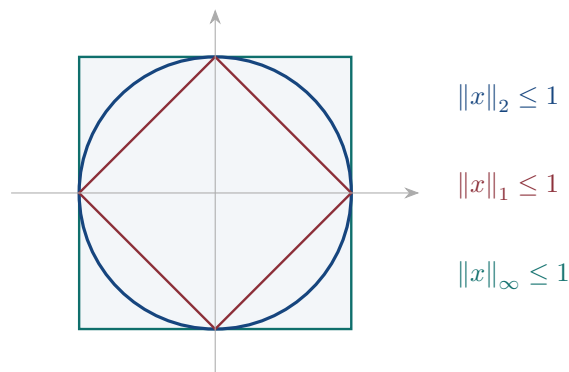


Análisis Funcional

Notas de clase

Espacios normados, dualidad y espacios de Hilbert
Topologías débiles, operadores compactos y teoría espectral



Marcelo Gallardo

`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`

Índice general

Notación y convenciones	iii
1. Espacios normados y espacios de Banach	1
1.1. Normas y espacios de Banach	1
1.2. Los espacios $L^p(\mu)$	6
1.3. El espacio $L^\infty(\mu)$	8
1.4. Espacios de sucesiones	10
1.5. Compacidad en espacios normados	10
1.6. Espacios separables	11
2. Operadores lineales continuos	14
2.1. Linealidad, continuidad y norma de operador	14
2.2. El teorema de Baire y Banach–Steinhaus	17
2.3. Teorema de la aplicación abierta	19
2.4. Teorema del gráfico cerrado	21
3. Teoremas de Hahn–Banach	23
3.1. Fundamentos de teoría de conjuntos ordenados	23
3.2. Teorema de Hahn–Banach: caso real	24
3.3. Teorema de Hahn–Banach: casos real y complejo	24
3.4. Proyecciones y extensión de operadores	25
3.5. Distancia a subespacios y separabilidad	27
3.6. Formas geométricas del teorema de Hahn–Banach	28
4. Dualidad y reflexividad	32
4.1. El dual de los espacios $L^p(\mu)$	32
4.2. Los espacios ℓ^p y c_0	35
4.3. Bidual y espacios reflexivos	35

5. Espacios de Hilbert	40
5.1. Espacios con producto interno	40
5.2. Ortogonalidad y proyecciones	41
5.3. Sistemas ortonormales y series	43
5.4. Ortogonalización y clasificación separable	45
5.5. Funcionales lineales y representación de Riesz–Fréchet	46
6. Topologías débil y débil estrella	48
6.1. Topología generada por una familia de funciones	48
6.2. Topología débil de un espacio normado	49
6.3. Topología débil estrella	52
6.4. Compacidad débil y reflexividad	53
6.5. Espacios uniformemente convexos	55
7. Operadores compactos y teoría espectral	59
7.1. Autovalores, resolvente y espectro	59
7.2. Compacidad de un operador	60
7.3. Rango cerrado y alternativa de Fredholm	65
7.4. El espectro de un operador compacto	67
8. Operadores autoadjuntos y descomposición espectral	69
8.1. El adjunto de Hilbert	69
8.2. Autoadjunción y forma cuadrática	70
8.3. Autovalores y resolvente	71
8.4. Un autovalor de módulo máximo	72
8.5. Descomposición espectral de un compacto autoadjunto	73
8.6. Ejemplos: diagonalización y sus límites	74

Notación y convenciones

El campo de escalares es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, salvo indicación contraria. Los espacios E, F son normados cuando se habla de continuidad, dualidad o convergencia; las hipótesis de completitud se indican en cada resultado. Escribimos $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y añadimos el índice cero cuando es necesario.

Símbolo	Significado
$\ x\ _E, \lambda $	Norma de un vector y módulo de un escalar.
$B_E(x, r)$	Bola abierta $\{y \in E : \ y - x\ _E < r\}$.
$\overline{B}_E(x, r)$	Bola cerrada $\{y \in E : \ y - x\ _E \leq r\}$.
B_E	Bola unitaria cerrada $\overline{B}_E(0, 1)$.
$\text{span } A, \overline{\text{span } A}$	Subespacio generado por A y su clausura en norma.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espacio de operadores lineales continuos de E en F .
$\ T\ $	Norma de operador: $\sup_{\ x\ \leq 1} \ Tx\ $.
$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$	Dual continuo de E , formado por funcionales lineales.
$E^{**}, J_E : E \rightarrow E^{**}$	Bidual e inmersión canónica, $J_E(x)(f) = f(x)$.
$T^* : F^* \rightarrow E^*$	Operador dual, $T^*f = f \circ T$.
$T^\dagger : H_2 \rightarrow H_1$	Adjunto de Hilbert: $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\dagger y \rangle$.
$\mathcal{K}(E, F)$	Operadores compactos de E en F .
$\rho(T), \sigma(T), \sigma_p(T)$	Conjunto resolvente, espectro y espectro puntual (autovalores).
$L^p(\mu)$	Clases de funciones iguales casi en todas partes con norma p finita.
ℓ^p, c_0, c	Sucesiones p -sumables, sucesiones que tienden a cero y sucesiones convergentes.
$C(K), C_c(X)$	Funciones continuas sobre K y funciones continuas de soporte compacto en X .
$\langle x, y \rangle$	Producto interno, lineal en x y conjugado-lineal en y .
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M .
$x_n \rightarrow x$	Convergencia en norma, salvo que se indique otra topología.
$x_n \rightharpoonup x$	Convergencia débil: $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E^*$.
$f_n \xrightarrow{*} f$	Convergencia débil estrella: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in E$.
$\sigma(E, E^*)$	Topología débil de E .
$\sigma(E^*, E)$	Topología débil estrella del dual E^* .

En el caso complejo, la representación de Riesz se escribe $f(x) = \langle x, y \rangle$. La correspondencia $y \mapsto f$ es conjugado-lineal. Cuando se identifica $(L^p)^*$ mediante $f \mapsto \int fg d\mu$, se usa el emparejamiento bilineal sin conjugación; si se escribe $\int f\bar{g} d\mu$, cambia la linealidad de la identificación.

Las sucesiones describen la convergencia débil o débil estrella cuando se las considera explícitamente. No se presupone que estas topologías sean metrizables ni que toda propiedad topológica se reduzca a sucesiones.

Espacios normados y espacios de Banach

1.1 Normas y espacios de Banach

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una *norma* es una aplicación $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ que satisface, para $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La no negatividad está incorporada en el codominio. El par $(E, \|\cdot\|)$ se llama *espacio vectorial normado*.

Observación 1.1. Una *seminorma* satisface la homogeneidad y la desigualdad triangular, pero puede anularse en vectores no nulos. La igualdad $\|0\| = 0$ se deduce de la homogeneidad; lo que se elimina es la implicación $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Observación 1.2. La norma induce la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Además, la desigualdad triangular implica

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

de modo que la norma es una función continua, e incluso lipschitziana con constante 1.

Ejemplo 1.3. En $\mathbb{K}^n$ se consideran, entre otras, las normas

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

La Figura 1.1 muestra que distintas normas pueden asignar geometrías diferentes a la misma bola de radio uno. En $\mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, de donde se deducen las inclusiones entre las bolas dibujadas.

Ejemplo 1.4. El espacio de sucesiones acotadas es

$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_j)_{j \geq 1} : x_j \in \mathbb{K}, \sup_{j \geq 1} |x_j| < \infty \right\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j|.$$

Las operaciones se definen coordenada a coordenada y las propiedades de la norma se verifican directamente. Los vectores e_j , cuya coordenada j vale 1 y las demás 0, son linealmente independientes: en una combinación lineal finita, cada coeficiente se recupera leyendo su coordenada. Por tanto, ℓ^∞ tiene dimensión infinita.

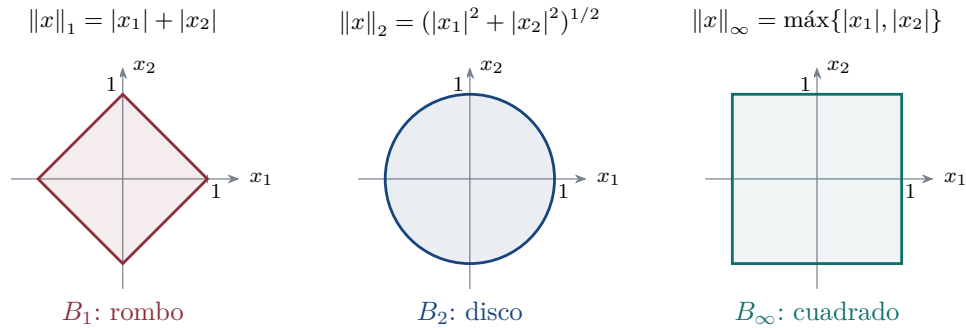


Figura 1.1. Bolas unitarias cerradas $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$. Los tres paneles usan la misma escala de coordenadas y el mismo radio unitario; cambia la norma. La zona sombreada incluye el interior.

Definición 1.5. Un espacio normado E es un *espacio de Banach* si es completo: toda sucesión de Cauchy en E converge a un elemento de E .

Ejemplo 1.6. El espacio $\mathbb{K}^n$ es de Banach con cualquiera de las normas anteriores, pues una sucesión de Cauchy converge coordenada a coordenada y hay un número finito de coordenadas. Más adelante se prueba que toda norma en dimensión finita tiene esta propiedad.

Observación 1.7. El subconjunto $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, con la distancia usual, no es completo: por ejemplo, una sucesión de racionales que converge en $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2}$ es de Cauchy y no tiene límite en $\mathbb{Q}$. Aquí $\mathbb{Q}$ es un subespacio *métrico*, no un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.8. Sea E un espacio de Banach y $F \subset E$ un subespacio vectorial con la norma inducida. Entonces F es de Banach si y solo si es cerrado en E .

Demostración. Supongamos primero que F es completo. Si $x \in \overline{F}$, existe una sucesión $(x_n) \subset F$ que converge a x en E . Esta sucesión es de Cauchy y, por completitud de F , converge a un elemento $z \in F$. La unicidad del límite en E da $x = z \in F$.

Recíprocamente, si F es cerrado y $(x_n) \subset F$ es de Cauchy, también lo es en E . Existe $x \in E$ con $x_n \rightarrow x$; como F es cerrado, $x \in F$. ■

1.1.1 Espacios de funciones acotadas y continuas

Ejemplo 1.9. Sea X un conjunto no vacío y $m \geq 1$. El espacio

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{K}^m) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}^m : f \text{ es acotada}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

es de Banach. Las operaciones puntuales preservan la acotación; en particular,

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Tomando supremos se obtiene la desigualdad triangular, y las restantes propiedades de la norma son inmediatas.

Para probar completitud, sea (f_n) de Cauchy en norma uniforme. Para cada $x \in X$,

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

así que $(f_n(x))$ converge en $\mathbb{K}^m$. Definimos $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0, x \in X).$$

Al hacer $m \rightarrow \infty$, resulta $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ para todo x . Fijando un $n \geq n_0$,

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x)\| \leq \varepsilon + \|f_n\|_\infty.$$

Por tanto, f es acotada y $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Observación 1.10. El caso $X = \mathbb{N}$, $m = 1$, identifica ℓ^∞ con $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$; en particular, ℓ^∞ es de Banach.

