{99} \;\Rightarrow\; t = 10\ln\Big(\frac{99}{50}\Big) \approx 6{,}83.$$

3.3) Como $x'(t) + 0{,}1\, x(t) = 100$ *con* $0{,}1 > 0$, *la solución converge monótonamente a* $x^* = 1000$. *Con* $x(0) = 10$, *se tiene* $x(t) \nearrow 1000$, *es decir, eventualmente toda la población está infectada:* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000$.