PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA DIRIGIDA 1
PROFESOR: Jorge Richard Chávez Fuentes
JEFES DE PRÁCTICA: Marcelo Gallardo, Rodrigo Crousillat
SEMESTRE 2025-2

Conjuntos convexos

Ejercicio 1. Determine si los siguientes conjuntos son convexos o no:

1) $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 \geq x_1\}$.

2) $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 \leq \ln(x_1)\}$.

3) $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2/9 + x_2^2/9 \leq 1\}$.

4) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2\}$.

Ejercicio 2. Por definición, pruebe que el conjunto S es convexo

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 3, \; 1 \leq x_2 \leq 4\}.$$

Ejercicio 3. Pruebe que el conjunto que se da a continuación no es convexo.

$$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_1^2 + 1\right\}.$$

Ejercicio 4. Un consumidor tiene preferencias sobre cuatro canastas factibles, pero no se decide por ninguna de ellas y, más bien, decide consumir 3/7 de la primera, 1/7 de la segunda, 2/7 de la tercera y 1/7 de la última. Se requiere saber si esta combinación produce también una canasta factible de consumo.

Ejercicio 5. Sea $\overline{p} = (2, 3)$ un vector de precios e $I = 10$, el ingreso de un consumidor.

1) Grafique la región de presupuesto.

2) Proporcione dos canastas factibles.

3) Proporcione una canasta no factible.

4) Sin cambiar los precios, indique cómo podría aumentar el ingreso para que la canasta no factible se convierta en factible. Realice el mismo ejercicio, pero ahora manteniendo fijo el ingreso.

Ejercicio 6. Considere el conjunto

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \right\}.$$

Pruebe que X es convexo. Puede empezar con $n = 2$.

Ejercicio 7. Considere el siguiente conjunto

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+} : \ \text{mín} \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{a_n} \right\} \geq c \right\},$$

donde $a_1, ..., a_n > 0$ y $c \geq 0$. Muestre que U es convexo. Considere inicialmente $n = 2, 3$ y luego generalizar.

Relaciones de preferencias

Ejercicio 8. Se definen relaciones binarias en $\mathbb{R}^2$. En cada caso, determine si es una preferencia racional, esboce una curva de indiferencia consistente y analice si la preferencia es convexa.

1) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 \leq y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2$.

2) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

3) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 x_2 \leq y_1 y_2$.

4) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \ \Leftrightarrow \ \text{mín}\{x_1, x_2\} \leq \text{mín}\{y_1, y_2\}$.

5) $x = (x_1, x_2) \preceq y = (y_1, y_2)$ si y sólo si $(x_1 < y_1)$, o bien, $(x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 < y_2)$; en particular, $x \sim y$ si y solo si $x = y$.

6) Dado $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, $x \preceq y$ si y solo si $\|x - x_0\|_2 \geq \|y - x_0\|_2$, donde $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Ejercicio 9. Pruebe que si una relación de preferencias es fuertemente monótona, entonces es localmente no saciada.

Funciones de utilidad

Ejercicio 10. Si $(1, 1) \preceq (2, 0)$, ¿la función $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ representa correctamente dicha relación de preferencia?

Ejercicio 11. La relación de preferencia $\succeq$ es monótona en $X \subset \mathbb{R}^L$ si $x \in X$ y $y > x$ (desigualdad estricta en cada entrada) implica $y \succ x$. Es fuertemente monótona si $y \geq x$, $y \neq x$ implica $y \succ x$. Pruebe que, si $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, C^1, representa $\succ$ y $\succ$ es fuertemente monótona, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$.

Ejercicio 12. Sea $P = (1,1)$. Para cada relación de preferencia representada por la función de utilidad u en $X = \mathbb{R}^2_+$, considere los conjuntos

$$I_P = \{x \in X : \; u(x) = u(P)\}, \qquad \overline{C}_P = \{x \in X : \; u(x) \geq u(P)\}.$$

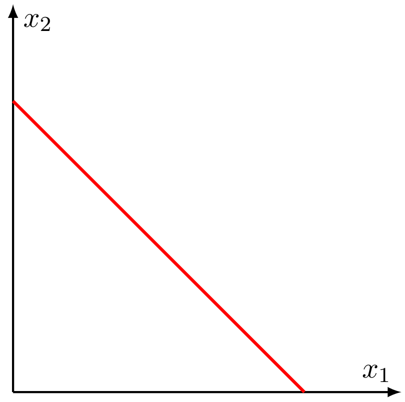
Casos:

a) $u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$,

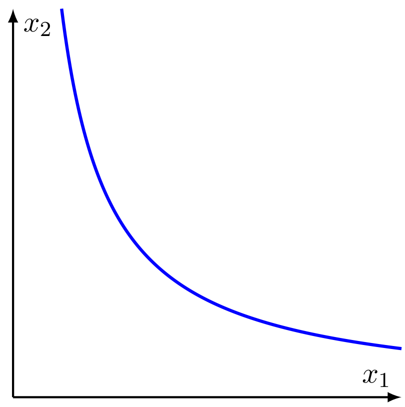
b) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

c) $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

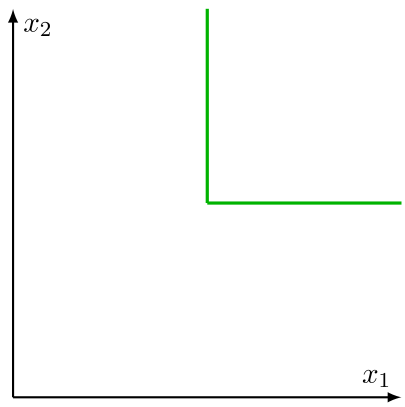
A continuación se muestran **tres gráficas** (a, b, c) con I_P (trazo oscuro) y $\overline{C}_P$ (zona sombreada). **Relacione cada gráfica con su utilidad correspondiente** y determine si la preferencia es convexa en cada caso.