Observación 1.11. Si K es un espacio topológico compacto, toda función continua $f : K \rightarrow \mathbb{K}^m$ es acotada. Además, $C(K, \mathbb{K}^m)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(K, \mathbb{K}^m)$. Para comprobarlo, supongamos que $f_n \in C(K, \mathbb{K}^m)$ y que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Fijados $x \in K$ y $\varepsilon > 0$, elegimos n con $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/3$. La continuidad de esa función f_n proporciona un entorno U de x tal que $y \in U$ implica $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon/3$. Entonces

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Así, f es continua y el subespacio es cerrado. Por la Proposición 1.8, $C(K, \mathbb{K}^m)$ es de Banach con la norma uniforme. En particular, una sucesión de Cauchy de funciones continuas converge uniformemente por la completitud de $\mathcal{B}(K, \mathbb{K}^m)$, y el argumento de tres términos anterior asegura que su límite sigue siendo continuo. Esto incluye el caso $C(X, \mathbb{R})$ para un espacio métrico compacto X .

Es la convergencia uniforme la que permite demostrar que el subespacio es cerrado; la completitud del espacio ambiente por sí sola no lo implica.

Ejemplo 1.12. La convergencia puntual no basta para preservar continuidad. En $[0, 1]$, las funciones $f_n(x) = x^n$ son continuas y convergen puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

que no es continua.

1.1.2 Dimensión finita

Lema 1.13. Sean $\beta_1, \dots, \beta_n$ vectores linealmente independientes de un espacio normado E . Existe $c > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j \beta_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |a_j| \quad (a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}).$$

Demostración. La función $\Phi(a) = \left\| \sum_j a_j \beta_j \right\|$ es continua respecto de la norma usual de $\mathbb{K}^n$, porque

$$|\Phi(a) - \Phi(b)| \leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_j| \|\beta_j\|.$$

El conjunto $S = \{a \in \mathbb{K}^n : \sum_j |a_j| = 1\}$ es compacto por Heine–Borel en el espacio euclídeo $\mathbb{K}^n$. La independencia lineal implica $\Phi(a) > 0$ en S . Por tanto, Φ alcanza allí un mínimo $c > 0$. Aplicando esta cota a $a/\|a\|_1$ cuando $a \neq 0$ se obtiene la desigualdad. El caso $a = 0$ es inmediato. ■

Observación 1.14. El lema y la desigualdad triangular dan

$$c \sum_j |a_j| \leq \left\| \sum_j a_j \beta_j \right\| \leq \left(\max_j \|\beta_j\| \right) \sum_j |a_j|.$$

Así se demuestra que todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes, sin utilizar esa equivalencia como premisa del lema.

Teorema 1.15. *Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach. En particular, todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.*

Demostración. Sea $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ una base de E , normalizada de modo que $\|\beta_j\| = 1$, y sea (x_k) una sucesión de Cauchy. Escribimos

$$x_k = \sum_{j=1}^n a_j^{(k)} \beta_j.$$

Por el Lema 1.13,

$$\sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - a_j^{(m)}| \leq c^{-1} \|x_k - x_m\| \longrightarrow 0 \quad (k, m \rightarrow \infty).$$

Para cada j , los coeficientes forman una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ y convergen a un escalar b_j . Si $x = \sum_j b_j \beta_j$, entonces

$$\|x_k - x\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - b_j| \|\beta_j\| \longrightarrow 0.$$

Esto prueba completitud. Para la última afirmación no se requiere que el espacio ambiente sea completo: una sucesión de un subespacio completo que converge en el ambiente tiene un límite en el subespacio, por el mismo argumento de unicidad usado en la Proposición 1.8. ■

1.1.3 Ejemplos de completitud e incompletitud

Ejemplo 1.16. El espacio

$$c_0 = \{(a_j)_{j \geq 1} : a_j \in \mathbb{K}, a_j \rightarrow 0\}$$

es un subespacio de ℓ^∞ y es de Banach con la norma uniforme. Para verlo directamente, sea (x_n) de Cauchy, con $x_n = (a_j^{(n)})_{j \geq 1}$. Para cada j , la sucesión $(a_j^{(n)})_n$ es de Cauchy porque

$$|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Sea $a_j = \lim_n a_j^{(n)}$. La cota de Cauchy es uniforme en j ; pasando al límite en m , obtenemos

$$\sup_j |a_j^{(n)} - a_j| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

Como en el ejemplo de funciones acotadas, esto muestra que $x = (a_j)_j \in \ell^\infty$ y $x_n \rightarrow x$ uniformemente. Para comprobar que $x \in c_0$, fijamos primero n con $\|x - x_n\|_\infty < \varepsilon/2$ y después J con $|a_j^{(n)}| < \varepsilon/2$ para $j \geq J$. Entonces

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{(n)}| + |a_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (j \geq J).$$

Es esencial elegir primero n y después J ; la convergencia coordenada a coordenada por sí sola no demostraría que el límite pertenece a c_0 .

Observación 1.17. En c_0 , los vectores canónicos e_j pertenecen a la bola unitaria cerrada y satisfacen $\|e_j - e_k\|_\infty = 1$ cuando $j \neq k$. Ninguna subsucesión es de Cauchy. Por tanto, la bola unitaria cerrada de c_0 no es compacta.

Ejemplo 1.18. El subespacio

$$c_{00} = \{(a_j)_j : \text{solo un número finito de coordenadas es no nulo}\} \subset c_0$$

no es completo con la norma uniforme. En efecto, consideremos

$$x_n = (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots), \quad x = (1/j)_{j \geq 1} \in c_0.$$

Entonces $\|x_n - x\|_\infty = 1/(n+1) \rightarrow 0$, pero $x \notin c_{00}$. Así, c_{00} no es cerrado en c_0 y la Proposición 1.8 muestra que no es de Banach.

Ejemplo 1.19. Sea $a < b$. El espacio $\mathcal{P}([a, b])$ de las restricciones de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, dotado de la norma uniforme, no es completo. Los polinomios de Taylor

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

convergen uniformemente a e^x en $[a, b]$: si $M = \max\{|a|, |b|\}$, la cola está acotada por $\sum_{k>n} M^k/k! \rightarrow 0$. Por ello (p_n) es de Cauchy. Su límite no es un polinomio en un intervalo no degenerado, pues todas las derivadas de e^x son no nulas y una derivada suficientemente alta de un polinomio es cero.

Ejemplo 1.20. El espacio $C_c(\mathbb{R}^d)$ de funciones continuas con soporte compacto no es completo con la norma uniforme. Una versión bien definida del ejemplo de las notas es

$$f_n(x) = \begin{cases} \exp\left(1 - \frac{n^2}{n^2 - \|x\|_2^2}\right) \exp(-\|x\|_2^2), & \|x\|_2 < n, \\ 0, & \|x\|_2 \geq n. \end{cases}$$

La primera expresión tiende a cero cuando $\|x\|_2 \uparrow n$, de modo que f_n es continua y su soporte está contenido en la bola cerrada de radio n . Para cada radio fijo R y $n > R$, el factor

$$\exp\left(1 - \frac{n^2}{n^2 - \|x\|_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{n^2 - \|x\|_2^2}\right)$$

converge uniformemente a 1 en $\|x\|_2 \leq R$. Fuera de esa bola, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-\|x\|_2^2}$, por lo que

$$|f_n(x) - e^{-\|x\|_2^2}| \leq e^{-R^2}.$$

Elegimos primero R grande y luego n grande: resulta convergencia uniforme en todo $\mathbb{R}^d$ a $e^{-\|x\|_2^2}$. El límite no tiene soporte compacto, lo que prueba la incompletitud. La convergencia puntual y el teorema de Dini sobre un compacto no bastarían por sí solos para concluir convergencia uniforme en todo $\mathbb{R}^d$.

Ejemplo 1.21. El mismo espacio $C_c(\mathbb{R})$ tampoco es completo para $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$. Para $n \geq 2$, definimos las funciones continuas de soporte compacto

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1], \\ nx, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1 - 1/n, \\ n(1-x), & 1 - 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Las fórmulas coinciden en los extremos de los intervalos. Si $h = \mathbf{1}_{[0,1]}$, el área de los dos triángulos que separan f_n de h es $1/n$, y por ello

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - h| dx = \frac{1}{n}, \quad \|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

La sucesión es de Cauchy. Si convergiera en esta norma a una función continua f , tendríamos $f = h$ casi en todas partes. La continuidad obligaría a $f = 1$ en $(0, 1)$ y $f = 0$ en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, lo cual es incompatible con la continuidad en los extremos. Por tanto, no existe límite en $C_c(\mathbb{R})$.

1.2 Los espacios $L^p(\mu)$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida: Σ es una σ -álgebra y μ es una medida no negativa, numerablemente aditiva. Para $1 \leq p < \infty$, escribimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Esta expresión es no negativa y homogénea, y se anula exactamente cuando $f = 0$ casi en todas partes. La desigualdad triangular se demostrará mediante Minkowski.

Lema 1.22 (Desigualdad de Young). Si $1 < p, q < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces, para $a, b \geq 0$,

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demostración. Con $\alpha = 1/p \in (0, 1)$, la función $\phi(t) = t^\alpha - \alpha t$ alcanza su máximo para $t = 1$. Por tanto, $t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha$ para $t > 0$. Si $a, b > 0$, tomamos $t = a/b$ y multiplicamos por b para obtener la desigualdad. Los casos $a = 0$ o $b = 0$ son inmediatos. ■

Teorema 1.23 (Desigualdad de Hölder). Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados: $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Si alguna de las normas es cero, el producto es cero casi en todas partes y no hay nada que probar. En caso contrario, aplicamos Young a

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Obtenemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Al integrar, el lado derecho tiene integral $1/p + 1/q = 1$, lo que prueba tanto la integrabilidad del producto como la cota. ■

Teorema 1.24 (Desigualdad de Minkowski). *Si $1 \leq p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Para $p = 1$ basta integrar $|f + g| \leq |f| + |g|$. Supongamos $p > 1$. Primero comprobamos la integrabilidad sin utilizar lo que queremos demostrar:

$$|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Si $\|f + g\|_p = 0$, la conclusión es inmediata. En otro caso, sea $q = p/(p - 1)$. Entonces $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, y Hölder da

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Dividimos por el factor positivo $\|f + g\|_p^{p-1}$ y concluimos. ■

Definición 1.25. En $\mathcal{L}^p(\mu)$ definimos $f \sim g$ si $f = g$ casi en todas partes, y escribimos

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim, \quad \|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Proposición 1.26. *El espacio $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial normado.*

Demostración. La suma y la multiplicación por escalares respetan la equivalencia casi en todas partes. Asimismo, dos representantes equivalentes tienen la misma integral de $|f|^p$, por lo que la expresión anterior está bien definida. La homogeneidad y Minkowski se transfieren al cociente; finalmente, $\|[f]\|_p = 0$ implica $[f] = [0]$. Habitualmente se escribe f en lugar de $[f]$, recordando que los elementos del espacio son clases de equivalencia. ■

Teorema 1.27. *Para $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\mu)$ es de Banach.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Extraemos una subsucesión (g_k) tal que

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k} \quad (k \geq 1),$$

y elegimos representantes medibles. Definimos

$$G_m(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^m |g_{k+1}(x) - g_k(x)|, \quad G(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x).$$

La sucesión (G_m^p) es creciente y medible. Por convergencia monótona y Minkowski,

$$\begin{aligned} \int_X G^p d\mu &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X G_m^p d\mu \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^m \|g_{k+1} - g_k\|_p \right)^p \leq (\|g_1\|_p + 1)^p < \infty. \end{aligned}$$

