Pontificia Universidad Católica del Peru

Teoría de Juegos (1ECO43)

Draft solucionario listas de ejercicios

12 de mayo de 2025

Alumno: Marcelo Gallardo
Profesor: César Martinelli

Ejercicio 1

Dilema del prisionero. En clase estudiamos el siguiente juego, y lo llamamos *dilema del prisionero*:

		Jugador 2	
		No confesar	Confesar
Jugador 1	No confesar	(3, 3)	(0, 4)
	Confesar	(4, 0)	(1, 1)

Describa esta situación formalmente como un juego estratégico, especificando el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias puras de cada jugador y la función de pagos.

Solución: Recordemos que un juego estratégico consiste en un conjunto de jugadores N, conjunto de acciones $\{A_i\}_{i\in N}$ (en este caso, coincide con las estrategias puras[1] y funciones de pagos $\{u_i\}_{i\in N}$ (que representan preferencias $\succeq_i$ de los individuos sobre $\bigotimes_{i\in N} A_i)$[2]. Así pues, en el caso del dilema del prisionero, $N = \{1,2\}$, para cada $i \in \{1,2\}$, el espacio de estrategias puras es $A_i = \{C, NC\}$, donde C es *Confesar* y NC *No confesar*, y finalmente, las funciones de pagos $u_i : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ tienen regla de correspondencia

$$u_1(C,C) = 1,\ u_1(C,NC) = 4,\ u_1(NC,C) = 0,\ u_1(NC,NC) = 3. \tag{1}$$

y

$$u_2(C,C) = 1,\ u_2(C,NC) = 0,\ u_2(NC,C) = 4,\ u_2(NC,NC) = 3. \tag{2}$$

Nota: La notación en (1) y (2) es $u_i(a_1,a_2)$, (Osborne and Rubinstein, 1994).

[1]Para el tipo de juego que estamos considerando, son indistinguibles. Sin embargo, las estrategias son planes completos de contingencia (Mas-Colell et al., 1995). Por ejemplo, en un juego con representación extensiva, una acción es lo que se juega en cada nodo, pero una estrategia pura es un plan completo de contingencia: dice que acción tomar en cada nodo donde el jugador debe actuar.

[2]Eventualmente, se puede definir $g : A \to C$ con $A = \bigotimes_{i\in} A_i$, y $\succeq_i$ sobre C, espacio de consecuencia. Por ejemplo, en el caso de los oligopolios, las acciones corresponden a los precios, pero los pagos corresponden a los beneficios, y las preferencias están definidas sobre estos.

Ejercicio 2

Estrategia estrictamente dominante. Una estrategia es *estrictamente dominante* para un jugador si los pagos que induce esta estrategia son estrictamente mejores para el jugador que los de todas las demás estrategias de las que dispone, para cada posible perfil de estrategias que adopten los demás jugadores. Defina formalmente esta propiedad y explique por qué se cumple para la estrategia de *confesar* en la situación arriba. Explique por qué, si una estrategia es estrictamente dominante, es la única estrategia que un jugador puede adoptar en un equilibrio de Nash.

Solución: De acuerdo con el enunciado del ejercicio, y usando la notación del ejercicio anterior, dado un jugador $i \in N$, una estrategia (pura) a_i^d es estrictamente dominante (para i) si

$$u_i(a_i^d, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i}),\ \forall\, a_i \in A_i - \{a_i^d\},\ \forall\, a_{-i} \in A_{-i} = \bigotimes_{j \neq i} A_j. \tag{3}$$

Luego, de acuerdo con (3), la estrategia *confesar* del ejercicio 1 es una estrategia estrictamente dominante para cada jugador. En efecto,

$$\begin{aligned} u_1(C,C) &= 1 > u_1(NC,C) = 0 \\ u_1(C,NC) &= 4 > u_1(NC,NC) = 3 \\ u_2(C,C) &= 1 > u_2(C,NC) = 0 \\ u_2(NC,C) &= 4 > u_2(NC,NC) = 3. \end{aligned}$$

O sea, para $i \in \{1,2\}$, *confesar* da mayores pagos que *no confesar* para cualquier acción que escoja $j \neq i$. Finalmente, veamos que si una estrategia es estrictamente dominante para un jugador, esta es la única estrategia que adopta el jugador en un equilibrio de Nash (EN). Denotemos por a_i^d dicha estrategia estrictamente dominante, y recordemos que un perfil de estrategias $a^* \in A$ es un EN si para todo $i \in N$:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*),\ \forall\, a_i \in A_i. \tag{4}$$

Ciertamente, si reemplazamos con a_i^d en (4), se cumple la desigualdad (basta reemplazar en (3) a_{-i} por a_{-i}^*). Ahora bien, queda determinar la unicidad, es decir, que ninguna otra estrategia $a_i \neq a_i^d$ puede ser jugada en un EN. Supongamos por contradicción que sí es el caso: existe $\tilde{a}_i \neq a_i^d$ y $a_{-i}^* \in A_{-i}$ tal que $(\tilde{a}_i, a_{-i}^*)$ es un EN. Entonces, en particular

$$u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*),\ \forall\, a_i \in A_i. \tag{5}$$

Sin embargo, reemplazando del lado derecho de (5) a_i por a_i^d, se contradice la definición de estrategia estrictamente dominante (3).

Observación. Intuitivamente, en un EN a^*, si el jugador i tiene una estrategia estrictamente dominante a_i^d, entonces debe jugarla: a_i^d es su mejor respuesta ante cualquier a_{-i}, en particular a_{-i}^*. Finalmente, la desigualdad estricta en (3) garantiza *la unicidad*.

Ejercicio 3

Estrategia débilmente dominante. Una estrategia es débilmente dominante para un jugador si los pagos que induce esta estrategia no son peores para el jugador que los de todas las demás estrategias de las que dispone, para cada posible perfil de estrategias que adopten los demás jugadores, y existe al menos un perfil de estrategias de los demás jugadores para los que esta estrategia es estrictamente mejor. Defina formalmente esta propiedad. Explique por qué, si cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante, entonces que cada jugador juegue su estrategia débilmente dominante es un equilibrio de Nash.

Solución: Formalmente, siguiendo el enunciado, una estrategia pura $a_i^{wd} \in A_i$ es *débilmente dominante* para el jugador $i \in N$ si satisface:

$$u_i(a_i^{wd}, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i, \ \forall a_{-i} \in A_{-i}, \tag{6}$$

y existe al menos un perfil $a'_{-i} \in A_{-i}$ tal que:

$$\underbrace{u_i(a_i^{wd}, a'_{-i}) > u_i(a_i, a'_{-i}), \quad \forall \ a_i \in A_i \setminus \{a_i^d\}.}_{\text{Estrictamente mejor para } a'_{-i}.} \tag{7}$$

Observación. En Mas-Colell et al. (1995), se dice que $a_i \in A_i$ es débilmente dominada en un juego $\Gamma = [N, \{A_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ si existe $a'_i \in A_i$ tal que para todo $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(a'_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$, con desigualdad estricta para algún $a_{-i} \in A_{-i}$. Luego, una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a cualquier otra estrategia $a_i \in A_i$. En ese sentido, (7) pasaría a: $\forall \ a_i \in A_i$, $\exists \ a_{-i} \in A_{-i}$ tal que $u_i(a_i^{wd}, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$.

