Solucionario del Examen Parcial

Matemáticas para Economistas

PUCP – Semestre 2025-2

Problema 1

Sea la relación de preferencias en $\mathbb{R}^2_{++}$ dada por

$$(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2) \iff \tfrac{1}{3}\ln x_1 + \tfrac{2}{3}\ln y_1 \;\geq\; \tfrac{1}{3}\ln x_2 + \tfrac{2}{3}\ln y_2.$$

1.1) **Comparación entre $A = (2, 3)$ y $B = (4, 1)$.**
Una función de utilidad conveniente (ver 1.3) es $u(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$. Evaluando:

$$u(A) = 2^{1/3}\,3^{2/3} \approx 1.26 \times 2.08 \approx 2.62, \qquad u(B) = 4^{1/3} \cdot 1^{2/3} = 4^{1/3} \approx 1.587.$$

Luego $u(A) > u(B)$, por lo que $A \succ B$.

1.2) **Monotonía.**
Para $x, y > 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} > 0.$$

Por tanto, la relación es *estrictamente monótona*: aumentar cualquiera de los bienes (manteniendo el otro fijo) incrementa la utilidad.

1.3) **Representación por $u(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$.**
La relación dada por la suma ponderada de logaritmos

$$v(x, y) = \tfrac{1}{3}\ln x + \tfrac{2}{3}\ln y$$

se preserva por transformaciones crecientes. Note que

$$u(x, y) = \exp\big(v(x, y)\big) = \exp\Big(\tfrac{1}{3}\ln x + \tfrac{2}{3}\ln y\Big) = x^{1/3}y^{2/3}.$$

Como $\exp(\cdot)$ es estrictamente creciente, u representa exactamente $\succeq$.

1.4) **Curva de indiferencia para $u_0 = 1$.**
Resolver $x^{1/3}y^{2/3} = 1$. Elevando al cubo: $xy^2 = 1$. Entonces

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0}$$

es la curva de indiferencia de nivel 1 (decreciente y convexa hacia el origen).

1.5) **Dos canastas con la misma utilidad que $(1, 1)$.**
$u(1, 1) = 1$. Cualquier par (x, y) con $xy^2 = 1$ sirve. Por ejemplo,

$$A = (4, \tfrac{1}{2}) \quad \text{y} \quad B = (\tfrac{1}{4}, 2),$$

pues $4 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 = 1$ y $(\tfrac{1}{4}) \cdot 2^2 = 1$.

Problema 2

Considere $u(x,y) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2.1) **No monotonía.**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - y.$$

Si $x > 1$ (resp. $y > 1$), entonces $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$). Es decir, aumentar x (o y) por encima de 1 reduce utilidad. Por tanto, $\succeq$ no es monótona.

2.2) **Concavidad.**

El Hessiano es $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, negativo definido. Luego u es *estrictamente cóncava* (y por ende cuasicóncava).

2.3) **Curvas de indiferencia.**
Para un nivel $c \in \mathbb{R}$:

$$x + y - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = c \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2(1-c).$$

Son circunferencias centradas en $(1,1)$ con radio $\sqrt{2(1-c)}$, bien definidas para $c \leq 1$. El valor máximo de u es 1 y ocurre en $(1,1)$.

2.4) **Por qué $P = (1,1)$ maximiza u en $\mathbb{R}^2$.**
Como u es estrictamente cóncava, cualquier punto crítico es el *único* máximo global. La condición de primer orden $\nabla u = (1-x, 1-y) = (0,0)$ implica $x = 1$, $y = 1$. Así, $(1,1)$ es el único máximo de u y $u(1,1) = 1$.

Problema 3

Misma utilidad $u(x,y) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, con precios $p_x = p_y = 1$ e ingreso $I > 0$. El conjunto presupuestario es $\{(x,y) : x, y \geq 0,\ x + y \leq I\}$ (permitiendo ahorrar).

3.1) **Caso $I \geq 2$.**
El óptimo no restringido de u es $(1,1)$ (Problema 2). Si $I \geq 2$, entonces $(1,1)$ es factible. Dado que u es estrictamente cóncava, el óptimo con presupuesto es único y coincide con el no restringido:

$$\boxed{x^* = 1, \quad y^* = 1, \quad \text{gasto} = 2 \leq I\,.}$$

Obsérvese que *no* se agota necesariamente el presupuesto, pues las preferencias no son monótonas.