Por ello $G < \infty$ casi en todas partes, y la serie de diferencias converge absolutamente fuera del conjunto nulo $\{G = \infty\}$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & G(x) < \infty, \\ 0, & G(x) = \infty. \end{cases}$$

Las sumas parciales son $g_{m+1}(x)$, así que $g_k \rightarrow f$ casi en todas partes. Además, f es medible y $|f| \leq G$ casi en todas partes; en consecuencia, $f \in L^p(\mu)$. Como también $|g_k| \leq G$,

$$|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq 2^p G^p.$$

El lado derecho es integrable y el lado izquierdo converge a cero casi en todas partes. Por convergencia dominada,

$$\|f - g_k\|_p^p = \int_X |f - g_k|^p d\mu \rightarrow 0.$$

Finalmente, una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente converge al mismo límite: dados $\varepsilon > 0$, elegimos n_0 para que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon/2$ si $n, m \geq n_0$, y luego un término $g_k = f_{n_k}$ con $n_k \geq n_0$ y $\|g_k - f\|_p < \varepsilon/2$. Para todo $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. ■

1.3 El espacio $L^\infty(\mu)$

Definición 1.28. Una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ es *esencialmente acotada* si existe $C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ fuera de un conjunto medible de medida nula. Denotamos por $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ el espacio de estas funciones y definimos

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : |f| \leq C \text{ casi en todas partes}\}.$$

Equivalentemente, es el ínfimo, sobre todos los conjuntos medibles nulos N , de $\sup_{x \notin N} |f(x)|$, con valor 0 si el complemento es vacío. El espacio normado se obtiene pasando al cociente:

$$L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim, \quad f \sim g \iff f = g \text{ casi en todas partes}.$$

Observación 1.29. La cota esencial se alcanza fuera de un conjunto nulo. En efecto, para cada k existe un conjunto nulo N_k fuera del cual $|f| \leq \|f\|_\infty + 1/k$. Fuera de $\bigcup_k N_k$ se cumplen simultáneamente todas estas cotas, y por tanto $|f| \leq \|f\|_\infty$. Esto justifica las estimaciones puntuales que se usan a continuación.

Teorema 1.30. *El espacio $L^\infty(\mu)$ es de Banach.*

Demostración. La homogeneidad y la desigualdad triangular se obtienen de las cotas casi en todas partes; al pasar al cociente, $\|f\|_\infty = 0$ implica $[f] = [0]$. Por tanto, se trata de una norma.

Sea $([f_n])$ de Cauchy y elijamos representantes medibles. Para cada n y cada par (n, m) , la Observación 1.29 permite elegir conjuntos nulos N_n y $N_{n,m}$ fuera de los cuales

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Su unión $N = \bigcup_n N_n \cup \bigcup_{n,m} N_{n,m}$ es medible y nula. Para $x \notin N$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, y definimos $f(x) = \lim_n f_n(x)$; en N fijamos $f = 0$. Es una función medible, pues es el límite de las funciones medibles $f_n \mathbf{1}_{X \setminus N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, para $n, m \geq n_0$ tenemos

$$\sup_{x \notin N} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Al hacer $m \rightarrow \infty$, resulta $\sup_{x \notin N} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Fijando un $n \geq n_0$, se deduce $|f(x)| \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon$ fuera de N , así que $f \in L^\infty(\mu)$. Finalmente,

$$\|[f_n] - [f]\|_\infty \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0),$$

y queda demostrada la completitud. ■

Observación 1.31. El extremo de Hölder correspondiente a $p = 1$, $q = \infty$ se obtiene directamente:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Basta multiplicar la cota $|g| \leq \|g\|_\infty$, válida casi en todas partes, por $|f|$ e integrar. El caso $p = \infty$, $q = 1$ es simétrico.

Proposición 1.32. *Si $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^\infty(\mu)$, entonces $f \in L^p(\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$ y*

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p} \|f\|_\infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Demostración. La desigualdad se sigue de $\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X)$. Si $\mu(X) = 0$ o $\|f\|_\infty = 0$, la conclusión es inmediata. En otro caso, $\mu(X)^{1/p} \rightarrow 1$, y la cota superior implica $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Si $0 < a < \|f\|_\infty$, el conjunto $A_a = \{x : |f(x)| > a\}$ tiene medida positiva por definición del supremo esencial. Por tanto,

$$\|f\|_p \geq a \mu(A_a)^{1/p} \rightarrow a.$$

Así, $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq a$. Haciendo $a \uparrow \|f\|_\infty$, concluimos. ■

1.4 Espacios de sucesiones

Para $1 \leq p < \infty$,

$$\ell^p = \left\{ (a_j)_{j \geq 1} : a_j \in \mathbb{K}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}, \quad \|a\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p}.$$

Si μ_c es la medida de contar en $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$, identificamos una sucesión con la función $j \mapsto a_j$ y obtenemos

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu_c), \quad \|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |a(j)|^p d\mu_c(j) \right)^{1/p}.$$

Por el Teorema 1.27, este espacio es de Banach. Como los únicos conjuntos nulos para la medida de contar son vacíos, aquí la equivalencia casi en todas partes coincide con la igualdad en cada coordenada.

Proposición 1.33. *Para exponentes conjugados p, q y sucesiones de los espacios correspondientes, Hölder y Minkowski toman la forma*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \|a\|_p \|b\|_q, \quad \|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

En particular, para $1 < p, q < \infty$ y cualquier n ,

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{1/q},$$

y, para $1 \leq p < \infty$,

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{1/p}.$$

También $\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu_c)$, con la norma $\|a\|_\infty = \sup_j |a_j|$. Recordamos las inclusiones

$$c_{00} \subset c_0 \subset \ell^\infty.$$

Con la norma uniforme, c_0 y ℓ^∞ son completos, mientras que c_{00} no lo es.

1.5 Compacidad en espacios normados

Proposición 1.34. *Si E es un espacio normado de dimensión finita, un conjunto $K \subset E$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. En cualquier espacio métrico, un compacto es cerrado. Además, el recubrimiento de K por bolas abiertas de radio 1 admite un subrecubrimiento finito, lo que prueba que K es acotado.

Para la recíproca, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base normalizada y sea $(x_m) \subset K$, con $x_m = \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j$. La acotación de K y el Lema 1.13 implican que los vectores de coordenadas

$(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})$ están acotados en $\mathbb{K}^n$. Por Bolzano–Weierstrass, una subsucesión converge a $(b_1, \dots, b_n)$. Si $x = \sum_j b_j e_j$, entonces

$$\|x_{m_k} - x\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(m_k)} - b_j| \|e_j\| \longrightarrow 0.$$

Como K es cerrado, $x \in K$. Así, toda sucesión de K tiene una subsucesión convergente con límite en K , lo cual equivale a compacidad en espacios métricos. ■

Lema 1.35 (Lema de Riesz). *Sea M un subespacio vectorial cerrado y propio de un espacio normado E . Para cada $\theta \in (0, 1)$ existe $y \in E$ tal que*

$$\|y\| = 1, \quad \|y - x\| > \theta \quad \text{para todo } x \in M.$$

Demostración. Tomemos $y_0 \notin M$. Como M es cerrado, $d = \inf_{x \in M} \|y_0 - x\| > 0$. Existe $x_0 \in M$ tal que $\|y_0 - x_0\| < d/\theta$. Definimos $y = (y_0 - x_0)/\|y_0 - x_0\|$. Si $x \in M$, también $x_0 + \|y_0 - x_0\|x \in M$, y por ello

$$\|y - x\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} > \theta.$$

Por construcción, $\|y\| = 1$. ■

Teorema 1.36. *Un espacio normado E tiene dimensión finita si y solo si su bola unitaria cerrada $\overline{B}_E(0, 1)$ es compacta.*

Demostración. Si la dimensión es finita, aplicamos la Proposición 1.34. Si es infinita, elegimos x_1 de norma 1. El subespacio generado por x_1 es cerrado por el Teorema 1.15 y propio; Riesz permite elegir x_2 de norma 1 cuya distancia a ese subespacio sea mayor que $1/2$. Iterando con $M_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, obtenemos x_{n+1} de norma 1 con distancia mayor que $1/2$ a M_n . Así,

$$\|x_n - x_m\| > 1/2 \quad (n \neq m).$$

Ninguna subsucesión puede ser de Cauchy. La bola unitaria cerrada no es, por tanto, compacta. ■

1.6 Espacios separables

Definición 1.37. Un espacio normado es *separable* si contiene un subconjunto numerable y denso. Un conjunto finito se considera numerable.

Proposición 1.38. *Un espacio normado E es separable si y solo si existe un conjunto numerable $A \subset E$ tal que $\overline{\text{span } A} = E$.*

Demostración. Recordemos que $\text{span } A$ consta de las combinaciones lineales *finitas* de elementos de A ; su clausura puede ser mayor. Si A es numerable y denso, entonces $E = \overline{A} \subset \overline{\text{span } A} \subset E$.

Para la otra implicación, reemplazamos A por $A \cup \{0\}$, lo que no cambia el subespacio generado y permite tratar también $E = \{0\}$. Enumeremos $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, repitiendo elementos si es finito, y definamos

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, & \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases} \quad B_n = \left\{ \sum_{j=1}^n b_j x_j : b_j \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \right\}, \quad B = \bigcup_{n \geq 1} B_n.$$

Cada B_n es la imagen de un conjunto numerable, y por tanto B es numerable. Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, elegimos $y_0 = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ con $\|x - y_0\| < \varepsilon/2$. Por densidad de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ en $\mathbb{K}$, podemos elegir $b_j \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tales que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \sum_{i=1}^n \|x_i\|)}.$$

Entonces $y = \sum_j b_j x_j \in B$ y

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - y_0\| + \sum_{j=1}^n |a_j - b_j| \|x_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon \sum_j \|x_j\|}{2(1 + \sum_j \|x_j\|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, B es denso. ■

Ejemplo 1.39. El espacio c_0 es separable. Para $x = (a_j)_j \in c_0$, sus truncaciones satisfacen

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_{\infty} = \sup_{j > n} |a_j| \longrightarrow 0.$$

Por tanto, el conjunto numerable $\{e_j : j \geq 1\}$ genera un subespacio denso. La Proposición 1.38 da la separabilidad; un conjunto denso explícito está formado por las sucesiones de soporte finito con coordenadas en $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$.

Ejemplo 1.40. Para $1 \leq p < \infty$, el espacio ℓ^p es separable. La misma truncación cumple

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_p^p = \sum_{j > n} |a_j|^p \longrightarrow 0.$$

Aplicamos de nuevo la Proposición 1.38.

Ejemplo 1.41. El espacio ℓ^{∞} no es separable. Supongamos que $(x_n)_n$ fuera una sucesión densa y escribamos $x_n = (a_j^{(n)})_{j \geq 1}$. Definimos una sucesión diagonal $y = (b_j)_j$ mediante

$$b_j = \begin{cases} 0, & |a_j^{(j)}| \geq 1, \\ a_j^{(j)} + 1, & |a_j^{(j)}| < 1. \end{cases}$$

Como $|b_j| < 2$, tenemos $y \in \ell^{\infty}$, también cuando el campo es complejo. Pero para cada n ,

$$\|y - x_n\|_{\infty} \geq |b_n - a_n^{(n)}| \geq 1.$$

Esto contradice la densidad de (x_n) .

