PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA DIRIGIDA 7

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO & RODRIGO CROUSILLAT

SEMESTRE 2025-2

FECHA: 18 de noviembre de 2025

1) Con respecto al problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{2} \beta^t \sqrt{c(t)} \\ \text{s.a.} \quad & x(t+1) = (1+r)x(t) - c(t), \\ & x(0) = x_0. \end{aligned}$$

1. ¿Qué tipo de problema se está resolviendo?

Es un problema de programación dinámica. Particularmente, podemos intuir que se trata de un problema de consumo intertemporal por la estructura del funcional objetivo y la restricción.

2. ¿Qué valores puede o debe tomar β?

En este caso, β es una tasa de descuento. Idealmente, para que tenga sentido el problema, $0 < \beta < 1$. Que sea positiva asegura que el consumo en cada periodo genere utilidad adicional, congruente con el axioma de monotonicidad, mientras que su acotación superior con 1 nos dice que el consumo futuro es cada vez ponderado menos, congruente con que los agentes tienen algún grado de impaciencia.

3. ¿Cuál es la variable de control y cuál es la variable de estado? ¿Qué representan?

En este caso, $c(t)$ es el consumo en el instante t y es la variable del control, pues el hogar/el agente escoge su consumo. Por el otro lado, $x(t)$ es la riqueza del agente, y es la variable de estado. Entonces, el agente maximiza su utilidad, función de su consumo, considerando que en cada periodo la riqueza que tiene la divide entre consumo y ahorro, el cual rinde un interés r al siguiente periodo.

4. Obtenga $x^*(t)$ y $c^*(t)$.

En este caso, solo hay tres periodos a considerar, por lo que podemos resolver el problema recursivamente. En el último periodo ($t = 2$), el valor (sumado) viene dado por

$$V(2) = \beta^2\sqrt{c_2}.$$

Considerando la ley de movimiento para $x(t)$ en este periodo nos dice que $x_3 = (1 + r)x_2 - c_2 \implies c_2 = (1 + r)c_2 + x_3$. Como la utilidad es creciente, el agente debe agotar todo su riqueza (consumiendo) en el último periodo ($x_3 = 0$). Entonces $c_2 = (1 + r)x_2$. Reemplazando tenemos

$$V(2) = \beta^2\sqrt{(1 + r)x_2}.$$

Ahora, en el periodo 1 tenemos que el valor es

$$V(1) = \max_{c_1} [\beta\sqrt{c_1} + V(2)]$$

es decir,

$$V(1) = \max_{c_1} \left[\beta\sqrt{c_1} + \beta^2\sqrt{(1 + r)x_2}\right],$$

que, considerando que $x_2 = (1 + r)x_1 - c_1$, es

$$V(1) = \max_{c_1} \left[\beta\sqrt{c_1} + \beta^2\sqrt{(1 + r)[(1 + r)x_1 - c_1]}\right],$$

que es

$$V(1) = \max_{c_1} \left[\beta\sqrt{c_1} + \beta^2\sqrt{1 + r}\sqrt{(1 + r)x_1 - c_1}\right].$$

Como lo que estamos maximizando es cóncavo en c_1, de haber un punto estacionario, este debe ser máximo (i.e. hay solución interior). La CPO es

$$\frac{\beta}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\beta^2\sqrt{1 + r}}{2\sqrt{(1 + r)x_1 - c_1}} = 0.$$

cuya solución es

$$c_1 = \frac{1 + r}{1 + \beta^2(1 + r)} \cdot x_1.$$

Entonces, reemplazamos obteniendo,

$$V(1) = \beta\sqrt{1 + r}\sqrt{1 + \beta^2(1 + r)}\sqrt{x_1}.$$

Finalmente, en el primer periodo tenemos entonces que

$$V(0) = \max_{c_0} \left[\sqrt{c_0} + \beta\sqrt{1+r}\sqrt{1+\beta^2(1+r)}\sqrt{x_1} \right],$$

es decir,

$$V(0) = \max_{c_0} \left[\sqrt{c_0} + \beta\sqrt{1+r}\sqrt{1+\beta^2(1+r)}\sqrt{(1+r)x_0 - c_0} \right].$$