Ahora volvamos al ejercicio y supongamos que cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante. Veamos que $a^{wd} = (a_i^{wd})_{i \in N} \in A$ es un EN. Como a_i^{wd} es débilmente dominante para i, en particular, de (6), haciendo $a_{-i} = a_{-i}^{wd}$:

$$u_i(a_i^{wd}, a_{-i}^{wd}) \geq u_i(a_i, a_{-i}^{wd}), \ \forall \ a_i \in A_i. \tag{8}$$

Como i es arbitrario, (8) se cumple para todo i. Luego, (8) es justamente (4) para $a^* = a^{wd}$.

Observación. Intuitivamente, si se juega a^{wd}, ningún jugador tiene interés a desviarse. Suponer que sí implica que existe $a_i \in A_i$ tal que $u_i(a_i, a_{-i}^{wd}) > u_i(a^{wd})$, lo cual contradice (6) reemplazando $a_{-i} = a_{-i}^{wd}$.

Ejercicio 4

Mas sobre estrategias débilmente dominantes. Provea un ejemplo con dos jugadores y dos acciones cada uno en el que cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante, y sin embargo existe un equilibrio de Nash en el que alguno de ellos no juega esa estrategia débilmente dominante.

Solución: Consideremos el siguiente juego:

		Jugador 2	
		α	β
Jugador 1	θ	(1, 1)	(1, 1)
	γ	(1, 1)	(5, 5)

Lo primero que hay que notar es que para el jugador 1, γ domina débilmente a θ (como solo son 2 estrategias, γ es débilmente dominante) y, análogamente, β es débilmente dominante para el jugador 2. Esto se deduce rápidamente de la definición que se dio en el ejercicio 3: Los pagos para el jugador 1 son mayores o iguales si escoge γ: 1 vs 1 y 5 vs 1, y al menos para un perfil de estrategias del otro jugador (en este caso β), los pagos son estrictamente mayores $5 > 1$. Análogo para el jugador 2. Ahora bien, afirmamos que tanto (γ, β) como (θ, α) son EN en estrategias puras. En (γ, β), los pagos son para cada jugador 5. El jugador 1 no tiene incentivos de jugar θ pues su pago se reduciría a $u_1(\theta, \beta) = 1 < 5$. Análogamente, el jugador 2 no tiene incentivos de cambiar a α pues $u_2(\gamma, \alpha) = 1 < 5$. Por otro lado (θ, α) también satisface (4). En efecto,

$$u_1(\theta, \alpha) = 1 \geq 1 = u_1(\gamma, \alpha)$$

y

$$u_1(\theta, \alpha) = 1 \geq 1 = u_1(\theta, \beta).$$

Por lo tanto, (θ, α) es un EN en el que ninguno juega su estrategia débilmente dominante, cumpliéndose así lo pedido en el enunciado (pues en particular uno de ellos no juega su estrategia débilmente dominante).

Ejercicio 5

¿Otro dilema del prisionero? Recuerde que dijimos que un jugador tiene las mismas preferencias sobre loterías si su función de pagos sufre una transformación positiva afín, es decir, si su función de pagos es $v = \alpha + \beta u$, donde u es la función original, α es cualquier número real, y β cualquier número real positivo. Suponga que Adán y Eva tienen acceso a un bolso con dinero. Cada uno de ellos puede tomar diez soles del bolso para sí mismo, o tomar veinte soles para dárselos al otro. Escriba una tabla como la de arriba para este juego, describa esta situación formalmente como juego estratégico, y demuestre que los jugadores tienen las mismas preferencias sobre loterías (y por lo tanto juegan el mismo juego) que en el ejercicio anterior.

Solución: Tenemos dos jugadores $N = \{1, 2\}$, Adán y Eva. Luego, sus acciones (estrategias puras) son *Tomar 10 soles* (T10) o *Tomar 20 soles* (T20): $A_i = \{T10, T20\}$

- Si los dos toman 10 soles, cada uno se queda con 10 soles: $u_i(T10, T10) = 10$.
- Si uno toma 20 soles y el otro 10, el que tomó los 20 soles se queda con 0 y el que tomó 10 se queda con 30: $u_1(T10, T20) = 30$, $u_1(T20, T10) = 0$, análogo para $u_2(\cdot, \cdot)$.
- Si ambos toman 20 soles, los dos se quedan con 20 soles: $u_1(T20, T20) = u_2(T20, T20) = 20$.

El juego queda representado entonces de la siguiente manera (tabla):

		Jugador 2	
		T20	T10
Jugador 1	T20	(20, 20)	(0, 30)
	T10	(30, 0)	(10, 10)

Para concluir, necesitamos demostrar que los jugadores juegan el mismo juego que en el dilema del prisionero. Recordemos algunos puntos clave:

- Si $\succeq$ una relación de preferencia no trivial sobre X y $U, V : X \to \mathbb{R}$ son dos funciones lineales que representan a $\succeq$, entonces V es una transformación afín positiva de U (Mas-Colell et al., 1995).
- Cuando se juegan estrategias mixtas, se considera $u_i : \bigotimes_{j \in N} \Delta(A_i) \to \mathbb{R}$ con

$$u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) = \sum_{a \in A} \left[\prod_{j \in N} \alpha_j(s_j) \right] u_i(a_1, \cdots, a_n). \tag{9}$$

- Existen distintos conceptos de equivalencia entre juegos (Allison et al., 2022; Hoshi and Isaac, 2024).

- En este problema (y en el curso), decimos que, dado un juego $\Gamma_1 = [N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i(\cdot)\}]$ se juega el mismo juego que en $\Gamma_2 = [N, \{A_i\}_{i\in N}, \{v_i(\cdot)\}]$ cuando

$$v_i(\cdot) = \beta_i u_i(\cdot) + \alpha_i,\ \beta_i > 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i \in N.$$

- En el dilema del prisionero, los valores numéricos no importan:

		Jugador 2	
		No confesar	Confesar
Jugador 1	No confesar	(a, a)	(b, c)
	Confesar	(c, b)	(d, d)

  con tal de que $c > a > d > b$ y (para el caso iterado) $a > (b + c)/2$, (de Lima, 2022). Se pueden imponer otras condiciones para que cierto perfil sea socialmente óptimo (ver ejercicio 9).

Volvamos al problema. Para simplificar los cálculos, dividamos primero todos los pagos del juego de Adán y Eva por 10 (como lo tiene inicialmente Binmore (2007)):

		Jugador 2	
		T20	T10
Jugador 1	T20	(2, 2)	(0, 3)
	T10	(3, 0)	(1, 1)

Supongamos que existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ tales que $2\beta + \alpha = 3$, $3\beta + \alpha = 4$, $\beta + \alpha = 1$ y $\beta(0) + \alpha = 0$. O sea, que podamos transformar los pagos de alguno de los jugadores en los pagos asociados del DP el ejercicio 1. Ciertamente identificamos (T10, T10) con (C, C) y (T20, T20) con (NC, NC). La identificación no puede ser otra por un argumento de monotonía. Es fácil notar que no existen dichos α, β.[3] Por lo tanto, si usamos (9) sobre todas las eventuales loterías $(p, 1-p) \in \Delta(\{T10, T20\})$, $(q, 1-q) \in \Delta(\{T10, T20\})$, según el teorema de transformaciones lineales afines para la utilidad esperada, podemos encontrar una donde la relación de preferencias no se mantenga. No obstante, teniendo en cuenta (de Lima, 2022) y las preferencias sobre las estrategias puras, sí se cumple que los juegos son equivalentes. En efecto, $a = 20$, $b = 0$, $c = 30$ y $d = 10$, y las preferencias de cada jugador sobre $\{T10, T20\}^2$ son las mismas que sobre $\{C, NC\}^2$. En particular, el único equilibrio en el juego de Adán y Eva es (T10, T10), siendo T10 una estrategia estrictamente dominante para los jugadores. Como (T10, T10) es estrictamente dominante, no es relevante analizar el caso de estrategias mixtas (lo mejor es siempre jugar con probabilidad 1 T10) y se cumple la imparidad en la cardinalidad de equilibrios de Nash (Wilson, 1971).

