PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA DIRIGIDA 6
PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ
JEFES DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO & RODRIGO CROUSILLAT
SEMESTRE 2025-2
FECHA: 15 de noviembre de 2025

Control Óptimo

1) Resuelva el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{u} \quad & J = \int_0^1 (2x + 3u)\, dt \\ \text{s.a. :} \quad & x' = 1 - u^2, \\ & x(0) = 2. \end{aligned}$$

2) Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{I} \quad & \int_0^T (K - K^2 - I - I^2)\, dt \\ \text{s.a. :} \quad & K' = I, \\ & K(0) = 2. \end{aligned}$$

1. Si K representa el *stock* de capital e I la inversión, identifique cuál es la variable de control y cuál es la de estado.

2. Escriba el Hamiltoniano del problema.

3. Plantee las condiciones necesarias del Principio del Máximo de Pontryagin.

4. A partir de dichas ecuaciones, formule un sistema bidimensional lineal en términos de K e I.

5. Determine las trayectorias solución del sistema.

3) Modelo de Ramsey–Cass–Koopmans. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
\max_{c(\cdot)} \quad & \int_0^\infty \sqrt{c(t)}\, e^{-\rho t}\, dt \\
\text{s.a.}: \quad & k' = k^\alpha - \delta k - c, \\
& k(0) = k_0, \\
& 0 \le c(t) \le k^\alpha(t).
\end{aligned}$$

1. Caracterice los parámetros del modelo: ρ, α, δ y k_0.

2. Identifique la variable de control y la variable de estado.

3. Indique la expresión de $\Omega(t)$.

4. Plantee el Hamiltoniano en valor presente.

5. Explique por qué la solución es interior, considerando las propiedades de $u(c) = \sqrt{c}$.

6. Aplique el Principio del Máximo y obtenga un par de ecuaciones diferenciales que caractericen la solución del problema. Elabore el diagrama de fases del sistema y analice su comportamiento.

4) Extracción de un recurso natural. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
\max_{y(\cdot)} \quad & \int_0^\infty \ln(y(t))\, e^{-\rho t}\, dt \\
\text{s.a.}: \quad & x'(t) = -y(t), \\
& x(0) = x_0, \\
& \lim_{t\to\infty} x(t) = x_1 \in (0, x_0).
\end{aligned}$$

1. Plantee la función Hamiltoniana en valor presente.

2. Aplique el Principio del Máximo y demuestre que

$$\mu(t) = \mu(0)e^{\rho t}, \qquad y(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\mu(0)}, \quad \mu(0) > 0.$$

3. Verifique que se cumple la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}(\cdot)e^{-\rho t} = 0.$$

<u>Cálculo de Variaciones</u>

5) Demuestre que todo problema de cálculo de variaciones puede escribirse como un problema de control óptimo. Asimismo, si u puede expresarse en términos de x' y x, muestre que el problema de control óptimo puede formularse como un problema de cálculo de variaciones.

6) Utilice los resultados anteriores para plantear el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\max_{c(\cdot)} \quad & J(x) = \int_0^{t_1} u(c)\, e^{-\rho t}\, dt \\
\text{s.a.}: \quad & x' = rx - c, \\
& x(0) = x_0, \\
& x(t_1) = x_1,
\end{aligned}$$

como un problema de cálculo de variaciones. Derive la ecuación de Euler–Lagrange tomando $u(c) = \ln(c)$, donde $r, \rho > 0$.

7) Resuelva el siguiente problema de optimización dinámica utilizando la ecuación de Euler–Lagrange[1]:

$$\begin{aligned}
\max_{x(\cdot)} \quad & J(x) = \int_0^{t_1} e^{-rt}\sqrt{x'}\, dt \\
\text{s.a.}: \quad & x(0) = x_0, \\
& x(t_1) = x_1.
\end{aligned}$$

8) Resuelva el siguiente problema de cálculo de variaciones:

$$\begin{aligned}
\max_{x(\cdot)} \quad & J(x) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}(ax^2 - bx'^2)\, dt \\
\text{s.a.}: \quad & x(t_0) = 2, \\
& x(t_1) = 4.
\end{aligned}$$

Considere que $4a < \delta b$.

[1] $F_x = \frac{d}{dt} F_{x'}$.