Buscamos una solución interior al igual que antes. La CPO es

$$\frac{1}{2\sqrt{c_0}} - \frac{\beta\sqrt{1+r}\sqrt{1+\beta^2(1+r)}}{2\sqrt{(1+r)x_0 - c_0}} = 0$$

cuya solución es

$$c_0 = \frac{1+r}{1+\beta^2(1+r)+\beta^4(1+r)^2} \cdot x_0.$$

Dado esto, podemos reconstruir la trayectoria de x_t. En particular

$$x_0^* = x_0$$

$$x_1^* = (1+r)x_0 - \frac{1+r}{1+\beta^2(1+r)+\beta^4(1+r)^2}x_0 = \frac{\beta^2(1+r)^2+\beta^4(1+r)^3}{1+\beta^2(1+r)+\beta^4(1+r)^2}x_0$$

$$x_2^* = (1+r)x_1 - \frac{1+r}{1+\beta^2(1+r)}x_1 = \frac{\beta^4(1+r)^4+\beta^6(1+r)^5}{1+2\beta^2(1+r)+2\beta^4(1+r)^2+\beta^6(1+r)^3}x_0.$$

Dada esta, la trayectoria c_t^* es

$$c_0^* = \frac{1+r}{1+\beta^2(1+r)+\beta^4(1+r)^2}x_0^*,$$

$$c_1^* = \frac{1+r}{1+\beta^2(1+r)}x_1^*,$$

$$c_2^* = (1+r)x_2^*$$

2) Considere el siguiente problema de maximización

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{T} \left[1 - x^2(t) - 2u^2(t)\right] \\ \text{s.a.}: \quad & x(t+1) = x(t) - u(t) \\ & x(0) = x_0. \end{aligned}$$

Identifique la variable de control y la variable de estado. Resuelva el problema aplicando las ecuaciones de Bellman.

La variable de control es u mientras que la de estado es x. Considerando que

$$F(x,u,t) = 1 - x_t^2 - 2u_t^2$$

y

$$f(x,u,t) = x_t - u_t$$

entonces, las Ecuaciones de Bellman vienen dadas por

$$\frac{\partial F}{\partial u_t} + J'_{t+1}\frac{\partial f}{\partial u_t} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_t} + J'_{t+1}\frac{\partial f}{\partial x_t} = J'_t.$$

Esto es

$$-4u_t - J'_{t+1} = 0 \tag{1}$$

$$-2x_t + J'_{t+1} = J'_t \tag{2}$$

Despejando en (1), obtenemos

$$J'_{t+1} = -4u_t \tag{3}$$

que, reemplazado en (2), es

$$-2x_t - 4u_t = J'_t$$

Adelantamos un periodo, obteniendo

$$J'_{t+1} = -2x_{t+1} - 4u_{t+1}$$

que, reemplazando en (3), es

$$-2x_{t+1} - 4u_{t+1} = -4u_t$$

y, reemplazando la ley de movimiento de x_t, es

$$-2(x_t - u_t) - 4u_{t+1} = -4u_t$$

despejando, tenemos entonces

$$u_{t+1} = -\frac{1}{2}x_t + \frac{3}{2}u_t$$

y, por ende, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} 2^t + B \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} 2^{-t}.$$

Ahora bien, esta debe satisfacer $x(0) = x_0$ y, además, de (1) en T, tenemos $-4u_T - J'_{T+1} = 0$, que, como $J'_{T+1} = 0$, implica que $u_T = 0$. Entonces, tenemos que

$$-A + 2B = x_0$$

$$(2B - x_0)2^T + B2^{-T} = 0$$

por lo que

$$B = \frac{x_0}{2 + 2^{-2T}}$$
$$A = \frac{-2^{-2T-1}x_0}{1 + 2^{-2T-1}}.$$

Con lo anterior, quedan determinadas las trayectorias x_t^* y u_t^*.

3) Con respecto al problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c(t)) \\ \text{s.a.} \quad & x(t+1) = (1+r)[x(t) - c(t)] \\ & x(0) = x_0 \\ & (1+r)\beta < 1 \end{aligned}$$

1. ¿Qué tipo de problema es? ¿Cuál es el interés de la formulación con horizonte de tiempo infinito?

Es un problema de programación dinámica con horizonte infinito. Particularmente, podemos intuir que se trata de un problema de consumo intertemporal por la estructura del funcional objetivo y la restricción. Lo interesante de estos problemas es que 1) representan (usualmente) el problema de un hogar, en el que los miembros no viven para siempre, pero, sin embargo, el hogar continúa existiendo (pues se hereda la riqueza) y, en este marco, 2) las decisiones de consumo de cada instante tienen efectos con horizonte infinito.

2. ¿Se puede asegurar que se alcanza el máximo?

Sí, la condición $(1+r)\beta < 1$ es suficiente para que la suma sea finita y, por ende, se pueda alcanzar el máximo.