Observación. Si en el juego del ejercicio 1 los pagos fueran $1 \to 0$ y $0 \to -1$, podríamos usar $\beta = 1/10$ y $\alpha = -1$. Luego, la equivalencia en cuestión que observamos es una biyección del juego en el siguiente sentido: (i) Dos jugadores, (ii) dos estrategias, donde una estrictamente dominada, (iii) pagos equivalentes en estrategias puras. De tener $T_{\alpha,\beta}(\cdot)$, en lotería i.e. estrategias mixtas $\alpha_i \in \Delta(A_i)$.

[3] $2(\beta + \alpha) = 2$, por lo que $2(\beta + \alpha) - (2\beta + \alpha) = \alpha = 2 - 3 = -1$, pero $\alpha = 0$ de la cuarta ecuación.

Ejercicio 6

La cacería del ciervo. El juego descrito abajo procede de un pasaje famoso del "Discurso sobre la Desigualdad" de Jean-Jacques Rousseau, en el que discute el tema de la cooperación social. El juego describe una sociedad en la que hay un número dado de cazadores, cada uno de los cuales debe decidir si cazar un ciervo, lo que solo es exitoso si todos los cazadores cooperan, o cazar un conejo, lo que es exitoso independientemente de lo que hagan los demás jugadores. Cazar el ciervo exitosamente es mejor para cada jugador que cazar un conejo exitosamente. Para dos jugadores, los pagos son los siguientes:

		Cazador 2	
		Ciervo	*Conejo*
Cazador 1	*Ciervo*	(3, 3)	(0, 1)
	Conejo	(1, 0)	(1, 1)

Encuentre todos los equilibrios de Nash, incluyendo en estrategias mixtas.

Solución: Empecemos por los EN en estrategias puras. Ciertamente, (Conejo, Conejo) y (Ciervo, Ciervo) son EN. En efecto, Si nos situamos en (Ciervo, Ciervo), el pago del jugador i en desviarse a Conejo cae a 1. En caso jueguen (Conejo, Conejo), el desvío a Ciervo hace que la utilidad pase de 1 a 0. Ahora bien, tanto (Ciervo, Conejo) como (Conejo, Ciervo) no son EN. En efecto, en (Ciervo, Conejo), el jugador 1 tiene incentivos para cambiarse a Conejo pues su utilidad pasa de 0 a 1. Análogamente, en (Conejo, Ciervo), el jugador 2 mejoraría jugando Conejo y el jugador 1 mejoraría jugando Ciervo).

Ahora estudiemos el caso de estrategias mixtas. Sea p la probabilidad con la que el Cazador 1 juego Ciervo y sea q la probabilidad con la que el Cazador 2 juega Ciervo. El pago esperado del Cazador 1 si juega Ciervo es $3q + 0(1-q)$, mientras que su pago esperado si juega Conejo es $q + (1-q)$. Análogamente, el pago esperado del Cazador 2 si juega Ciervo es $3p + 0(1-p)$, y, si decide jugar Conejo, $p + (1-p)$.

- Si $p = q = 1/3$, entonces estamos en un EN pues los pagos esperados se igualan y no hay incentivos al desvío.
- Si $p > 1/3$, entonces el Cazador 2 jugaría $q = 1$, pero entonces, el Cazador 1 jugaría $p = 1$: Volvemos al EN en estrategias puras (Ciervo, Ciervo).
- Si $p < 1/3$, entonces el Cazado 1 jugaría $q = 0$, o sea Conejo, y, en dicho caso, el Cazador 1 jugaría $p = 0$: Volvemos al EN en estrategias puras (Conejo, Conejo).
- Situación análoga si movemos $q \neq 1/3$.

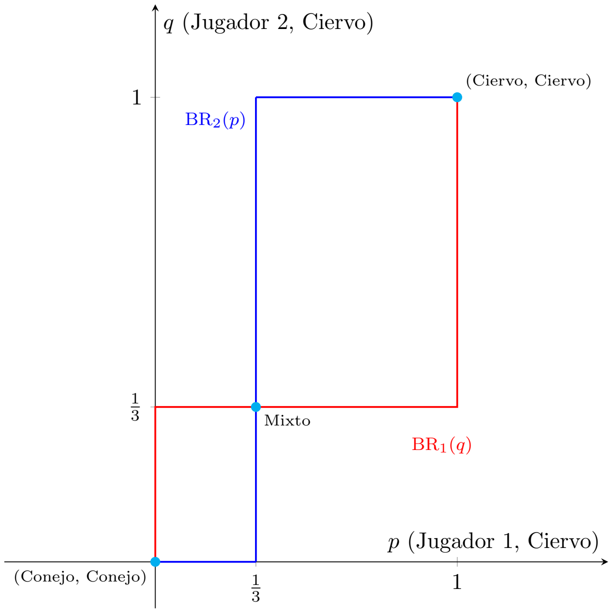

Figura 1: Mejores respuestas.

Una forma fácil de obtener la figura 1, es usar la expresión 9. La utilidad esperada del Cazador 1 del perfil mixto $((p, 1-p), (q, 1-q))$ es

$$1 + p(3q - 1). \tag{10}$$

Análogamente, la del Cazador 2 es

$$1 + q(3p - 1). \tag{11}$$

Por lo tanto, de (10) se deduce que si $q > 1/3$, el Cazador 1 maximiza su utilidad haciendo $p = 1$. Si $q = 1/3$, da igual el p que escoja, y si $q < 1/3$, le conviene escoger $p = 0$. La situación es simétrica para el Cazador 2. Así, hemos encontrado los 3 equilibrios de Nash del juego, cantidad impar como adelanta Wilson (1971).

Ejercicio 7

Óptimos de Pareto. En clase definimos un óptimo de Pareto[a] en un juego estratégico como un perfil de estrategias tal que no existe otro perfil de estrategias para el que los pagos de ningún jugador son peores y en el que los pagos de al menos un jugador son estrictamente mejores. ¿Qué perfiles de estrategias puras son óptimos en el sentido de Pareto en el dilema del prisionero y en la cacería del ciervo?

[a] Así llamados en honor a Vilfredo Pareto, economista y sociólogo italiano.

Solución: El concepto de Óptimo de Pareto (OP) es posiblemente de los más importantes en economía. Aparece en diversos contextos, como por ejemplo, en equilibrio general (Echenique, 2015). En nuestro contexto, definimos un OP como $\bar{a} \in A$ tal que

$$\nexists\, \tilde{a} \in A : u_i(\tilde{a}) \geq u_i(\bar{a}) \ \wedge\ \exists\, i_0 \in N :\ u_{i_0}(\tilde{a}) > u_{i_0}(\bar{a}). \tag{12}$$

Basado en esta definición (12), en el caso del DP, tanto (C, C), (NC, C) como (C, NC) son OP. El único que no lo es, es (C, C). En efecto, (NC, NC) domina en el sentido de Pareto a (C, C): ambos jugadores mejoran estrictamente (su utilidad pasa de 1 a 3). Lo curioso es que (C, NC) y (NC, C) también lo son. Esto pues, para el jugador 2, si se juega (NC, C), su pago es el más alto posible en el juego (4). Por lo tanto, cualquier otro perfil implica que su utilidad sea menor.