Ejemplo 1.42. Para $a < b$, el espacio $C([a, b], \mathbb{K})$ con la norma uniforme es separable. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, los polinomios son densos. Como los polinomios son el subespacio generado por el conjunto numerable de monomios

$$p_n(t) = t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

la Proposición 1.38 concluye la prueba. El monomio constante $p_0 = 1$ debe estar incluido. En el caso complejo se aproxima por separado la parte real y la imaginaria.

Ejemplo 1.43. Para $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p([a, b])$, con la medida de Lebesgue y $a < b$, es separable. Usamos la densidad de $C([a, b])$ en $L^p([a, b])$: se obtiene aproximando primero por funciones simples, aproximando sus conjuntos medibles por un compacto contenido en un abierto cuya diferencia tiene medida pequeña, y luego interpolando de manera continua entre los valores 1 y 0 sobre esos conjuntos. La regularidad de la medida de Lebesgue y la finitud de $b - a$ garantizan que el error en norma p sea arbitrariamente pequeño.

En concreto, dada $f \in L^p([a, b])$ y $\varepsilon > 0$, elegimos $g \in C([a, b])$ con $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Un polinomio P con coeficientes en $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ puede aproximar a g de modo que

$$\|g - P\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}}.$$

Se obtiene primero la aproximación de Weierstrass y después se aproximan sus finitísimos coeficientes por elementos de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$. Por la Proposición 1.32 y Minkowski,

$$\|f - P\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - P\|_p \leq \|f - g\|_p + (b-a)^{1/p} \|g - P\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ forman un conjunto numerable y denso. La afirmación no incluye $p = \infty$ ni espacios de medida arbitrarios.

Proposición 1.44. *Todo subespacio de un espacio métrico separable, con la métrica inducida, es separable. En particular, todo subespacio vectorial de un espacio normado separable es separable.*

Demostración. Sea D un conjunto numerable denso en el espacio métrico X y sea $A \subset X$. Las bolas $B(d, r)$ con $d \in D$ y $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, forman una base numerable de la topología. Para cada una que intersecta a A , elegimos un punto $a_{d,r} \in A \cap B(d, r)$. El conjunto de puntos elegidos es numerable.

Si U es un abierto relativo no vacío de A , tomamos $a \in U$ y un abierto $V \subset X$ con $U = A \cap V$. Existe una bola de la base con $a \in B(d, r) \subset V$; el punto elegido $a_{d,r}$ pertenece a U . Así, el conjunto elegido es denso en A . Si A es vacío, la conclusión es inmediata. ■

Operadores lineales continuos

2.1 Linealidad, continuidad y norma de operador

Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una aplicación $T : E \rightarrow F$ es *lineal* si

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}).$$

En esta sección, al hablar de continuidad, supondremos que E y F están dotados de normas.

Proposición 2.1. *Para una aplicación lineal $T : E \rightarrow F$ entre espacios normados, son equivalentes las siguientes propiedades:*

1. T es lipschitziana;
2. T es uniformemente continua;
3. T es continua;
4. T es continua en algún punto;
5. T es continua en el origen;
6. $\sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$;
7. existe $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demostración. Las implicaciones $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ se siguen de las definiciones. Si T es continua en x_0 , entonces

$$T(x) = T(x + x_0) - T(x_0) \longrightarrow 0 = T(0) \quad (x \rightarrow 0),$$

lo que prueba $(4) \Rightarrow (5)$.

Si T es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Para $\|y\| \leq 1$, tomamos $x = (\delta/2)y$ y obtenemos

$$\|Ty\| = \frac{2}{\delta}\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}.$$

Esto prueba $(5) \Rightarrow (6)$. Si el supremo de (6) es C , para $x \neq 0$ tenemos

$$\|Tx\| = \|x\| \|T(x/\|x\|)\| \leq C\|x\|;$$

el caso $x = 0$ es inmediato. Así, $(6) \Rightarrow (7)$. Finalmente,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|$$

muestra $(7) \Rightarrow (1)$. ■

Observación 2.2. Un operador *lineal* continuo lleva conjuntos acotados a conjuntos acotados. Por la proposición anterior, a estos operadores también se les llama *operadores lineales acotados*.

Proposición 2.3. *El conjunto*

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \rightarrow F : T \text{ es lineal y continuo}\}$$

es un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Para todo $x \in E$, se cumple $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Si F es de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ también es de Banach. En particular, el dual continuo

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

es de Banach, aunque E no sea completo.

Demostración. Las operaciones se definen punto a punto y preservan linealidad y continuidad. La norma es finita por la Proposición 2.1; es homogénea y no negativa. Si $\|T\| = 0$, para $x \neq 0$,

$$\|Tx\| = \|x\| \|T(x/\|x\|)\| \leq \|x\| \|T\| = 0,$$

así que $T = 0$. Además,

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx + Sx\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Tx\| + \|Sx\|) \leq \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

La estimación $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ se obtiene normalizando $x \neq 0$ como antes, y es una igualdad trivial para $x = 0$.

Supongamos ahora que F es completo y sea (T_n) de Cauchy en norma de operador. Para cada $x \in E$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

por lo que $(T_n x)$ es de Cauchy en F . Definimos $Tx = \lim_n T_n x$. Pasando al límite en las identidades de linealidad de T_n , se obtiene que T es lineal.

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos n_0 tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$. Haciendo $m \rightarrow \infty$ en la cota puntual,

$$\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (n \geq n_0, x \in E). \quad (2.1)$$

En particular, fijando $n = n_0$, $T - T_{n_0}$ es lineal y acotado; por tanto, T es continuo. Ahora podemos tomar el supremo sobre la bola unitaria en (2.1) y concluir $\|T - T_{n_0}\| \leq \varepsilon$. La afirmación sobre E^* usa la completitud del campo $\mathbb{K}$. ■

2.1.1 Ejemplos de operadores y cálculo de normas

Ejemplo 2.4. La identidad $I : E \rightarrow E$ es lineal y continua. Si $E \neq \{0\}$, existe un vector de norma 1 y se tiene $\|I\| = 1$. Para el espacio cero, la identidad coincide con el operador nulo y su norma es 0.

Ejemplo 2.5. El operador nulo $0 : E \rightarrow F$, definido por $0(x) = 0$, es continuo y tiene norma 0.

Ejemplo 2.6. Dados $\varphi \in E^*$ y $y \in F$, definimos el operador de rango a lo sumo uno

$$(\varphi \otimes y)(x) = \varphi(x)y.$$

Es lineal y continuo, y su norma es

$$\|\varphi \otimes y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|\|y\| = \|\varphi\|\|y\|.$$

Esta igualdad utiliza un supremo y no requiere que φ alcance su norma en la bola unitaria.

Ejemplo 2.7. Sea $1 \leq p < \infty$ y $b = (b_j)_j \in \ell^p$. La aplicación

$$T : \ell^\infty \rightarrow \ell^p, \quad T(a) = (a_j b_j)_{j \geq 1}$$

es lineal. Además,

$$\begin{aligned} \|Ta\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_j |a_j| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p \right)^{1/p} = \|a\|_\infty \|b\|_p. \end{aligned}$$

Por tanto, está bien definida, es continua y $\|T\| \leq \|b\|_p$. Tomando $a = (1, 1, \dots)$, de norma uniforme 1, obtenemos $Ta = b$, así que $\|T\| = \|b\|_p$.

Ejemplo 2.8. Sea $1 \leq p < \infty$ y $g \in L^p([0, 1])$. El operador de multiplicación

$$T : C([0, 1]) \rightarrow L^p([0, 1]), \quad Tf = fg,$$

está bien definido sobre la clase de equivalencia de g , es lineal y satisface

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &= \left(\int_0^1 |f(x)g(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\int_0^1 |g(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|f\|_\infty \|g\|_p. \end{aligned}$$

Luego $\|T\| \leq \|g\|_p$. La función constante $f = 1$ tiene norma uniforme 1 y satisface $Tf = g$, de donde $\|T\| = \|g\|_p$. La cota puntual anterior no es una igualdad para toda f ; la igualdad de normas se obtiene escogiendo este testigo.

Ejemplo 2.9. En el espacio $\mathcal{P}([0, 1])$ de polinomios, con la norma uniforme, la derivación

$$D : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1]), \quad Df = f',$$

es lineal pero no continua. En efecto, para $f_n(t) = t^n$ se tiene

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|Df_n\|_\infty = n.$$

No existe una constante C con $\|Df\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ para todos los polinomios, y aplicamos la Proposición 2.1.

2.2 El teorema de Baire y Banach–Steinhaus

Teorema 2.10 (Teorema de Baire). *Sea (M, d) un espacio métrico completo y no vacío. Si $M = \bigcup_{n \geq 1} F_n$, donde cada F_n es cerrado, entonces alguno de los conjuntos F_n tiene interior no vacío.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que todos los F_n tienen interior vacío. Entonces $A_n = M \setminus F_n$ es abierto y denso. Elegimos una bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1) \subset A_1$ con $0 < r_1 < 1$. Como A_2 es abierto y denso, podemos elegir una bola cerrada de radio $0 < r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset A_2 \cap B(x_1, r_1).$$

Continuando, construimos bolas cerradas anidadas con

$$0 < r_n < 1/n, \quad \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset A_{n+1} \cap B(x_n, r_n).$$

Para $m, n \geq k$, ambos centros pertenecen a $\overline{B}(x_k, r_k)$, así que $d(x_n, x_m) \leq 2r_k < 2/k$. La sucesión (x_n) es de Cauchy y converge a algún $x \in M$.

Para cada k fijo, todos los centros posteriores están en la bola cerrada $\overline{B}(x_k, r_k)$; por tanto, su límite también pertenece a ella. Como esa bola está contenida en A_k , se tiene $x \in A_k$ para todo k . Esto contradice

$$\bigcap_{k \geq 1} A_k = M \setminus \bigcup_{k \geq 1} F_k = \emptyset.$$

■

Teorema 2.11 (Banach–Steinhaus). *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $(T_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}(E, F)$. Si la familia está puntualmente acotada, es decir,*

$$\sup_{j \in J} \|T_j x\| < \infty \quad \text{para cada } x \in E,$$

entonces $\sup_{j \in J} \|T_j\| < \infty$.

Demostración. Para cada entero $n \geq 1$, definimos

$$A_n = \left\{ x \in E : \sup_{j \in J} \|T_j x\| \leq n \right\} = \bigcap_{j \in J} \{x \in E : \|T_j x\| \leq n\}.$$

Cada A_n es cerrado por continuidad de los operadores. La acotación puntual implica $E = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Por Baire, algún A_{n_0} tiene interior no vacío; podemos elegir $a \in E$ y $r > 0$ con $\overline{B}(a, r) \subset A_{n_0}$.

Si $\|y\| \leq 1$, tanto a como $a + ry$ pertenecen a A_{n_0} . Para todo $j \in J$,

$$r\|T_j y\| = \|T_j(a + ry) - T_j a\| \leq \|T_j(a + ry)\| + \|T_j a\| \leq 2n_0.$$

Tomando supremos sobre y y j , obtenemos $\sup_j \|T_j\| \leq 2n_0/r$.

