

## PC2 – Solucionario

**Ejercicio 1.** Un consumidor posee una relación de preferencias  $\succeq$  definida sobre el conjunto  $S = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$ , como sigue

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \iff \ln x_1 + x_2 \geq \ln y_1 + y_2$$

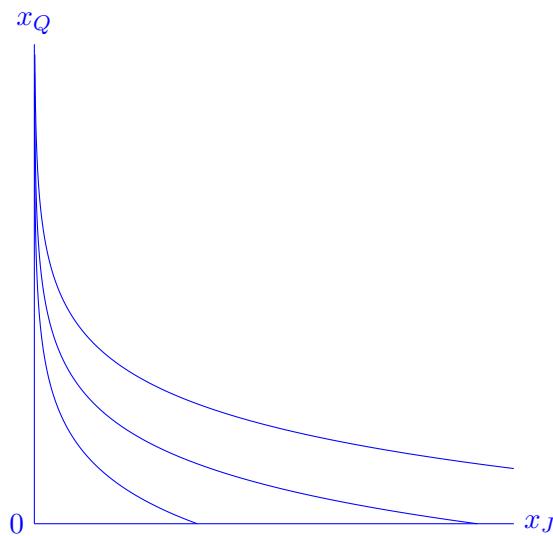
- 1.1) Encuentre una función de utilidad que represente a  $\succeq$ .
- 1.2) Trace tres curvas de indiferencia asociadas a  $\succeq$ .
- 1.3) Para la función de utilidad que propuso en la pregunta 1.1), calcule las utilidades marginales y, con base en ellas, explique por qué se puede afirmar que la relación  $\succeq$  es monótona.
- 1.4) ¿Es la función  $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$  una función de utilidad que represente a  $\succeq$ ? Explique su respuesta.

*Solución.*

- 1.1) De la definición es inmediato que  $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$  representa  $\succeq$ .
- 1.2) Un conjunto de indiferencia para una canasta dada  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  viene dado por

$$C_\sim(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \{(x_1, x_2) \in S : \ln x_1 + x_2 = \ln \bar{x}_1 + \bar{x}_2\}$$

Podemos despejar para obtener que coincide con la curva  $\{x_2 = \ln \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \ln x_1\}$ . Para los puntos  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  y  $(1, 3)$  esto es



- 1.3) Las utilidades marginales son  $\partial u / \partial x_1 = 1/x_1 > 0$  para  $x_1 > 0$  y  $\partial u / \partial x_2 = 1 > 0$ , ambas positivas. Por ende, efectivamente la relación de preferencia es monótona.
- 1.4) Como la función exponencial es estrictamente creciente, y sabemos que componer una función de utilidad por una función estrictamente creciente no altera la relación de preferencia. Entonces la función

$$v(x_1, x_2) = \exp(u(x_1, x_2)) = \exp(\ln x_1 + x_2) = x_1 \exp(x_2)$$

representa  $\succeq$ .

**Ejercicio 2.** Un consumidor posee una relación de preferencia  $\succeq$ , definida sobre el conjunto  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 6\}$  como sigue:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \iff x_1x_2 \geq y_1y_2.$$

1. ¿Existe  $\mathbf{x}^* \in S$ , tal que  $\mathbf{x}^* \succeq \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in S$ ?
2. Si existe tal  $\mathbf{x}^*$  de la pregunta (2.1) encuéntrelo.

*Solución.*

- 1.1) Como el conjunto  $S$  es compacto, y encontrar un elemento maximal respecto a la preferencia es lo mismo, por definición, que maximizar una función de utilidad que la representa, por ej.  $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ , debido al Teorema de Weierstrass, podemos asegurar una solución al problema. Esto es, existe dicho  $\mathbf{x}^*$ .
- 1.2) Resolvemos  $\max x_1x_2$  sujeto a  $(x_1, x_2) \in S$ . Se sigue, identificando  $S$  con la restricción presupuestaria  $B(p, I) = B((2, 3), 6)$  que

$$x_1^* = \frac{6}{4}, \quad x_2^* = \frac{6}{6} = 1.$$

**Ejercicio 3.** Una empresa produce un bien usando dos insumos  $x$  e  $y$ , con función de producción

$$Q(x, y) = x^\alpha + y^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cada unidad de producción se vende al precio  $p > 0$  y los precios de los insumos son  $w > 0$  y  $r > 0$ , respectivamente.

1. Explique si las productividades marginales son crecientes o decrecientes. (2 puntos)
2. ¿Cuál es la función de beneficio de la empresa? Explique si es cóncava. (2 puntos)
3. Resuelva el problema del productor, esto es: encuentre las demandas óptimas  $x^*$  e  $y^*$ . (2 puntos)
4. Pruebe que cuando  $\alpha \rightarrow 1^-$ ,  $x^*$  e  $y^*$  son muy elásticas en magnitud respecto de sus precios correspondientes. (2 puntos)

*Solución.*

1. La productividad marginal respecto a  $x$  es

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

que es decreciente porque  $0 < \alpha < 1 \implies \alpha - 1 < 0$ .  $Q_{xx} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0$ . Lo mismo vale para  $y$ . Por lo tanto, las productividades marginales son decrecientes.

2. El beneficio es

$$\pi(x, y) = p(x^\alpha + y^\alpha) - wx - ry.$$

Como  $x^\alpha$  y  $y^\alpha$  son funciones cóncavas (al ser  $\alpha \in (0, 1)$ ), y la combinación lineal con coeficientes positivos preserva la concavidad,  $\pi(x, y)$  es cóncava.