En cuanto al juego de la cacería del ciervo[4], únicamente (Ciervo, Ciervo) constituye un óptimo de Pareto. En efecto, todos los demás perfiles de estrategias quedan dominados por (Ciervo, Ciervo).

Lo interesante de estos ejemplos, es que se puede ver rápidamente que un EN no tiene porqué ser un OP, o vice-versa. Esto motiva introducir refinamientos del concepto del EN (Selten, 1975; Myerson, 1978).

[4] En la cacería del ciervo, hay dos equilibrios de Nash puros. Uno de ellos, (Ciervo, Ciervo), es óptimo de Pareto y el más deseado, ya que brinda los mayores pagos a ambos jugadores (dominancia en pagos), pero es riesgoso si uno se desvía: el pago cae a 0. El equilibrio (Conejo, Conejo) es menos arriesgado y se considera dominante en riesgo, ya que es la mejor respuesta ante la incertidumbre sobre la acción del otro.

Ejercicio 8

Una subasta. Se va a usar una subasta de sobre cerrado para vender una colección de diez monedas al mejor postor al precio que él o ella someta en un sobre. Los únicos postores son Alicia y Bob, quienes valoran cada moneda en 10 soles. Si ambos hacen la misma oferta, cada uno paga la mitad de su oferta y recibe la mitad de las monedas. Suponiendo que sólo pueden ofertar 97 o 98 soles, muestra que están jugando un Dilema del Prisionero en el que la estrategia estrictamente dominante es hacer la oferta más alta. Muestra que lo mismo ocurre si las únicas ofertas posibles son 99.97 y 99.98 soles.

Solución: En este problema, los jugadores son $N = \{1, 2\} = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ y las acciones disponibles $\{\text{Ofertar 97}, \text{Ofertar 98}\} \doteq \{97, 98\}$. Para determinar los pagos:

- Si se juega (97, 97), ambos reciben $50 - (97/2) = 1{,}5$.
- Si se juega (98, 98), ambos reciben $50 - 98/2 = 1$.[5]
- Si se juega (97, 98), el jugador 1 recibe 0 y el jugador 2 recibe $100 - 98 = 2$.
- Análogamente, si se juega $(98, 97)$, el jugador 1 recibe 2 y el jugador 2 recibe 0.

De este modo, podemos expresar el juego como sigue:

		Jugador 2	
		97	98
Jugador 1	97	(1.5, 1.5)	(0, 2)
	98	(2, 0)	(1, 1)

De existir, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal afín, con pendiente estrictamente positiva, tal que $v_i^{DP}(\cdot) = T(u_i^{\text{subasta}}(\cdot))$, nuevamente, por monotonía, deberíamos tener la identificación $2 \to 4$, $1{,}5 \to 3$, $0 \to 0$ y $1 \to 1$. Formalmente:

$$\begin{aligned} 2\beta + \alpha &= 4 \\ 1{,}5\beta + \alpha &= 3 \\ \alpha &= 0 \\ \beta + \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Se sigue de las dos últimas ecuaciones que $\beta = 1$ y $\alpha = 0$, lo cual es inconsistente con las dos primeras. No obstante, bajo los criterios establecidos en el ejercicio 5, sí se cumple la relación que caracteriza los DP (de Lima, 2022)

$$\underbrace{2 > 1{,}5 > 1 > 0}_{c>a>d>b}.$$

[5]Como cada uno valora cada moneda en 10 soles, el valor de la mitad de las monedas (5) es 50. Por otro lado, recibir todas genera una valoración positiva de 100.

Esta estructura de los pagos hace que, así como confesar, en el juego descrito 98 sea una estrategia estrictamente dominante (Dufwenberg and Stegeman, 2002). Por lo tanto, el único EN es (98, 98). Finalmente, si se juega con la versión en la que las únicas ofertas posibles son 99.97 y 99.8, siguiendo la misma lógica, la tabla que representa al juego en su forma normal (jugadores, acciones y pagos) es:

		Jugador 2	
		99.97	99.98
Jugador 1	99.97	(0.015, 0.015)	(0, 0.02)
	99.98	(0.02, 0)	(0.01, 0.01)

En este caso, el juego si resulta ser equivalente según la definición del enunciado del ejercicio 5: los nuevos pagos resultan de aplicar una transformación lineal afín con pendiente positiva a los pagos originales. La transformación en cuestión es tal que $\alpha = 0$ y $\beta = 1/100$. O sea, se dividen los pagos del juego original por 100. Por lo tanto, de acuerdo con la teoría de la utilidad esperada, *se sigue jugando un DP*.

Ejercicio 9

Provisión voluntaria de bienes públicos. Los inquilinos que barren los pasillos en edificios de apartamentos sin conserje están proporcionando un bien público. Formula una versión del Dilema del Prisionero basada en esta historia.

Solución: Empecemos con el caso sencillo $|N| = 2$, es decir, supongamos que solo hay dos inquilinos. Digamos que si los dos barren, la utilidad que reciben es $\theta - c > 0$, donde c es el costo por barrer. Si solo uno barre, la utilidad es $\theta/2 - c$ y la del otro θ. Finalmente, si ninguno barre, la utilidad es 0. Si representamos el juego como una tabla:

		Jugador 2	
		Barrer	No barrer
Jugador 1	Barrer	$(\theta - c, \theta - c)$	$(\theta/2 - c, \theta/2)$
	No barrer	$(\theta/2, \theta/2 - c)$	(0, 0)

Si se impone que $c < \theta < 2c$, el juego descrito corresponde a un DP, donde:

$$\theta/2 > \theta - c > 0 > \theta/2 - c. \tag{13}$$

Interpretemos las condiciones en (13). Que el piso hay sido barrido por ambos genera un beneficio (limpieza) θ para cada individuo. Sin embargo, si solo uno barre, este beneficio es θ (s.p.d.g., rendimientos a escala constantes). Ahora bien, barrer incurre en un costo $c > 0$ que no cambia si es que barre más de una persona (hay que comprar la escoba, levantarse etc.). Si la persona no barre, ciertamente no hay costo. Finalmente, las desigualdades en (13) aseguran que NB sea una estrategia dominante, y por lo tanto (NB, NB) el único equilibrio de Nash. Si bien el juego es equivalente estratégicamente al DP, no estamos verificando si podemos transformar los pagos con una aplicación lineal afín y obtener los pagos de la tabla del ejercicio 1. Sin embargo, por ejemplo,

		Jugador 2	
		Barrer	No barrer
Jugador 1	Barrer	(2, 2)	(-1, 3)
	No barrer	(3, -1)	(0, 0)

también representa la situación ($\theta = 6$, $c = 4$), y sí resulta de una transformación lineal afín (restar 1 a los pagos de los 2 jugadores en al tabla del ejercicio 1).

Observación. En el contexto del Dilema del Prisionero (DP), siguiendo la notación habitual:

		Jugador 2	
		Colaborar	No colaborar
Jugador 1	Colaborar	(a, a)	(b, c)
	No colaborar	(c, b)	(d, d)

además de requerir que se cumplan las desigualdades características del dilema, a saber $c > a > d > b$, puede resultar conveniente suponer también que:

$$d < \frac{c + b}{2} < a. \tag{14}$$

La desigualdades en (14) implican que la colaboración es socialmente óptima (el mayor pago agregado), y la no colaboración mutua es el peor escenario. En nuestro modelo no contemplamos esto.