3.2) **Caso $I < 2$.**
El punto $(1,1)$ ya no es factible. Por concavidad estricta, el óptimo sobre el polígono presupuestario es único y ocurre con la restricción $x + y = I$ activa (de lo contrario podríamos aumentar ambos hacia $(1,1)$ y mejorar u mientras haya holgura). Con Lagrange:

$$\mathcal{L} = x + y - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda\,(I - x - y).$$

$$\partial_x \mathcal{L} = 1 - x - \lambda = 0, \quad \partial_y \mathcal{L} = 1 - y - \lambda = 0, \quad x + y = I.$$

De las dos primeras, $x = 1 - \lambda$ y $y = 1 - \lambda$. Sustituyendo: $2(1-\lambda) = I \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{I}{2}$, y por tanto

$$\boxed{x^* = \frac{I}{2}, \quad y^* = \frac{I}{2}\,, \quad (I < 2).}$$

Aquí el consumidor gasta todo el ingreso ($x^* + y^* = I$).

Problema 4

Considérese la EDO autónoma $x' = G(x)$, con $G \in C^1$ y equilibrios $x_1^* = 0$, $x_2^* = -3$, $x_3^* = 2$.

4.1) Estabilidad de los equilibrios

Si un equilibrio es *simple* ($G'(x^*) \neq 0$), la linealización $x' \approx G'(x^*)(x - x^*)$ determina:

$$G'(x^*) < 0 \;\Rightarrow\; \text{estable asintóticamente}, \qquad G'(x^*) > 0 \;\Rightarrow\; \text{inestable}.$$

Sin información adicional sobre los signos de G en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$, hay dos configuraciones alternantes posibles (para raíces simples):

- **Patrón A (por ejemplo $G(x) = (x + 3)\, x\, (x - 2)$):** -3 inestable, 0 estable, 2 inestable.
- **Patrón B (signo opuesto, $G(x) = -\,(x+3)\, x\, (x-2)$):** -3 estable, 0 inestable, 2 estable.

En ambos casos, la estabilidad *alterna* al cruzar raíces simples de una EDO autónoma unidimensional.

4.2) Trayectorias en el plano x–t cerca de cada equilibrio

Denote $\delta(t) = x(t) - x^*$. La linealización da $\delta'(t) \approx G'(x^*)\, \delta(t)$, con solución local $\delta(t) \approx \delta(0)\, e^{G'(x^*)t}$.

a) $x_0 > x_3^* = 2$ cercano a 2: si 2 es *inestable* (Patrón A), $G'(2) > 0$ y δ crece $\Rightarrow$ $x(t)$ se aleja de 2 hacia valores mayores. Si 2 es *estable* (Patrón B), $G'(2) < 0$ y $x(t) \to 2^+$.

b) $x_0 < 2$ cercano a 2: análogo; en Patrón A se aleja hacia la izquierda; en Patrón B converge a 2 por la izquierda.

c) $x_0 > 0$ cercano a 0: en Patrón A, 0 es estable $\Rightarrow$ $x(t) \to 0^+$; en Patrón B, inestable $\Rightarrow$ se aleja hacia la derecha.

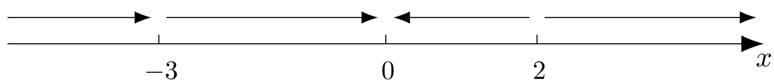
d) $x_0 < 0$ cercano a 0: en Patrón A, $x(t) \to 0^-$; en Patrón B, se aleja hacia la izquierda.

e) $x_0 > -3$ cercano a -3: en Patrón A (inestable), se aleja hacia la derecha; en Patrón B (estable), converge a -3 por la derecha.

f) $x_0 < -3$ cercano a -3: en Patrón A, se aleja hacia la izquierda; en Patrón B, converge a -3 por la izquierda.

Fase unidimensional (ilustrativo).

Patrón A (ej. $G = (x + 3)x(x - 2)$)



(El Patrón B invierte las flechas.)