(a)



(b)



(c)

Ejercicio 13. Daron Acemoglu tiene preferencias representadas por

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1).$$

Demuestre que Acemoglu tiene preferencias convexas. ¿Son estrictamente convexas? Efectúe el mismo análisis para las preferencias de Robert Barro, representadas por

$$v(x_1, x_2) = \text{mín}\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{10}\right\}.$$

Ejercicio 14. Represente con una utilidad (en $X = \mathbb{R}^3_+$) las siguientes descripciones. Use bienes (x_1, x_2, x_3) y precise si su función es por tramos, Leontief, Cobb–Douglas, lineal o lexicográfica:

a) "Siempre toma café (x_1) con azúcar (x_2); si no hay azúcar, usa endulzante (x_3). Nunca toma café solo."

b) "Para hacer un sándwich necesita pan (x_1) y *alguna* proteína: jamón (x_2) o queso (x_3); si hay ambas, el queso no aporta utilidad adicional."

c) "Prefiere agua (x_1) y jugo (x_2) como sustitutos perfectos, pero si no hay jugo, un refresco (x_3) cuenta la mitad que el jugo."

d) "Una receta requiere exactamente 1:1 entre harina (x_1) y leche (x_2); si falta leche, puede usar leche vegetal (x_3) sólo cuando $x_2 = 0$."

e) "Nunca consume x_1 sin x_2; si $x_2 > 0$, x_3 es completamente irrelevante."

Ejercicio 15. Proponga una función que represente las preferencias de la siguiente afirmación: Una persona nunca come pan solo, siempre lo acompaña con mermelada, pero cuando no hay mermelada, usa mantequilla.

Ejercicio 16. Pruebe que una preferencia $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad solo si es racional.

Ejercicio 17. Si u representa $\succeq$ y f es simplemente creciente (no estrictamente), ¿$f \circ u$ es necesariamente una función de utilidad que representa $\succeq$?

Ejercicio 18. Considere una relación de preferencia racional $\succeq$. Muestre que si $u(x) = u(y)$ implica $x \sim y$ y $u(x) > u(y)$ implica $x \succ y$, entonces u representa $\succeq$.

Ejercicios para profundizar

Ejercicio 19. ¿Es el conjunto de las funciones $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

un conjunto convexo? *¿Qué tipo de funciones son (piense en su curso de estadística)?*

Ejercicio 20. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : S \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Pruebe que $f(S)$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 21. Demuestre que las bolas abiertas $\mathcal{B}(x_0, r)$ y cerradas $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r)$ (de centro x_0 y radio $r > 0$) son conjuntos convexos. Recuerde que

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| < r\}, \qquad \overline{\mathcal{B}}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Ejercicio 22. *(Mas-Colell et al. 1995).* Muestre que si X es finito y $\succeq$ es una relación de preferencia racional en X, entonces existe una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$. *Sugerencia: define convenientemente una lista de conjuntos $X_i \subset X$ y considere $u(x_i) = |X_i|$, donde $|X_i|$ corresponde al número de elementos del conjunto X_i.*

Ejercicio 23. Un agente económico consume n bienes, cuyas cantidades vienen representadas por $x_1, ..., x_n$. Este agente económico puede únicamente consumir cantidades de los bienes mayores o iguales a $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Determine la restricción presupuestaria del agente, es decir, el conjunto de canastas de consumo $(x_1, ..., x_n)$ que son factibles (que puede consumir). Para esto, considere que el agente tiene un ingreso $I > 0$ y enfrenta un nivel de precios $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$. Luego, en función de los parámetros $a_1, ..., a_n, p_1, ..., p_n$ e I, analice si el conjunto es no vacío, compacto y/o convexo.

Ejercicio 24. *(Mas-Colell et al. 1995).* Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ una tecnología. Diremos que la tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes si: $\forall\ \mathbf{y} \in Y,\ \alpha\mathbf{y} \in Y,\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$. Por otro lado, diremos que la tecnología es aditiva si dados $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$, $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. Pruebe que una tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes y es aditiva si y solamente si es un cono convexo.[1]

[1] Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice un *cono convexo* si satisface:

1. (*Cerrado bajo combinaciones lineales positivas*)

$$x, y \in C,\ \lambda, \mu \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in C.$$

2. Equivalentemente: C es convexo y además

$$x \in C,\ \alpha \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha x \in C.$$

Ejercicio 25. *(Mas-Colell et al. 1995).* Se dice que una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta la propiedad de libre disposición si dados $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}' \in Y$. Demuestre que si una tecnología es cerrada (es decir, Y es un conjunto cerrado), convexa y tal que $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, entonces cumple la propiedad de libre disposición.

Ejercicio 26. Considere una relación de preferencia continua $\succeq$ sobre $X = \mathbb{R}^L_+$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ respectivamente). Pruebe que

- $\succeq$ es homotética si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ que es homogénea de grado uno: $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.
- $\succeq$ es cuasi-lineal con respecto al primer bien si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ de la forma
$$u(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \phi(x_2, \cdots, x_L).$$