Ahora, abordemos el caso general $|N| \in \mathbb{N}$. Vamos a considerar (proponer) dos casos. Un caso es el que se estudia en (Carroll, 1988; Nishihara, 1997), donde las estrategias de cada jugador son Cooperar (Barrer) o No cooperar (No barrer). El otro caso es cuando podemos *regular* la intensidad de la cooperación: barrer con intensidad $x_i \in \mathbb{R}_+$. Si $x_i = 0$ no se barre. Este segundo enfoque viene del enfoque de la tragedia de los comunes (Lucier, 1980; Gibbons, 1992).

	Enfoque discreto	**Enfoque continuo**
Jugador	$N = \{1, \ldots, n\}$	$N = \{1, \ldots, n\}$
Estrategias	$\{C, NC\} \doteq \{B, NB\} \doteq \{C, D\}$	$A_i = \mathbb{R}_+, \ \forall\, i \in N$
Pagos	Sean $C_i(x)$ y $D_i(x)$ las utilidades del jugador i cuando coopera o no coopera, respectivamente, y $x \in \{1, \cdots, N-1\}$ jugadores (excluyendo a i) cooperan. Se requiere: (1) $C_i(x) = C_j(x)$ y $D_i(x) = D_j(x)$ (simetría), (2) $D_i(x) > C_j(x)$ (no cooperar dominante), (3) $C_i(n-1) > D_i(0)$ (cooperación universal es pareto superior), (4) $D_i(x)$ creciente en x (beneficio externo por cooperación ajena).	$\theta_i f\left(\sum_{j \in N} x_j\right) - g(x_i),$ donde g es creciente y convexa, f creciente y cóncava, y $\theta_i > 0$. Similar al problema de los comunes.

Cuadro 1: Caso con $n = |N| > 2$ jugadores.

Para el caso discreto, los trabajos de Carroll (1988); Nishihara (1997), y extensiones como Fudenberg and Maskin (1986); Szilagyi (2003) proveen excelentes insights. Para el caso continuo, en un EN, $x_i^* \in \operatorname{argmax}_{x_i} \left\{\theta_i f(x_{-i}^* + x_i) - g(x_i)\right\}$. Por ejemplo, para soluciones interiores, dada la concavidad $\left.[\theta_i f'(x_i + x_{-i}^*) - g'(x_i^*)]\right|_{x_i = x_i^*} = 0$. La existencia de un EN puede asegurarse si aseguramos la continuidad de f y g, y se restringimos $x_i \in [0, A_i]$, con $A_i > 0$.

Ejercicio 10

El "Chicken game". El "Chicken game" es un juego ilustrativo inspirado en la película de James Dean *Rebelde sin causa*, en la que dos adolescentes conducen autos hacia un acantilado para ver quién se acobarda primero. El mismo juego lo juegan conductores de combis que se aproximan en calles demasiado estrechas como para que ambos pasen sin que uno reduzca la velocidad. Explique por qué la tabla de pagos de la figura abajo ilustra ambas historias.

		Conductor 2	
		Frenar	Acelerar
Conductor 1	Frenar	(2, 2)	(0, 3)
	Acelerar	(3, 0)	(-1, -1)

Encierre en un círculo (para el jugador 1) o un cuadrado (para el jugador 2) los pagos que corresponden a las mejores respuestas. Explique por qué ninguno de los jugadores tiene una estrategia dominante. ¿Por qué *(frenar, acelerar)* y *(acelerar, frenar)* son equilibrios de Nash? ¿Cuáles son los resultados eficientes en el sentido de Pareto en este juego? Calcule el equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Solución: Lo que le brinda mayor satisfacción al conductor (o beneficio, si pensamos en que podrá conseguir más carreras) es acelerar y pasar primero, siempre y cuando no choque. En caso ambos aceleren, chocarán y el pago será el menor posible: -1. Si, en cambio, uno frena y el otro no, el que aceleró y pasó sin consecuencias obtendrá la mayor utilidad: 3. El que frenó y *perdió la carrera* tendrá una utilidad de 0, que es preferible a la de chocar (pues podría perder su auto, sufrir lesiones graves, etc.). Finalmente, si ambos frenan, ninguno *se queda picón*, pero tampoco ganaron, por lo que su pago es inferior a 3 pero superior a 0. Ciertamente, es mayor que -1, ya que el peor escenario es chocar. Ahora bien:

- Las mejores respuestas del Jugador 1 están marcadas con un ○ y las del Jugador 2 con un □.

		Jugador 2	
		Frenar	Acelerar
Jugador 1	Frenar	2, 2	0, $\boxed{3}$
	Acelerar	3, $\boxed{0}$	-1, -1

  Las mejores respuestas del Jugador 1 son: si el Jugador 2 frena, le conviene acelerar ($3 > 2$); si el Jugador 2 acelera, le conviene frenar ($0 > -1$). Las mejores respuestas del Jugador 2 son: si el Jugador 1 frena, le conviene acelerar ($3 > 2$); si el Jugador 1 acelera, le conviene frenar ($0 > -1$).

- Ninguno de los jugadores tiene una estrategia estrictamente dominante. Habría una fila o columna con dos cuadrados o dos círculos. Concretamente, para J1, Frenar no es estrictamente dominante pues, si el otro jugador frena, prefiere Acelerar. De manera similar, Acelerar no es estrictamente dominante pues, si el otro jugador acelera, es preferible para J1 frenar. La simetría remata el asunto.

- Los equilibrios de Nash corresponden a los puntos fijos de la correspondencia de mejores respuestas. Es decir, son combinaciones de estrategias en las que cada jugador elige una mejor respuesta a lo que hace el otro. En esta matriz, los perfiles $(\text{Acelerar}, \text{Frenar})$ y $(\text{Frenar}, \text{Acelerar})$ son equilibrios de Nash en estrategias puras: en ambos casos, ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente. Una manera sencilla de notarlo en la tabla es que hay un círculo y un cuadrado en la misma casilla.

- Para encontrar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, sea p la probabilidad con la que el Jugador 1 juega *Frenar*, y q la probabilidad con la que el Jugador 2 juega *Frenar*. Se busca el valor de p que haga indiferente al Jugador 2 entre frenar y acelerar, y viceversa.

  - Jugador 1:

$$\mathbb{E}[U_1(\text{Frenar})] = 2q + 0(1-q) = 2q$$
$$\mathbb{E}[U_1(\text{Acelerar})] = 3q + (-1)(1-q) = 3q - 1 + q = 4q - 1$$

  Igualando:

$$2q = 4q - 1 \quad \Rightarrow \quad 2q = 1 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

  - Jugador 2:

$$\mathbb{E}[U_2(\text{Frenar})] = 2p + 0(1-p) = 2p$$
$$\mathbb{E}[U_2(\text{Acelerar})] = 3p + (-1)(1-p) = 3p - 1 + p = 4p - 1$$

  Igualando:

$$2p = 4p - 1 \quad \Rightarrow \quad 2p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

  Por lo tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas se da cuando ambos jugadores aleatorizan con probabilidad $\frac{1}{2}$ entre frenar y acelerar. La figura 2 ilustra claramente que es el único equilibrio mixto. Nuevamente, tal y como anticipa Wilson (1971), el número de EN es impar.