3. Resuelva el problema vía ecuaciones de Bellman. Tenga en cuenta que $x(t)$ debe estar acotado; es decir, $\lim_{t\to\infty} x(t) \neq \pm\infty$

Las Ecuaciones de Bellman en valor presente son

$$\frac{\partial F}{\partial c_t} + \beta J'_{t+1}\frac{\partial f}{\partial c_t} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_t} + \beta J'_{t+1}\frac{\partial f}{\partial x_t} = J'_t.$$

Considerando que $F(x,c,t) = \ln(c_t)$ y $f(x,c,t) = (1+r)(x_t - c_t)$, esto es

$$\frac{1}{c_t} - (1+r)\beta J'_{t+1} = 0, \tag{4}$$

$$(1+r)\beta J'_{t+1} = J'_t. \tag{5}$$

Podemos despejar en (4), obteniendo

$$\frac{1}{c_t} = J'_t$$

que, adelantado un periodo es

$$\frac{1}{c_{t+1}} = J'_{t+1}. \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5), tenemos

$$\frac{1}{c_t} - \frac{(1+r)\beta}{c_{t+1}} = 0$$

por lo que

$$c_{t+1} = (1+r)\beta c_t$$

y la trayectoria es entonces

$$c_t = c_0(1+r)^t\beta^t.$$

Ahora, reemplazando nuestra solución en la ley de movimiento de x_t, obtenemos

$$x_{t+1} = (1+r)x_t - c_0(1+r)^{t+1}\beta^t$$

cuya solución es

$$x_t = \left(x_0 - \frac{c_0}{1-\beta}\right)(1+r)^t + \frac{c_0}{1-\beta}\beta^t(1+r)^t$$

Sin embargo, para que x_t sea finito, el primer coeficiente debe ser cero; esto es

$$c_0 = (1-\beta)x_0$$

y, la solución al problema resulta

$$c_t = (1-\beta)x_0(1+r)^t\beta^t.$$

4) Un modelo de ajustes de costos. Considere una firma con tecnología

$$y(t) = f(k(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ continua, diferenciable y estrictamente creciente. Note que esta firma opera únicamente con stock de capital. La firma desea maximizar sus beneficios traídos a valor presente:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\pi(t),\ \beta\in(0,1)$$

donde

$$\pi(t) = f(k(t)) - I(t) - \frac{\xi}{2}I^2(t).$$

Por otro lado, así como en el modelo de Solow,

$$k(t+1) = I(t) + (1-\delta)k(t).$$

Suponga finalmente que el capital está acotado, de manera que $k(t)\in[0,\bar{k}]$.

1. Plantee el problema de programación dinámica que enfrenta la firma. Identifique sus costos, la ecuación de estado, la variable de estado y la variable de control.

El problema es

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[f(k(t)) - I(t) - \frac{\xi}{2}I^2(t)\right] \\
\text{s.a.} \quad & k(t+1) = I(t) + (1-\delta)k(t) \\
& k(0) = x_0
\end{aligned}$$

2. Interprete la estructura del problema: parámetros, tecnología de la firma.

En cada periodo la firma produce $f(k_t)$, pero debe invertir $I(t)$ e incurre en un gasto adicional $\frac{\xi}{2}I_t^2$, siendo la diferencia la ganancia en cada periodo, la cual es ponderada con la tasa de descuento β^t. Sobre la restricción, el capital k_t de cada periodo es el capital del periodo anterior k_{t-i}, menos la depreciación realizada en el mismo, δk_{t-1} y al que se le suma la inversión del último periodo, I_{t-1}. El control es I_t y el estado es k_t.

3. Plantee las ecuaciones de Bellman.

Estas son

$$-(\xi I_t + 1) + \beta J'_{t+1} = 0. \tag{7}$$

$$f'(k_t) + \beta(1-\delta)J'_{t+1} = J'_t, \tag{8}$$

4. Establezca una dinámica para la inversión.

Podemos despejar en (7), obteniendo

$$\beta J'_{t+1} = \xi I_t + 1 \tag{9}$$

que reemplazamos en (8)

$$f'(k_t) + (1-\delta)(\xi I_t + 1) = J'_t$$

y, avanzamos un periodo

$$f'(k_{t+1}) + (1-\delta)(\xi I_{t+1} + 1) = J'_{t+1}$$

para reemplazar en (9)

$$\beta\left[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)(\xi I_{t+1} + 1)\right] = \xi I_t + 1$$

que nos muestra finalmente que

$$I_{t+1} = \frac{\xi I_t - \beta f'(k_{t+1}) + 1 - \beta(1-\delta)}{\beta\xi(1-\delta)}$$

es decir

$$I_{t+1} = \frac{\xi I_t - \beta f'(I_t + (1-\delta)k_t) + 1 - \beta(1-\delta)}{\beta\xi(1-\delta)}.$$