■

Corolario 2.12. Sea E de Banach y F normado. Si $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ y, para cada $x \in E$, la sucesión $(T_n x)$ converge a un elemento de F , entonces

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

define un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Demostración. El paso al límite en $T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n x + \beta T_n y$ prueba la linealidad. Para cada x , la sucesión convergente $(T_n x)$ es acotada; Banach–Steinhaus proporciona $C < \infty$ con $\sup_n \|T_n\| \leq C$. Así,

$$\|T_n x\| \leq C \|x\|.$$

Al hacer $n \rightarrow \infty$, se obtiene $\|Tx\| \leq C \|x\|$, y por ello T es continuo. La hipótesis es convergencia puntual en F , no convergencia en norma de operador. ■

Definición 2.13. Una aplicación $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ entre espacios vectoriales es *bilineal* si, para cada $x \in E_1$ y cada $y \in E_2$ fijos, las aplicaciones $B(x, \cdot)$ y $B(\cdot, y)$ son lineales.

Corolario 2.14. Sean E_1, E_2, F espacios normados y supongamos que E_2 es de Banach. Si $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ es bilineal y continua en cada variable por separado, entonces es conjuntamente continua. En particular, existe $C \geq 0$ tal que

$$\|B(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\| \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{B(x, \cdot) : x \in E_1, \|x\| \leq 1\} \subset \mathcal{L}(E_2, F).$$

Para cada $y \in E_2$, la continuidad de $B(\cdot, y)$ da

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|B(x, y)\| = \|B(\cdot, y)\|_{\mathcal{L}(E_1, F)} < \infty.$$

La familia es puntualmente acotada sobre el espacio de Banach E_2 . Banach–Steinhaus implica que existe C con

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|B(x, y)\| \leq C.$$

Normalizando ambas variables, obtenemos la cota del enunciado; si alguna es cero, se cumple por bilinealidad. Finalmente,

$$\|B(x + h, y + k) - B(x, y)\| \leq C(\|h\| \|y\| + \|x\| \|k\| + \|h\| \|k\|) \rightarrow 0$$

cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, lo que prueba continuidad en cada punto del producto. ■

Ejemplo 2.15. La completitud en Banach–Steinhaus es necesaria. En c_{00} , con la norma uniforme, definimos

$$\varphi_n : c_{00} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_n((a_j)_{j \geq 1}) = n a_n.$$

Cada funcional es lineal y continuo porque $|\varphi_n(a)| \leq n \|a\|_\infty$; además, $\varphi_n(e_n) = n$ muestra que $\|\varphi_n\| = n$. Para cada $a \in c_{00}$, sin embargo, $a_n = 0$ a partir de cierto índice, y por tanto $\varphi_n(a) = 0$ eventualmente. Así,

$$\sup_n |\varphi_n(a)| < \infty \quad \text{para cada } a, \quad \sup_n \|\varphi_n\| = \infty.$$

No contradice el teorema: c_{00} no es completo, como vimos en el Ejemplo 1.18.

2.3 Teorema de la aplicación abierta

Lema 2.16. Sea E de Banach, F normado y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si existen $R, r > 0$ tales que

$$B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E(0, R))},$$

entonces

$$B_F(0, r/2) \subset T(B_E(0, R)).$$

Demostración. La linealidad de T y el hecho de que una homotecia no nula conmuta con la clausura implican, para cada $a > 0$,

$$B_F(0, ar) \subset \overline{T(B_E(0, aR))}.$$

Sea $y \in B_F(0, r/2)$. Aplicando esta inclusión con $a = 1/2$, elegimos $x_1 \in B_E(0, R/2)$ tal que $\|y - Tx_1\| < r/4$. Aplicándola al residuo con $a = 1/4$, elegimos $x_2 \in B_E(0, R/4)$ con

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < r/8.$$

Continuando, obtenemos $x_n \in E$ tales que

$$\|x_n\| < \frac{R}{2^n}, \quad \left\| y - \sum_{j=1}^n Tx_j \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

La serie $\sum_n x_n$ es absolutamente convergente en norma: sus sumas parciales son de Cauchy porque

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^m \|x_j\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Por completitud, converge a $x \in E$. Además,

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < R.$$

La última desigualdad es estricta: ya el primer término es estrictamente menor que $R/2$, y la suma de las cotas restantes es $R/2$. Finalmente, por continuidad de T ,

$$\|y - Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{j=1}^n Tx_j \right\| = 0.$$

Así, $y = Tx$ con $x \in B_E(0, R)$. ■

Teorema 2.17 (Aplicación abierta). Sean E y F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces T es una aplicación abierta: la imagen de cada abierto de E es un abierto de F . En particular, todo operador lineal continuo y biyectivo entre espacios de Banach tiene inversa continua.

Demostración. Por sobreyectividad,

$$F = T(E) = \bigcup_{n \geq 1} T(B_E(0, n)) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{T(B_E(0, n))}.$$

La última igualdad se debe a que las clausuras están contenidas en F y la unión ya contiene a F . Por Baire, existe n_0 tal que $C = \overline{T(B_E(0, n_0))}$ tiene interior no vacío. Elegimos $b \in F$ y $r > 0$ con $B_F(b, r) \subset C$.

El conjunto C es simétrico y convexo. Por simetría también $B_F(-b, r) \subset C$; si $\|y\| < r$, entonces $y + b \in B_F(b, r)$ y $y - b \in B_F(-b, r)$. Por convexidad,

$$y = \frac{1}{2}(y + b) + \frac{1}{2}(y - b) \in C.$$

Así, $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))}$. El Lema 2.16 da, con $\rho = r/2$,

$$B_F(0, \rho) \subset T(B_E(0, n_0)).$$

Escalando *ambos* radios, para cada $c > 0$ tenemos

$$B_F(0, c\rho) \subset T(B_E(0, cn_0)).$$

Si $U \subset E$ es abierto y $x \in U$, elegimos $c > 0$ suficientemente pequeño para que $B_E(x, cn_0) \subset U$. Entonces

$$B_F(Tx, c\rho) \subset Tx + T(B_E(0, cn_0)) = T(B_E(x, cn_0)) \subset T(U).$$

Cada punto de $T(U)$ es interior. Si además T es biyectivo, la apertura de T equivale a la continuidad de T^{-1} . ■

Observación 2.18. Una aplicación lineal abierta $T : E \rightarrow F$ es necesariamente sobreyectiva. Como $T(B_E(0, 1))$ es un abierto que contiene a 0, contiene alguna bola $B_F(0, r)$. Si $y \in F$ es no nulo, elegimos $0 < \varepsilon < r$. Existe $x \in B_E(0, 1)$ con

$$Tx = \frac{\varepsilon y}{\|y\|}, \quad y = T\left(\frac{\|y\|}{\varepsilon}x\right).$$

El vector cero también está en la imagen. Aquí “abierta” significa abierta como aplicación con codominio F , no solo con codominio $T(E)$.

Ejemplo 2.19. En c_{00} con la norma uniforme, consideremos

$$T : c_{00} \rightarrow c_{00}, \quad T((a_n)_n) = (a_n/n)_n.$$

Es lineal y biyectiva, pues su inversa es $T^{-1}((a_n)_n) = (na_n)_n$ y ambas transformaciones preservan el soporte finito. Además,

$$\|Ta\|_\infty = \sup_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n} \leq \|a\|_\infty.$$

Así, T es continua. Su inversa no lo es, porque $\|T^{-1}e_n\|_\infty = n$ y $\|e_n\|_\infty = 1$. La falta de completitud de c_{00} permite que falle la conclusión del teorema de la aplicación abierta.

Ejemplo 2.20. Si F es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $C([0, 1])$, con la norma uniforme, entonces $F \not\subset C^1([0, 1])$. En particular, $C^1([0, 1])$ no es cerrado en $C([0, 1])$.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $F \subset C^1([0, 1])$. Consideremos sobre el mismo conjunto F las normas

$$\|f\|_\infty, \quad \|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

El espacio $E_1 = (F, \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach porque F es cerrado en $C([0, 1])$.

También $E_2 = (F, \|\cdot\|_{C^1})$ es de Banach. En efecto, si (f_n) es de Cauchy en esta norma, existen funciones continuas f, g con $f_n \rightarrow f$ y $f'_n \rightarrow g$ uniformemente. Como F es cerrado en norma uniforme, $f \in F$. Pasando al límite en

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f'_n(s) ds,$$

obtenemos $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds$, de donde $f' = g$ y $f_n \rightarrow f$ en norma C^1 .

La identidad $i : E_2 \rightarrow E_1$ es lineal, biyectiva y continua, pues $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$. Por el teorema de la aplicación abierta, i^{-1} es continua. Existe, entonces, C tal que

$$\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty \quad (f \in F).$$

Toda sucesión (f_n) en la bola unitaria cerrada de E_1 satisface $\|f_n\|_\infty \leq 1$ y $\|f'_n\|_\infty \leq C$. Por la fórmula integral, válida también para funciones complejas,

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq C|t - s|.$$

La familia está uniformemente acotada y es equicontinua. El teorema de Arzelà–Ascoli, cuya demostración se desarrolla en el Teorema 7.9, proporciona una subsucesión que converge uniformemente a una función f . Como F y su bola unitaria son cerrados, el límite pertenece a esa bola. La bola unitaria de F sería compacta, y el Teorema 1.36 obligaría a que F tuviera dimensión finita, contradicción.

Si $C^1([0, 1])$ fuera cerrado en $C([0, 1])$, podríamos tomar $F = C^1([0, 1])$, que tiene dimensión infinita porque contiene todos los polinomios, y obtener la misma contradicción. ■

2.4 Teorema del gráfico cerrado

Definición 2.21. Para un operador lineal $T : E \rightarrow F$ entre espacios normados, su *gráfico* es el subespacio vectorial

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Equipamos el producto con la norma $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$ y el gráfico con la norma inducida. Si E y F son completos, también lo es el producto.

Teorema 2.22 (Gráfico cerrado). Sean E y F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal definido en todo E . Entonces T es continuo si y solo si $G(T)$ es cerrado en $E \times F$.

Demostración. Si T es continuo, la función $(x, y) \mapsto \|Tx - y\|$ es continua y

$$G(T) = \{(x, y) : \|Tx - y\| = 0\}$$

es un conjunto cerrado.

Para la recíproca, suponemos que $G(T)$ es cerrado. Como $E \times F$ es de Banach, el gráfico también lo es. La proyección

$$\pi : G(T) \rightarrow E, \quad \pi(x, Tx) = x,$$

es lineal, biyectiva y continua porque $\|\pi(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\|$. Por el teorema de la aplicación abierta, su inversa es continua. Existe C tal que

$$\|(x, Tx)\|_1 \leq C\|x\|,$$

y por tanto $\|Tx\| \leq C\|x\|$. Esto prueba que T es continuo. ■

Ejemplo 2.23. Sea E un espacio de Banach y $T : E \rightarrow E^*$ una aplicación lineal y simétrica en el sentido de que

$$(Tx)(y) = (Ty)(x) \quad (x, y \in E).$$

Entonces T es continua. En efecto, sean $x_n \rightarrow x$ en E y $Tx_n \rightarrow \varphi$ en la norma de E^* . Para todo $y \in E$,

$$\varphi(y) = \lim_n (Tx_n)(y) = \lim_n (Ty)(x_n) = (Ty)(x) = (Tx)(y).$$

La primera igualdad usa $|(Tx_n - \varphi)(y)| \leq \|Tx_n - \varphi\| \|y\|$; la penúltima usa que $Ty \in E^*$ es un funcional continuo. Así, $\varphi = Tx$ y el gráfico es cerrado. Como E^* es de Banach por la Proposición 2.3, aplicamos el Teorema 2.22. La completitud de E es una hipótesis necesaria para esta aplicación.