3. El problema es

$$\max_{x,y \geq 0} p(x^\alpha + y^\alpha) - wx - ry.$$

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} p\alpha x^{\alpha-1} - w &= 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \left(\frac{p\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ p\alpha y^{\alpha-1} - r &= 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \left(\frac{p\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Note que, dado que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \pi_x, \lim_{y \rightarrow 0^+} \pi_y = +\infty$ , la solución es interior:  $x^*, y^* > 0$ .

4. Consideremos, por ejemplo,  $x^*(w)$ . Su elasticidad precio es

$$\varepsilon_{x^*,w} = \frac{\partial x^*}{\partial w} \cdot \frac{w}{x^*} = \frac{-1}{1-\alpha}.$$

Análogamente,  $\varepsilon_{y^*,r} = \frac{-1}{1-\alpha}$ . Cuando  $\alpha \rightarrow 1^-$ , el denominador tiende a 0 por la izquierda, por lo que la elasticidad tiende a  $-\infty$  en magnitud. Es decir, las demandas por insumos se vuelven extremadamente elásticas a sus precios (esto pues la tecnología se vuelve lineal:  $Q(x,y) \rightarrow x+y$ ).

**Ejercicio 4.** Considere las funciones  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = e^{-x^2}$ .

1. Pruebe que  $f$  no es convexa ni cóncava, pero sí es cuasiconvexa y cuasicóncava. (2 puntos)
2. Pruebe que  $g$  no es convexa, ni cóncava, ni cuasiconvexa; pero sí es cuasicóncava. (2 puntos)

*Solución.*

1. Para  $f(x) = x^3$ , se tiene  $f''(x) = 6x$ , que cambia de signo en  $x = 0$ , por lo que no es convexa ni cóncava en todo  $\mathbb{R}$ . Sin embargo,  $f$  es estrictamente monótona creciente, lo cual implica que tanto  $f$  como  $-f$  son funciones cuasiconvexas. Por lo tanto,  $f$  es simultáneamente cuasiconvexa y cuasicóncava.

2. Para  $g(x) = e^{-x^2}$ , su segunda derivada es

$$g''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

que cambia de signo según  $|x| < 1/\sqrt{2}$  o  $|x| > 1/\sqrt{2}$ . Por ello,  $g$  no es convexa ni cóncava en todo  $\mathbb{R}$ . Además, los supernivel  $\mathcal{U}(\alpha) = \{x : g(x) \geq \alpha\}$  son intervalos simétricos (convexos), lo que implica que  $g$  es cuasicóncava. Sin embargo, los subnivel  $\mathcal{L}(\alpha) = \{x : g(x) \leq \alpha\}$  no son convexos (pues son uniones de dos intervalos disjuntos), por lo que  $g$  no es cuasiconvexa.

Sea  $g(x) = e^{-x^2}$  y fije  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Denote

$$\mathcal{U}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq \alpha\}, \quad \mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \alpha\}.$$

1) Conjuntos de supernivel  $\mathcal{U}(\alpha)$  y su convexidad.

$$e^{-x^2} \geq \alpha \iff \begin{cases} \text{(i)} \alpha > 1 : & \mathcal{U}(\alpha) = \emptyset \\ \text{(ii)} \alpha = 1 : & \mathcal{U}(1) = \{0\} \\ \text{(iii)} 0 < \alpha < 1 : & -x^2 \geq \ln \alpha \iff x^2 \leq -\ln \alpha \\ & \Rightarrow \mathcal{U}(\alpha) = [-a, a], \quad a := \sqrt{-\ln \alpha} \\ \text{(iv)} \alpha \leq 0 : & \mathcal{U}(\alpha) = \mathbb{R} \quad (\text{pues } e^{-x^2} > 0 \ \forall x) \end{cases}$$

En todos los casos,  $\mathcal{U}(\alpha)$  es convexo:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $[-a, a]$  y  $\mathbb{R}$  son conjuntos convexos en  $\mathbb{R}$ . Como todo supernivel es convexo,  $g$  es cuasiconcava.

2) Conjuntos de subnivel  $\mathcal{L}(\alpha)$  y su (no) convexidad.

$$e^{-x^2} \leq \alpha \iff \begin{cases} \text{(i)} \ \alpha < 0 : & \mathcal{L}(\alpha) = \emptyset \\ \text{(ii)} \ \alpha = 0 : & \mathcal{L}(0) = \emptyset \quad (\text{pues } g > 0) \\ \text{(iii)} \ 0 < \alpha < 1 : & -x^2 \leq \ln \alpha \iff x^2 \geq -\ln \alpha \\ & \Rightarrow \mathcal{L}(\alpha) = (-\infty, -a] \cup [a, \infty), \quad a := \sqrt{-\ln \alpha} \\ \text{(iv)} \ \alpha \geq 1 : & \mathcal{L}(\alpha) = \mathbb{R} \quad (\text{pues } e^{-x^2} \leq 1 \leq \alpha) \end{cases}$$

Para  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mathcal{L}(\alpha) = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$  no es convexo. Prueba breve: tome  $x_1 = -a \in \mathcal{L}(\alpha)$  y  $x_2 = a \in \mathcal{L}(\alpha)$ . Su punto medio es  $\frac{x_1+x_2}{2} = 0$ , pero  $g(0) = 1 > \alpha$ , luego  $0 \notin \mathcal{L}(\alpha)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L}(\alpha)$  no es convexo para  $0 < \alpha < 1$ . Como existe  $\alpha$  con subnivel no convexo,  $g$  no es cuasiconvexa.