Observación. A continuación otra configuración de pagos para el Chicken Game:

	F	**A**
F	$6,6$	$2,7$
A	$7,2$	$0,0$

Los EN en estrategias puras siguen siendo los mismos. Ahora bien, sea $(p, 1-p)$ la estrategia mixta del Jugador 1, y $(q, 1-q)$ la del Jugador 2. El Jugador 1 es indiferente entre F y A si:

$$6q + 2(1-q) = 7q \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

Análogamente, el Jugador 2 es indiferente entre F y A si:

$$6p + 2(1-p) = 7p \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

El equilibrio en estrategias mixtas es $(p,q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Estas probabilidades resultan de igualar los pagos esperados de las acciones. Así, si los pagos se modifican mediante funciones que no preservan relaciones afines crecientes, estas igualdades cambian, y con ellas el equilibrio mixto.

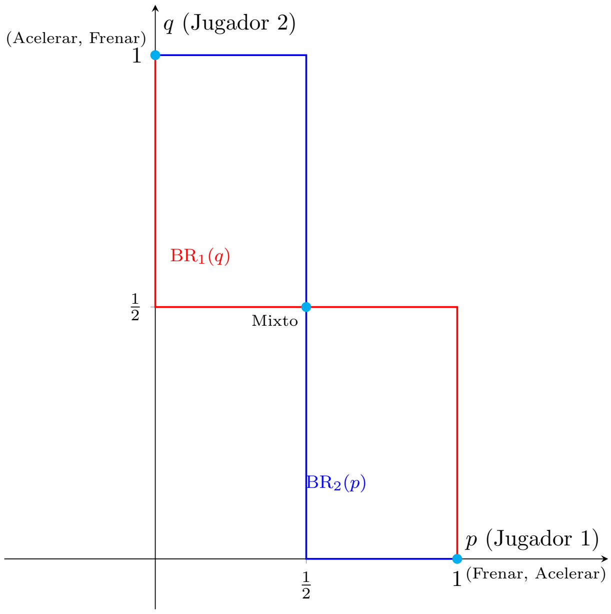

Figura 2: Mejores respuestas.

Ejercicio 11

El halcón y la paloma. El juego favorito de los biólogos evolutivos (si creemos a Binmore) es el Juego del Halcón y la Paloma. Dos aves de la misma especie compiten por un recurso escaso. Cada una puede comportarse de manera agresiva o pasiva. Las recompensas se miden en términos de la aptitud o *fitness* del ave—el número adicional de crías que tendrá en promedio como resultado de la forma en que se jugó el juego. Si un ave es agresiva y la otra pasiva, el ave agresiva se lleva todo el recurso. El ave agresiva entonces recibe una recompensa de $V > 0$, y el ave pasiva recibe 0. Si ambas aves son pasivas, el recurso se comparte y cada ave recibe una recompensa de $\frac{1}{2}V$. Si ambas aves son agresivas, hay una pelea, y ambas reciben una recompensa de W. Si $0 < W < \frac{1}{2}V$, muestre que el Juego del Halcón y la Paloma es un ejemplo del Dilema del Prisionero. Si el daño que probablemente reciba un ave en una pelea es suficientemente grande, entonces $W < 0$. Muestre que en ese caso el Juego del Halcón y la Paloma se reduce a una versión del juego Chicken.

Solución: Para el caso en que $0 < W < V/2 < V$, este juego comparte la misma estructura estratégica que el Dilema del Prisionero (DP): Dos jugadores con dos estrategias y con pagos resumidos en la siguiente tabla:

		Ave 2	
		Pasivo (P)	Agresivo (A)
Ave 1	Pasivo (P)	$(V/2, V/2)$	$(0, V)$
	Agresivo (A)	$(V, 0)$	(W, W)

En particular, bajo la condición dada, el juego es equivalente —por reescalamiento afín estrictamente creciente de utilidades— al siguiente DP[6]:

	NC	**C**
NC	$(3, 3)$	$(0, 6)$
C	$(6, 0)$	$(1, 1)$

En efecto, hacemos $V \to 6$ con una constante multiplicativa, luego, $V/2 = 3$ y $W \to 1$. En el juego de las aves, (A, A), así como (C, C) en el DP, es el único equilibrio de Nash. En efecto, cuando $0 < W < \frac{V}{2}$, se verifica:

- Si el ave oponente juega P, entonces jugar A provee una utilidad mayor a jugar P: $V > \frac{V}{2}$.
- Si el ave oponente juega A, entonces es mejor para el ave jugar A, pues $W > 0$.
- Por lo tanto, jugar A es una estrategia estrictamente dominante para los dos pájaros.

[6]Supóngase que las utilidades corresponden a $6-$ años en prisión: si ambos no confiesan (NC), reciben 3 años; si uno confiesa y el otro no, el que no confiesa recibe 6 años en prisión y el otro 0; si ambos confiesan, van 5 años a la cárcel.

Note que la condición $0 < W < V/2 < V$ cumple con lo discutido en los ejercicios 5 y 11, acerca de la condición sobre los pagos en un DP.

Ahora bien, si $W < 0$ —es decir, el daño de una pelea es suficientemente alto—, el perfil (A, A) deja de ser atractivo, vale la pena desviarse a un pago de 0. En este caso, la estructura cambia, y el juego se convierte en un ejemplo del Chicken Game. Los equilibrios en estrategias puras ahora son (A, P) y (P, A), pues:

- Si el Ave 2 juega P, la mejor respuesta de Jugador 1 es A (pues $V > V/2$).
- Si el Ave 2 juega A, la mejor respuesta de Jugador 1 es P (pues $0 > W$).
- Por simetría, concluimos.

Falta determinar el equilibrio mixto en este caso. Igualamos los pagos esperados:

- Para que el Ave 1 sea indiferente entre A y P, su pago esperado debe ser igual:

$$\underbrace{\frac{V}{2}q + 0(1-q)}_{\text{Pago esperado de jugar P para la ave 1.}} = \frac{V}{2}q = \underbrace{Vq + W(1-q)}_{\text{Pago esperado de jugar A para el ave 1}}.$$

$$0 = \left(V - \frac{V}{2} - W\right)q + W \Rightarrow q = \frac{-W}{V/2 - W} > 0$$

- Análogamente, para el Jugador 2:

$$p = \frac{-W}{V/2 - W} > 0.$$

Este equilibrio mixto solo tiene sentido si $W < 0 < V/2$, lo que garantiza que el denominador y el numerador son negativos y que $0 < p, q < 1$.

Ejercicio 12

Dilemas sociales. Los psicólogos se refieren a veces a situaciones en las que muchos jugadores juegan un juego como el dilema del prisionero como *dilemas sociales*: estas son situaciones en las que la mejor elección para un individuo entra en conflicto con el mejor resultado para el grupo en su conjunto. En otras palabras, si todos actúan según su propio interés, el grupo (incluidos los propios individuos) termina en una situación peor que si todos hubieran cooperado. ¿Por qué pueden considerarse las siguientes situaciones como dilemas sociales?

a) Todo el mundo habla cada vez más alto en un restaurante hasta que nadie puede oír lo que los demás están diciendo.

b) Regar el jardín durante una sequía.

c) Colar equipaje de mano en exceso en un avión lleno.

Piensa en al menos un ejemplo cotidiano más.