Teoremas de Hahn–Banach

3.1 Fundamentos de teoría de conjuntos ordenados

Definición 3.1. Un *orden parcial* en un conjunto $\mathcal{P}$ es una relación $\leq$ que es reflexiva ($x \leq x$), antisimétrica ($x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$) y transitiva ($x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$). Denotamos el conjunto parcialmente ordenado por $(\mathcal{P}, \leq)$.

Ejemplo 3.2. El conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$, ordenado por inclusión $\subseteq$, es parcialmente ordenado.

Definición 3.3. Un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado es una *cadena* si cualesquiera dos de sus elementos son comparables. El orden es *total* si el propio conjunto es una cadena. Una *cota superior* de $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ es un elemento $q \in \mathcal{P}$ tal que $p \leq q$ para todo $p \in \mathcal{Q}$. Un elemento $m \in \mathcal{P}$ es *maximal* si $m \leq p$ implica $p = m$. Esto no exige que m sea mayor que todos los elementos de $\mathcal{P}$.

Lema 3.4 (Zorn). Si $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío y toda cadena admite una cota superior en $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximal.

Usaremos este principio de teoría de conjuntos, equivalente al axioma de elección.

Definición 3.5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto A *genera* V si cada vector de V es una combinación lineal finita de elementos de A ; escribimos $V = \text{span } A$. Un subconjunto B es *linealmente independiente* si cada subconjunto finito suyo lo es. Una *base algebraica* o *base de Hamel* es un conjunto generador linealmente independiente.

Ejemplo 3.6. Los monomios $\{1, x, x^2, \dots\}$ son una base de $\mathbb{R}[x]$, pero no de $C([0, 1]; \mathbb{R})$: por ejemplo, e^x no es una combinación lineal finita de monomios.

Proposición 3.7. Todo conjunto generador A de un espacio vectorial V contiene una base de Hamel de V .

Demostración. Consideremos los pares (W, B) tales que $B \subseteq A$ es linealmente independiente y $W = \text{span } B$, ordenados por inclusión de ambas componentes. La familia no es vacía: contiene $(\{0\}, \emptyset)$. Si $\{(W_i, B_i) : i \in I\}$ es una cadena no vacía, entonces

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \quad B = \bigcup_{i \in I} B_i$$

forman una cota superior de la misma clase. En efecto, toda colección finita de elementos de B está contenida en un mismo B_i , de modo que B es independiente y genera W . La cadena vacía también tiene una cota. Por el lema de Zorn hay un par maximal $(\widetilde{W}, \widetilde{B})$. Si $\widetilde{W} \neq V$, como A genera V , existe $x_0 \in A \setminus \widetilde{W}$. Entonces

$$\widetilde{W} \oplus \text{span}\{x_0\}, \quad \widetilde{B} \cup \{x_0\}$$

definen un par estrictamente mayor, contradicción. Así, $\widetilde{W} = V$. ■

3.2 Teorema de Hahn–Banach: caso real

Teorema 3.8 (Hahn–Banach real). *Sea E un espacio vectorial real y $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal, es decir,*

$$p(tx) = tp(x) \quad (t > 0), \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si $G \subseteq E$ es un subespacio y $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal con $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$, existe una extensión lineal $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de extensiones lineales $\phi : D(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ de φ , donde $G \subseteq D(\phi) \subseteq E$ es un subespacio y $\phi \leq p$. La ordenamos por extensión: $\phi_1 \leq \phi_2$ si $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ y $\phi_2|_{D(\phi_1)} = \phi_1$.

La familia contiene φ . Para una cadena no vacía $\mathcal{Q}$, definimos $D = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$ y $\phi(x) = \theta(x)$ si $x \in D(\theta)$. El orden total de la cadena garantiza que la definición es coherente, que D es un subespacio y que ϕ es lineal y está dominada por p . Es, por tanto, una cota superior. Por Zorn existe un elemento maximal $\tilde{\varphi}$.

Si $D = D(\tilde{\varphi}) \neq E$, elijamos $x_0 \notin D$. Una extensión a $D \oplus \mathbb{R}x_0$ tiene la forma

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\varphi}(x) + t\alpha.$$

Para que esté dominada por p en los vectores $x \pm x_0$, basta escoger

$$\sup_{y \in D} \{\tilde{\varphi}(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D} \{p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)\}. \quad (3.1)$$

Este intervalo no es vacío, pues, para $x, y \in D$,

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) \leq p(x + y) \leq p(y - x_0) + p(x + x_0).$$

Además, tomando $x = 0$ o $y = 0$, los extremos están acotados por números reales; aquí $p(0) = 0$, por homogeneidad.

Si $t > 0$, de (3.1) se obtiene

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = t(\tilde{\varphi}(x/t) + \alpha) \leq tp(x/t + x_0) = p(x + tx_0).$$

Si $t < 0$, pongamos $s = -t > 0$. Entonces

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = s(\tilde{\varphi}(x/s) - \alpha) \leq sp(x/s - x_0) = p(x + tx_0).$$

Para $t = 0$ ya teníamos la desigualdad. Así, $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}$ extiende estrictamente al elemento maximal, contradicción. Por consiguiente, $D(\tilde{\varphi}) = E$. ■

3.3 Teorema de Hahn–Banach: casos real y complejo

Teorema 3.9. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ una seminorma:*

$$p(ax) = |a|p(x), \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si G es un subespacio y $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ es lineal con $|\varphi(x)| \leq p(x)$, existe una extensión lineal $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ con $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. En el caso real, el teorema 3.8 da una extensión dominada por p . Aplicando la desigualdad a $-x$,

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = p(x),$$

por lo que también se obtiene la cota en valor absoluto.

En el caso complejo, escribamos $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, con $\varphi_1 = \operatorname{Re} \varphi$ y $\varphi_2 = \operatorname{Im} \varphi$. Son funcionales *reales* lineales sobre el espacio subyacente $G_{\mathbb{R}}$. La identidad $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ implica $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$. Extendamos φ_1 por el teorema real a $h : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ con $h(x) \leq p(x)$ y definamos

$$\tilde{\varphi}(x) = h(x) - ih(ix).$$

Esta aplicación extiende a φ , es real lineal y cumple

$$\tilde{\varphi}(ix) = h(ix) + ih(x) = i\tilde{\varphi}(x),$$

luego es compleja lineal. Si $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, escribimos $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$. Entonces

$$|\tilde{\varphi}(x)| = \operatorname{Re} \tilde{\varphi}(e^{-i\theta}x) = h(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Si el valor es cero, la desigualdad se sigue de $p \geq 0$. ■

Corolario 3.10 (Extensión sin aumento de norma). *Sea G un subespacio de un espacio normado E . Todo $\varphi \in G^*$ admite una extensión $\tilde{\varphi} \in E^*$ con $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demostración. Aplicamos el teorema 3.9 a $p(x) = \|\varphi\|\|x\|$. La extensión satisface $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. La desigualdad opuesta se obtiene restringiendo el supremo que define la norma a los vectores de G . ■

Corolario 3.11 (Funcional normante). *Si $x_0 \neq 0$ pertenece a un espacio normado E , existe $\varphi \in E^*$ con $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demostración. Sobre $G = \mathbb{K}x_0$, el funcional $tx_0 \mapsto t\|x_0\|$ tiene norma uno. El corolario 3.10 proporciona la extensión buscada. ■

Corolario 3.12 (La norma recuperada del dual). *Para todo espacio normado E y todo $x \in E$,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Demostración. La cota superior se sigue de $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$. Si $x \neq 0$, un funcional normante alcanza la cota; si $x = 0$, ambos miembros son cero. ■

3.4 Proyecciones y extensión de operadores

Una proyección lineal es un operador $P : E \rightarrow E$ tal que $P^2 = P$. Si $\operatorname{ran} P = F$ y $T : F \rightarrow G$ es lineal, entonces $\tilde{T} = T \circ P$ extiende a T . Para obtener una extensión continua necesitamos que tanto T como P sean continuos.

Proposición 3.13. *Sea E un espacio de Banach y $F \subseteq E$ un subespacio. Son equivalentes:*

1. *Existe $P \in \mathcal{L}(E, E)$ con $P^2 = P$ y $\operatorname{ran} P = F$.*
2. *F es cerrado y existe un subespacio cerrado G tal que $E = F \oplus G$.*

En tal caso, $F = \{x : P(x) = x\}$ y se puede tomar $G = \ker P$.

Demostración. Si existe P , entonces $F = \ker(P - I)$ y $G = \ker P$ son cerrados. Todo $x \in E$ se descompone como $Px + (x - Px)$, con el primer sumando en F y el segundo en G . Si $x \in F \cap G$, entonces $x = Px = 0$.

Recíprocamente, definamos $P(x_F + x_G) = x_F$. Es una proyección lineal con imagen F y núcleo G . Para probar su continuidad usamos el teorema del gráfico cerrado. Si $x_n \rightarrow x$ y $Px_n \rightarrow y$, entonces $y \in F$, porque F es cerrado; además, $x_n - Px_n \rightarrow x - y$ pertenece en el límite a G . La unicidad de la descomposición da $Px = y$. El gráfico es cerrado y, como E y F son de Banach, $P : E \rightarrow F$ es continuo. ■

Definición 3.14. Un subespacio F de un espacio de Banach E es *complementado* si cumple las condiciones de la proposición 3.13. Para $\lambda \geq 1$, diremos que es *λ -complementado* si existe una proyección continua sobre F con norma a lo sumo λ . Toda proyección sobre un subespacio no nulo tiene norma al menos uno.

Proposición 3.15. Si F es complementado en un espacio de Banach E y G es un espacio normado, todo $T \in \mathcal{L}(F, G)$ admite una extensión $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$. Si la proyección P satisface $\|P\| \leq \lambda$, puede elegirse $\|\tilde{T}\| \leq \lambda\|T\|$.

Demostración. Basta tomar $\tilde{T} = T \circ P$. ■

Proposición 3.16. Si F no es complementado en el espacio de Banach E , la identidad $I_F : F \rightarrow F$ no admite una extensión lineal continua $T : E \rightarrow F$.

Demostración. Si existiera T , la composición con la inclusión $i : F \hookrightarrow E$ daría $P = i \circ T$. Como $T|_F = I_F$, tendríamos $P^2 = P$ e imagen F , contradiciendo la proposición 3.13. ■

Ejemplo 3.17. El espacio c_{00} de sucesiones de soporte finito no es cerrado en c_0 con la norma del supremo: los truncamientos de $(1/n)_{n \geq 1}$ pertenecen a c_{00} y convergen a una sucesión que no está en c_{00} . Por tanto, no existe una proyección continua de c_0 sobre c_{00} , ni una extensión continua $T : c_0 \rightarrow c_{00}$ de $I_{c_{00}}$. La inclusión $c_{00} \hookrightarrow c_0$ sí se extiende a I_{c_0} ; el codominio es esencial.