Solución:

a) Si todos hablaran en voz baja, el ambiente del restaurante permitiría que todos se escuchen cómodamente. Sin embargo, un comensal puede decidir alzar la voz para hacerse oír mejor. Esto lleva a que los demás, ya sea simultáneamente (juego estático) o como respuesta posterior (juego dinámico), también eleven el volumen de su voz. En cualquier caso, se genera un entorno ruidoso donde nadie puede conversar cómodamente.

b) Durante una sequía, el agua es un recurso escaso. Regar el jardín puede interpretarse como un uso egoísta o excesivo de dicho recurso. No obstante, cada individuo desea que su jardín se vea bien. Si cree que los demás no regarán, podría decidir hacerlo él mismo sin mayor remordimiento. Pero si todos razonan de manera similar, el resultado colectivo es la sobreexplotación del recurso, llevando al agotamiento del agua, incluso para fines esenciales. En retrospectiva, habría sido mejor no regar.

c) Llevar exceso de equipaje de mano puede resultar beneficioso a nivel individual, ya que se evitan pagos adicionales o tiempos de espera por equipaje facturado. Si solo una persona lo hace, no suele haber consecuencias, pues siempre puede haber espacio disponible. Pero si todos lo hacen, el avión se satura, surgen retrasos por la reubicación del equipaje y, en casos extremos, el vuelo se cancela o no puede despegar.

d) Un ejemplo cotidiano adicional es el de un crimen callejero presenciado por múltiples personas (como en algunas anécdotas urbanas o el caso de Kitty Genovese en Nueva York), pero especialmente pertinente en el contexto de inseguridad ciudadana cotidiano que se vive en Lima, Perú, en 2025. Cada testigo evalúa que no puede hacer nada por sí solo frente a un agresor violento y armado, y espera que otro intervenga. Sin embargo, si dos o más se coordinaran, podrían evitar el daño. Como todos esperan pasivamente, nadie actúa y el crimen se consuma. Este fenómeno, conocido en psicología social como *difusión de la responsabilidad*, ha sido estudiado formalmente como un dilema social en entornos estratégicos. El ejemplo está formalizado en el anexo B. Otro ejemplo paradigmático es la *tragedia de los comunes*, ver anexo A.

Situación	**Solución socialmente óptima**	**Resultado bajo conducta egoísta**
Hablar en un restaurante.	Todos hablan en voz baja y se entienden sin problema.	Todos levantan la voz y el ruido impide la comunicación.
Regar el jardín en sequía.	No se riega el jardín y se preserva el recurso.	Todos riegan y se acaba el agua.
Colar equipaje de mano.	Nadie lleva equipaje excesivo y el embarque es fluido.	Todos intentan colar, se satura el espacio y el vuelo se retrasa o no despega.
Caso Kitty Genovese (pasividad ante el crimen).	Dos o más personas salen a intervenir y detienen la agresión.	Todos esperan que otros actúen y nadie interviene.
Tragedia de los comunes (pastos, medio ambiente).	Cada quien limita su uso del recurso común para preservar el total.	Todos explotan al máximo y el recurso se agota para todos.

Estos dilemas sociales reflejan tensiones entre el interés privado y el bienestar colectivo, como ilustran los experimentos de comportamiento en contextos de responsabilidad compartida (Cooper, 2024) o los análisis psicológicos de cooperación estratégica (Liebrand and Messick, 1996).

Observación. En modelos de emparejamiento, el conflicto en cuestión adopta una forma distinta. En particular, Echenique et al. (2024) muestran no que al aplicar herramientas de transporte óptimo al problema de matching, las transformaciones cóncavas o convexas de la utilidad, generadas a través de un parámetro α, permiten caracterizar soluciones que son $\varepsilon-$estables o $\varepsilon-$justas[7], respectivamente, revelando un trade-off entre ambos criterios. A diferencia de los dilemas sociales donde actuar individualmente puede perjudicar al grupo pero también al individuo, en los mercados de emparejamiento como el matrimonial, las decisiones individuales sí conllevan a pagos mayores para los agentes —como se discute formalmente en Roth and Sotomayor (1990).

[7]La noción de ε-equilibrio propio se remonta a (Myerson, 1978).

A. La tragedia de los comunes

La *tragedia de los comunes*, formulada originalmente por Hardin (1968), es una extensión del dilema del prisionero a contextos con múltiples agentes. En este tipo de situaciones, cada individuo se beneficia a corto plazo explotando un recurso compartido, pero si todos actúan de la misma forma, el recurso se degrada, afectando negativamente a todos. La estructura estratégica subyacente es la de un *dilema del prisionero de muchos jugadores* (N-person Prisoner's Dilemma, NPD).

Considérese el caso de $n > 5$ granjeros, cada uno con una vaca que pesa x kilogramos, donde $100 < x < 1000$. Todos comparten un mismo terreno comunal que puede sostener como máximo n vacas sin deteriorarse. Si un granjero decide introducir una vaca adicional, el peso de cada vaca se reduce a $x - 1$. No obstante, dicho granjero termina teniendo dos vacas que pesan en total $2(x - 1)$ kilogramos, lo cual excede el beneficio individual de tener solo una vaca de peso x. Este incentivo individual lleva a que todos los granjeros introduzcan una vaca adicional, provocando una situación en la que cada uno acaba con dos vacas de peso considerablemente menor, es decir, con $2(x - m)$ kilogramos para algún $m > 1$, resultando peor que la situación inicial. Este tipo de comportamiento racional individual que genera un desenlace colectivo ineficiente refleja las condiciones observadas, por ejemplo, durante el proceso de cercamientos en Inglaterra en el siglo XVIII (Hardin, 1968). Este tipo de juegos cumple con tres propiedades fundamentales que caracterizan a los NPD:

- Cada jugador enfrenta dos opciones: cooperar o desertar.
- Desertar es una estrategia dominante para cada jugador, independientemente de las decisiones de los demás.
- Las estrategias dominantes conducen a un equilibrio deficiente, peor que aquel en el que todos cooperan.

De acuerdo con el esquema de Hofstadter, la tentación T corresponde al beneficio de explotar el bien común sin contribuir a su preservación; la recompensa R surge de una cooperación coordinada; el castigo C es el resultado del uso egoísta colectivo; y la paga del primo P recae sobre quien coopera en solitario. Este mismo esquema puede trasladarse a otros contextos como la contaminación ambiental, donde el bien común es el aire limpio y el recurso individual puede ser el uso de automóviles privados. En tales casos, la suma de decisiones racionales individuales lleva a un deterioro colectivo. Finalmente, para Parfit (1984), los juegos con múltiples agentes son los más representativos de la lógica del dilema del prisionero. En estos casos, la ineficiencia no es impuesta desde fuera ni depende de repeticiones, sino que emerge espontáneamente por la simple concurrencia de muchos jugadores. Cuanto mayor sea el número de participantes, menor es el incentivo individual para desviarse del equilibrio ineficiente, haciéndolo no solo probable, sino también estable y casi inevitable.