Teorema 3.18 (Extensión con valores en ℓ^∞). Sea F un subespacio de un espacio normado E y $T \in \mathcal{L}(F, \ell^\infty)$. Existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ tal que $\tilde{T}|_F = T$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Para cada n , sea $\pi_n : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{K}$ la evaluación en la coordenada n , de norma uno. Por el corolario 3.10, $\pi_n \circ T$ admite una extensión $\psi_n \in E^*$ de la misma norma. Definimos

$$\tilde{T}(x) = (\psi_n(x))_{n \geq 1}.$$

Está bien definida porque $|\psi_n(x)| \leq \|T\|\|x\|$ uniformemente en n . Es lineal y extiende a T . Además,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_n |\psi_n(x)| = \sup_n \|\psi_n\| = \sup_n \|\pi_n \circ T\| \\ &= \sup_{x \in F, \|x\| \leq 1} \sup_n |\pi_n(Tx)| = \|T\|. \end{aligned}$$

■

Observación 3.19. Este resultado se presenta como teorema de Phillips en los apuntes originales. Su demostración es la aplicación coordinada a coordinada de Hahn–Banach.

Corolario 3.20. *Toda copia isométrica de ℓ^∞ en un espacio de Banach E es 1-complementada.*

Demostración. Sea $i : \ell^\infty \rightarrow E$ una isometría lineal y $F = i(\ell^\infty)$. El teorema 3.18 extiende $i^{-1} : F \rightarrow \ell^\infty$ a $T : E \rightarrow \ell^\infty$ de norma uno. Entonces $P = i \circ T$ es una proyección sobre F y $\|P\| = 1$. ■

3.5 Distancia a subespacios y separabilidad

Definición 3.21. Para $A \neq \emptyset$ en un espacio normado E ,

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Proposición 3.22. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado E y $y_0 \notin M$. Existe $\varphi \in E^*$ con*

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi(y_0) = d(y_0, M), \quad \varphi|_M = 0.$$

Demostración. Escribamos $d = d(y_0, M) > 0$. En $N = M \oplus \mathbb{K}y_0$ definimos $\varphi_0(x + ay_0) = ad$. Si $a \neq 0$,

$$\|x + ay_0\| = |a|\|y_0 + x/a\| \geq |a|d = |\varphi_0(x + ay_0)|;$$

para $a = 0$ la desigualdad también vale. Así, $\|\varphi_0\| \leq 1$. Para $\varepsilon > 0$ elijamos $x_\varepsilon \in M$ con $d \leq \|y_0 - x_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. El vector

$$z_\varepsilon = \frac{y_0 - x_\varepsilon}{\|y_0 - x_\varepsilon\|}$$

tiene norma uno y $\varphi_0(z_\varepsilon) > d/(d + \varepsilon)$. Por tanto, $\|\varphi_0\| = 1$. El corolario 3.10 permite extenderla desde N a E sin aumentar la norma. ■

Teorema 3.23. *Si E^* es separable, entonces E es separable.*

Demostración. El caso $E = \{0\}$ es inmediato. En otro caso, la esfera unitaria de E^* es separable, como subconjunto de un espacio métrico separable. Sea $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ denso en ella. Elijamos $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ y $|\varphi_n(x_n)| > 1/2$.

Sea $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \geq 1\}}$. Si $M \neq E$, la proposición 3.22 proporciona $\varphi \in E^*$ de norma uno que se anula en M . Entonces

$$\|\varphi - \varphi_n\| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| > 1/2$$

para todo n , contradiciendo la densidad. Así, $M = E$. Las combinaciones lineales finitas de los x_n con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (o en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) forman un subconjunto numerable y denso de E . El espacio generado sobre $\mathbb{K}$ no tiene por qué ser numerable. ■

Proposición 3.24. *Todo espacio normado separable admite una isometría lineal en ℓ^∞ .*

Demostración. Para $E = \{0\}$ no hay nada que demostrar. Elijamos un conjunto numerable denso $D = \{x_n : n \geq 1\} \subset E \setminus \{0\}$. Por el corolario 3.11, existen $\varphi_n \in E^*$ con $\|\varphi_n\| = 1$ y $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Definamos

$$Tx = (\varphi_n(x))_{n \geq 1}.$$

Como $|\varphi_n(x)| \leq \|x\|$, esta aplicación es lineal, está bien definida y $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|$. Para cada k ,

$$\|Tx_k\|_\infty \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\|.$$

Hay igualdad en D y, por continuidad de T y de la norma, en todo E . ■

3.6 Formas geométricas del teorema de Hahn–Banach

En esta sección, hasta la observación sobre el caso complejo, E es un espacio normado real. Buscamos separar conjuntos convexos mediante funcionales continuos: primero punto a punto, y bajo hipótesis más fuertes mediante una brecha positiva uniforme.

Definición 3.25. Un *hiperplano vectorial* de un espacio vectorial real $V \neq \{0\}$ es un subespacio propio H que es maximal entre los subespacios propios: si $H \subseteq W \subseteq V$, entonces $W = H$ o $W = V$.

Proposición 3.26. Un subespacio H de V es un hiperplano si y solo si $H = \ker \varphi$ para algún funcional lineal no nulo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Si H es un hiperplano, elijamos $v_0 \notin H$. Entonces $V = H \oplus \mathbb{R}v_0$ y $\varphi(h + av_0) = a$ es el funcional buscado. Recíprocamente, si $H = \ker \varphi$ y $H \subsetneq W$, escojamos $v_0 \in W \setminus H$. Para todo $v \in V$,

$$v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in H \subseteq W,$$

así que $v \in W$ y $W = V$. ■

Definición 3.27. Un *hiperplano afín* es un trasladado $H + v_0$ de un hiperplano vectorial. Por la proposición 3.26, es un conjunto de la forma

$$[\varphi = a] = \{v : \varphi(v) = a\}, \quad \varphi \neq 0.$$

Proposición 3.28. Un hiperplano afín $[\varphi = a]$ de E es cerrado si y solo si φ es continuo.

Demostración. Si φ es continuo, el hiperplano es la preimagen del cerrado $\{a\}$. Recíprocamente, supongamos que es cerrado. Cambiando simultáneamente los signos de φ y a si hace falta, elijamos x_0 con $\varphi(x_0) < a$ y una bola $B(x_0, r)$ que no corte al hiperplano. En toda la bola se cumple $\varphi(x) < a$: de lo contrario, un segmento que una x_0 con un punto de valor mayor que a contendría un punto del hiperplano dentro de la bola. Para $\|z\| < 1$, tanto $x_0 + rz$ como $x_0 - rz$ están en la bola, luego

$$|\varphi(z)| < \frac{a - \varphi(x_0)}{r}.$$

Al tomar el supremo obtenemos una cota finita para $\|\varphi\|$ (con desigualdad no estricta), y φ es continuo. ■

Definición 3.29 (Funcional de Minkowski). Si $C \subseteq E$ es convexo y abierto, con $0 \in C$, definimos

$$p_C(x) = \inf\{a > 0 : x/a \in C\}.$$

Proposición 3.30. *El funcional de Minkowski está bien definido, toma valores en $[0, \infty)$ y satisface:*

1. $p_C(tx) = tp_C(x)$ para $t > 0$;
2. $C = \{x : p_C(x) < 1\}$;
3. existe $M > 0$ tal que $p_C(x) \leq M\|x\|$;
4. $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

Demostración. Como $B(0, r) \subseteq C$ para algún $r > 0$, todo vector pertenece a aC para a suficientemente grande; además, $p_C(0) = 0$. La homogeneidad se obtiene mediante el cambio de variable $a = tb$ en el ínfimo.

Si $x \in C$ y $x \neq 0$, la apertura permite elegir $\varepsilon > 0$ con $(1 + \varepsilon)x \in C$, de modo que $p_C(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$. Para $x = 0$ es inmediato. Recíprocamente, si $p_C(x) < 1$, existe $0 < a < 1$ con $x/a \in C$, y la convexidad da $x = a(x/a) + (1 - a)0 \in C$.

Fijado $0 < s < r$, para $x \neq 0$ tenemos $sx/\|x\| \in C$. Por los incisos anteriores, $p_C(x) < \|x\|/s$; el caso $x = 0$ es inmediato.

Finalmente, para $\varepsilon > 0$ escribamos $a = p_C(x) + \varepsilon$ y $b = p_C(y) + \varepsilon$. Ambos son positivos, y $x/a, y/b \in C$. Por convexidad,

$$\frac{x + y}{a + b} = \frac{a}{a + b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a + b} \frac{y}{b} \in C.$$

Así, $p_C(x + y) < a + b = p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$. Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos la subaditividad. ■

Lema 3.31. *Si $C \subsetneq E$ es convexo, abierto y no vacío, y $x_0 \notin C$, existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Demostración. Elijamos $z_0 \in C$ y pongamos $D = C - z_0$, $y_0 = x_0 - z_0$. Entonces $0 \in D$ y $y_0 \notin D$, de modo que $p_D(y_0) \geq 1$. En $\mathbb{R}y_0$ definimos $g(ty_0) = tp_D(y_0)$. Para $t > 0$ coincide con $p_D(ty_0)$; para $t \leq 0$, $g(ty_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0)$. Hahn–Banach real da una extensión $\varphi \leq p_D$. Aplicando la cota $p_D(x) \leq M\|x\|$ a x y $-x$, obtenemos $|\varphi(x)| \leq M\|x\|$. Para $x \in C$,

$$\varphi(x - z_0) \leq p_D(x - z_0) < 1 \leq p_D(y_0) = \varphi(x_0 - z_0).$$

La linealidad concluye la separación y $\varphi(y_0) \geq 1$ garantiza que $\varphi \neq 0$. ■

Lema 3.32. *Si $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ y $C \subseteq E$ es convexo, abierto y no vacío, entonces $\varphi(C)$ es un intervalo abierto.*

Demostración. La imagen es convexa en $\mathbb{R}$, luego es un intervalo. Para $x \in C$, elijamos $z \in E$ con $\varphi(z) = 1$ y $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq C$. Si $|t| < r/\|z\|$, entonces $x + tz \in C$ y $\varphi(x + tz) = \varphi(x) + t$. Cada punto de la imagen es interior. ■

Teorema 3.33 (Primera forma geométrica). Sean $A, B \subseteq E$ convexos, no vacíos y disjuntos. Si A es abierto, existen $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y) \quad (x \in A, y \in B).$$

Se dice que el hiperplano cerrado $[\varphi = a]$ separa A y B .

Demostración. El conjunto $C = A - B$ es no vacío, convexo y abierto: es la unión de los abiertos $A - y$, con $y \in B$. Además, $0 \notin C$. El lema 3.31 da $\varphi \neq 0$ con $\varphi(x - y) < 0$, es decir,

$$\varphi(x) < \varphi(y) \quad (x \in A, y \in B).$$

Como $B \neq \emptyset$, $\varphi(A)$ está acotado superiormente. Sea $a = \sup \varphi(A)$. Entonces $a \leq \varphi(y)$ para todo $y \in B$. Por el lema 3.32, $\varphi(A)$ es abierto, así que no contiene su supremo: $\varphi(x) < a$ para todo $x \in A$. ■

Teorema 3.34 (Segunda forma geométrica). Sean $A, B \subseteq E$ convexos, no vacíos y disjuntos. Si A es cerrado y B es compacto, existen $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ y $a < b$ tales que

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \quad (x \in A, y \in B).$$

Para $c \in (a, b)$, el hiperplano $[\varphi = c]$ separa estrictamente los conjuntos.