Ejemplo A.1. **El problema de los comunes** (Gibbons, 1992). Considere n granjeros en una villa. Cada verano, los granjeros llevan su ganado a pastar. Denotemos por g_i el número de animales que posee el granjero i. Así, el número total de animales es $G = \sum_{1 \leq i \leq n} g_i$. El costo de tener un animal es c y no depende de cuántos animales el granjero ya tenga. El valor de criar un animal cuando hay G animales pastando es $v(G)$[8]. Dado que los animales necesita un mínimo de comida, existe un número máximo de animales que pueden coexistir: $G_{\text{máx}}$. Así, $v(G) > 0$ para $G < G_{\text{máx}}$ y $v(G) = 0$ si $G \geq G_{\text{máx}}$. Además, como los animales compiten por comida, debemos tener $v'(G) < 0$ para $G < G_{\text{máx}}$ y $v''(G) < 0$ (agregar un animal al inicio genera poco impacto en los demás, pero conforme hay más animales, agregar uno tiene un impacto mayor negativo en el resto). Durante la primavera, los granjeros deciden cuántos animales adquirir. Por simplicidad, asumimos que este número es perfectamente divisible. Así, el granjero escoge $g_i \in [0, \infty)$. Sin embargo, dadas las restricciones del problema, realmente escoge sobre $[0, G_{\text{máx}})$. El pago del granjero i viene dado por

$$g_i v\left(\sum_{j=1}^{n} g_j\right) - c_i g_i.$$

Entonces, si $(g_1^*, \cdots, g_n^*)$ es un equilibrio de Nash, denotando $g_{-i}^* = g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*$, la CPO provee

$$v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0. \tag{15}$$

De este modo, sustituyendo g_i^* en (15) y sumando y dividiendo por n

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0.$$

Note que esta solución difiere de la solución socialmente óptima:

$$\max_{0 \leq G} \; Gv(G) - Gc \implies v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0.$$

$$G^{**} < G^*.$$

La desigualdad $G^{**} < G^*$ indica que en el equilibrio de Nash, los granjeros sobreexplotan el recurso común porque no internalizan el impacto negativo de su decisión sobre el valor marginal $v(G)$. En el equilibrio socialmente óptimo, se considera el costo colectivo del uso excesivo del pastizal, lo que reduce el número total de animales a G^{**}. Esto se debe a que en G^{**}, el beneficio marginal de agregar un animal ($v(G) + Gv'(G)$) iguala su costo marginal (c), mientras que en G^*, solo se iguala considerando el impacto individual del granjero ($\frac{1}{n} G v'(G)$). La discrepancia surge porque el costo total del deterioro del recurso no se distribuye adecuadamente entre los usuarios en el equilibrio de Nash. Por ello, G^* es mayor y menos eficiente que G^{**}.

[8]Depende de cuánto come la vaca.

B. Juego de espectadores

Nos situamos en el contexto del crimen presenciado por espectadores (jugadores). Cada jugador $i \in N = \{1, \cdots, |N|\}$ tiene dos estrategias $A_i = \{1, 0\}$, donde $a_i = 1$ corresponde a ayudar y $a_i = 0$ corresponde a no ayudar. Todos os jugadores tienen los mismos pagos esperados:

$$u_i(\cdot) = \alpha \mathbb{P} - \beta a_i,$$

donde $\mathbb{P}$ es la probabilidad de que al menos un jugador $j \in N$ escoja $a_j = 1$. Esto es, si los jugadores juegan estrategias mixtas $\theta_1, \cdots, \theta_N$, con $\theta_i \in \Delta(A_i)$, y denotamos γ_i la probabilidad de que i escoja a_i, entonces $\mathbb{P}\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{|N|}\} = 1 - \prod_{i=1}^{|N|}(1 - \gamma_i)$. Los coeficientes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son exógenos. El modelo indica que cada persona prefiere ayudar a la víctima.

Podemos representar la situación como sigue considerando que el individuo recibe una utilidad α si alguien ayuda:

- α si alguien más reporta el crimen.
- $\alpha - \beta$ si la persona i reporta el crimen.
- 0 caso contrario.

El pago de reportar es $\alpha - \beta$ pero el pago de no reportar es

$$\alpha \left[1 - \prod_{i=1}^{|N|} (1 - \gamma_i) \right].$$

En un equilibrio simétrico (Krishna, 2009), $\gamma_i = \gamma_j = \gamma$ para todo i, j. Por ende, la probabilidad es

$$\alpha(1 - (1 - \gamma)^{N-1}).$$

Si $\alpha - \beta > \alpha(1 - (1 - \gamma)^{N-1})$, entonces el jugador i reporta con probabilidad uno. Esto es, $\gamma = 1$. Este no es un EN. Si la desigualdad es la contraria, $\gamma = 0$, lo cual tampoco constituye un EN. Un EN ocurre enonces cuando

$$\beta = \alpha(1 - \gamma)^{|N|-1} \implies \gamma = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{|N|-1}}.$$

Referencias

Blake A. Allison, Adib Bagh, and Jason J. Lepore. Invariant equilibria and classes of equivalent games. *Games and Economic Behavior*, 132:448–462, 2022.

Ken Binmore. *Playing for Real: A Text on Game Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2007. ISBN 978-0-19-530057-4.

John W. Carroll. Iterated n-player prisoner's dilemma games. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 53(3):411–415, May 1988. URL https://www.jstor.org/stable/4319961.

Dylan A. Cooper. Diffusion of responsibility for actions with advice. *Journal of Behavioral Decision Making*, 37(4):e2415, 2024. doi: 10.1002/bdm.2415. URL https://doi.org/10.1002/bdm.2415.

João Marcos Leite de Lima. Game theory (part i). Lecture notes, 2022. URL https://www.cril.univ-artois.fr/~delima/teaching/mpia/assets/pdf/lec07.pdf. Accessed: 2025-04-09.

Martin Dufwenberg and Mark Stegeman. Existence and uniqueness of maximal reductions under iterated strict dominance. *Econometrica*, 70(5):2007–2023, 2002.

Federico Echenique. General equilibrium theory: Lecture notes. https://eml.berkeley.edu/~fechenique/lecture_notes/echenique_GE.pdf, 2015. Accessed 2025-04-09.

Federico Echenique, Joseph Root, and Fedor Sandomirskiy. Stable matching as transportation. In *Proceedings of the 25th ACM Conference on Economics and Computation*, page 418, New York, NY, USA, 2024. Association for Computing Machinery. doi: 10.1145/3670865.3673585. URL https://doi.org/10.1145/3670865.3673585.

Drew Fudenberg and Eric Maskin. The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. *Econometrica*, 54(3):533–554, May 1986.

Robert Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. ISBN 9780691003955.

Garrett Hardin. The tragedy of the commons. *Science*, 162(3859):1243–1248, 1968. doi: 10.1126/science.162.3859.1243.

Tomohiro Hoshi and Alistair Isaac. The strategic equivalence of games with unawareness. Stanford University. Manuscript, 2024.

Vijay Krishna. *Auction Theory*. Academic Press, San Diego, 2nd edition, 2009. ISBN 9780123745071.

Wim B. G. Liebrand and David M. Messick. Social dilemmas: Individual, collective, and dynamic perspectives. In Wim B. G. Liebrand, David M. Messick, and Henk A. M. Wilke, editors, *Frontiers in Social Dilemmas Research*, pages 1–9. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996. doi: 10.1007/978-3-642-85261-9_1.

Charles E. Lucier. Reviewed work: *Micromotives and Macrobehavior* by thomas c. schelling. *The Journal of Politics*, 42(2):624–626, May 1980.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York, 1995. ISBN 9780195073409.

Roger B. Myerson. Refinements of the nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, 7(2):73–80, 1978.

Ko Nishihara. A resolution of n-person prisoners' dilemma. *Economic Theory*, 10(3): 531–540, October 1997. URL https://www.jstor.org/stable/25055057.

Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1994. ISBN 9780262650403.

Derek Parfit. *Reasons and Persons*. Oxford University Press, 1984.

Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. ISBN 9780521359870.

Reinhard Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4:25–55, 1975.

M. N. Szilagyi. An investigation of n-person prisoners' dilemmas. *Complex Systems*, 14 (2):155–174, 2003.

Robert Wilson. Computing equilibria of n-person games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(1):80–87, 1971.