Demostración. Existe $\varepsilon > 0$ tal que los conjuntos abiertos y convexos $A + B(0, \varepsilon)$ y $B + B(0, \varepsilon)$ son disjuntos. Si no, para cada n habría $x_n \in A$, $y_n \in B$ y $z_n, w_n \in B(0, 1/n)$ con $x_n + z_n = y_n + w_n$, por lo que $\|x_n - y_n\| < 2/n$. La compacidad proporciona una subsucesión $y_{n_k} \rightarrow y \in B$; entonces $x_{n_k} \rightarrow y$, y la cerradura de A implicaría $y \in A$, contradicción.

Aplicamos el teorema 3.33 a esos conjuntos engrosados. Existen $\varphi \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que, tomando supremos e ínfimos sobre las bolas,

$$\varphi(x) + \varepsilon\|\varphi\| \leq c \leq \varphi(y) - \varepsilon\|\varphi\| \quad (x \in A, y \in B).$$

Aquí $\sup_{\|z\| < \varepsilon} \varphi(z) = \varepsilon\|\varphi\|$ e $\inf_{\|z\| < \varepsilon} \varphi(z) = -\varepsilon\|\varphi\|$. Basta tomar $a = c - \varepsilon\|\varphi\|/2$ y $b = c + \varepsilon\|\varphi\|/2$. ■

La Figura 3.1 representa la separación estricta: el funcional sitúa un conjunto por debajo de a y el otro por encima de b , con una franja intermedia de ancho positivo en los valores de φ .

Observación 3.35. En un espacio complejo, las formas geométricas se expresan con $\operatorname{Re} \varphi$ y convexidad real. Se aplica el resultado al espacio real subyacente; si el separador real es h , el funcional complejo $\varphi(x) = h(x) - ih(ix)$ satisface $\operatorname{Re} \varphi = h$.

Corolario 3.36. Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Para todo $x_0 \notin M$ existe $\varphi \in E^*$ con $\varphi(x_0) = 1$ y $\varphi|_M = 0$.

Demostración. En el caso real, la segunda forma geométrica separa M de $\{x_0\}$ por un funcional ψ acotado superiormente en M . Como M es un subespacio, $\psi|_M = 0$; además, $\psi(x_0) > 0$, luego sirve $\psi/\psi(x_0)$. Sobre ambos cuerpos basta normalizar el funcional de la proposición 3.22 por $d(x_0, M)$. ■

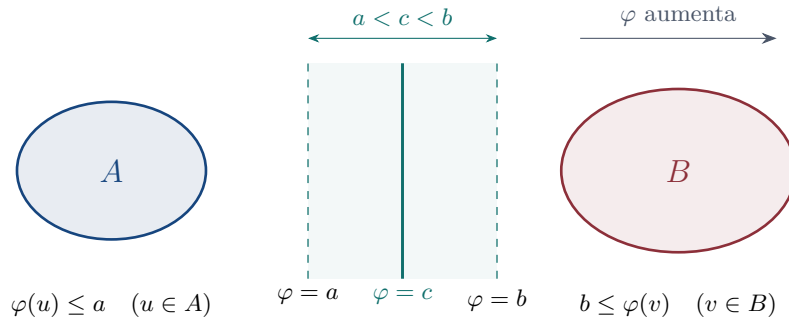


Figura 3.1. Separación estricta de dos convexos: una franja $a < \varphi < b$ queda entre ellos y cualquier hiperplano $\varphi = c$, con $a < c < b$, los separa. El dibujo representa un funcional real; en un espacio complejo se aplica la separación a $\operatorname{Re} \varphi$.

Corolario 3.37. *Para cualquier subespacio M de un espacio normado E ,*

$$\overline{M} = \bigcap \{ \ker \varphi : \varphi \in E^*, M \subseteq \ker \varphi \}.$$

Demostración. Los núcleos indicados son cerrados y contienen M , luego contienen $\overline{M}$. Si $x_0 \notin \overline{M}$, el corolario 3.36 da un funcional nulo en $\overline{M}$ y de valor uno en x_0 , que excluye a x_0 de la intersección. ■

Dualidad y reflexividad

4.1 El dual de los espacios $L^p(\mu)$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para $1 < p < \infty$, denotamos por q el exponente conjugado de p , determinado por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $p = 1$, ponemos $q = \infty$. Trabajamos con clases de funciones iguales casi en todas partes. La identificación del dual será *bilineal*: usamos $\int_X fg \, d\mu$, incluso sobre $\mathbb{C}$. Con esta convención, la aplicación $g \mapsto \varphi_g$ es lineal. En un espacio de Hilbert complejo, en cambio, el producto interno será lineal en su primera entrada; así, para L^2 , $\int fg \, d\mu = \langle f, \bar{g} \rangle$.

Ejemplo 4.1 (Funcionales definidos por integración). Para $1 \leq p < \infty$ y $g \in L^q(\mu)$, definimos

$$\varphi_g : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_g(f) = \int_X fg \, d\mu.$$

La desigualdad de Hölder da

$$|\varphi_g(f)| \leq \int_X |fg| \, d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

por lo que $\varphi_g \in L^p(\mu)^*$ y $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Hay igualdad para $1 < p < \infty$ sin hipótesis adicional sobre la medida; también la hay para $p = 1$ cuando μ es σ -finita.

Para demostrarlo, el caso $g = 0$ es inmediato. Si $1 < p < \infty$ y $g \neq 0$, tomamos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|^{q-1} \overline{g(x)}}{\|g\|_q^{q-1} |g(x)|}, & g(x) \neq 0, \\ 0, & g(x) = 0. \end{cases}$$

Como $(q-1)p = q$,

$$\|f\|_p^p = \frac{\int_X |g|^q \, d\mu}{\|g\|_q^{(q-1)p}} = 1, \quad \varphi_g(f) = \frac{\int_X |g|^q \, d\mu}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q.$$

La conjugación utiliza la identidad $g\bar{g} = |g|^2$.

Si $p = 1$ y μ es σ -finita, sea $0 < a < \|g\|_\infty$. Por definición del supremo esencial, el conjunto $A = \{|g| > a\}$ tiene medida positiva. Escribiendo $X = \bigcup_n A_n$ con $\mu(A_n) < \infty$, encontramos $B = A \cap A_n$ con $0 < \mu(B) < \infty$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\overline{g(x)}}{\mu(B)|g(x)|}, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Entonces $\|f\|_1 = 1$ y

$$\|\varphi_g\| \geq \varphi_g(f) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu > a.$$

Haciendo $a \uparrow \|g\|_\infty$ concluimos $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Teorema 4.2 (Dualidad de L^p). Sea $1 \leq p < \infty$. Si $p = 1$, supongamos además que μ es σ -finita. La aplicación

$$\Phi : L^q(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)^*, \quad \Phi(g) = \varphi_g, \quad \varphi_g(f) = \int_X fg d\mu,$$

es un isomorfismo isométrico. Para $1 < p < \infty$ el resultado vale en cualquier espacio de medida.

Demostración. Por el ejemplo 4.1, sólo falta probar la sobreyectividad. Fijemos $\varphi \in L^p(\mu)^*$ y escribamos $C = \|\varphi\|$.

Primer caso: $\mu(X) < \infty$. Para $A \in \Sigma$ definimos $\nu(A) = \varphi(\mathbf{1}_A)$; la indicadora pertenece a $L^p(\mu)$. Si los conjuntos A_j son disjuntos, las indicadoras de sus uniones finitas convergen en L^p a la de la unión numerable, pues

$$\left\| \mathbf{1}_{\bigcup_{j \geq 1} A_j} - \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \right\|_p^p = \mu \left(\bigcup_{j > n} A_j \right) \longrightarrow 0.$$

Por continuidad de φ , ν es numerablemente aditiva. Es una medida con signo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y una medida compleja si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, no necesariamente positiva. Tiene variación finita: para una partición finita (A_j) elijamos escalares α_j con $|\alpha_j| \leq 1$ y $\alpha_j \nu(A_j) = |\nu(A_j)|$. Entonces

$$\sum_j |\nu(A_j)| = \varphi \left(\sum_j \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \leq C \mu(X)^{1/p}.$$

Además, $\nu \ll \mu$, porque $\mu(A) = 0$ implica $\mathbf{1}_A = 0$ como elemento de L^p . Por el teorema de Radon–Nikodym para medidas con signo o complejas, existe $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\nu(A) = \int_A g d\mu.$$

La linealidad da $\varphi(f) = \int_X fg d\mu$ para funciones simples. La aproximación uniforme por funciones simples extiende esta igualdad a toda función medible acotada: la convergencia uniforme implica convergencia en L^p cuando la medida es finita, y permite pasar al límite en la integral porque $g \in L^1$.

Verifiquemos el paso, llamado a veces inverso de Hölder, de $g \in L^1$ a $g \in L^q$. Si $p > 1$, pongamos

$$f_n = \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}} |g|^{q-1} \frac{\bar{g}}{|g|}, \quad \frac{\bar{g}}{|g|} = 0 \text{ en } \{g = 0\}.$$

Estas funciones son acotadas. Para $A_n = \int_{\{|g| \leq n\}} |g|^q d\mu$ obtenemos

$$A_n = \varphi(f_n) \leq C \|f_n\|_p = C A_n^{1/p}.$$

Si $A_n > 0$, esto implica $A_n^{1/q} \leq C$; si $A_n = 0$, la cota es trivial. Por convergencia monótona, $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq C$.

Si $p = 1$, para $a > C$ el conjunto $B = \{|g| > a\}$ debe ser nulo. En caso contrario, usando $f = \mathbf{1}_B \bar{g}/|g|$, que es acotada, tendríamos

$$a\mu(B) < \int_B |g| d\mu = \varphi(f) \leq C\|f\|_1 = C\mu(B),$$

contradicción. Así, $\|g\|_\infty \leq C$.

En ambos casos, Hölder hace continuo a φ_g en L^p . La densidad de las funciones simples en L^p , para $p < \infty$, concluye $\varphi = \varphi_g$.

Segundo caso: μ es σ -finita. Elijamos conjuntos disjuntos X_n de medida finita cuya unión sea X . La restricción de φ a las funciones soportadas en X_n está representada por $g_n \in L^q(X_n)$. Definimos $g = g_n$ en X_n . Para $Y_N = \bigcup_{n \leq N} X_n$, el primer caso y la unicidad de la representación muestran que $g\mathbf{1}_{Y_N}$ representa la restricción a Y_N y

$$\|g\mathbf{1}_{Y_N}\|_q \leq C.$$

Si $q < \infty$, la convergencia monótona da $g \in L^q$; si $q = \infty$, la cota esencial uniforme en los conjuntos X_n da la misma conclusión. Para todo $f \in L^p$, $f\mathbf{1}_{Y_N} \rightarrow f$ en L^p . Pasando al límite mediante continuidad y Hölder obtenemos $\varphi(f) = \int_X fg d\mu$.

Tercer caso: medida arbitraria y $1 < p < \infty$. Si $C = 0$, tomamos $g = 0$. Si $C > 0$, elijamos $f_n \in L^p$ con $\|f_n\|_p = 1$ y, ajustando una fase, $\varphi(f_n) \in \mathbb{R}$ y $\varphi(f_n) \rightarrow C$. Cada f_n está soportada en un conjunto σ -finito, ya que

$$\{f_n \neq 0\} = \bigcup_{k \geq 1} \{|f_n| > 1/k\}, \quad \mu(\{|f_n| > 1/k\}) \leq k^p \|f_n\|_p^p.$$

Sea S la unión de esos soportes. Es σ -finito y la restricción de φ a $L^p(S)$ tiene norma C , por lo que el caso anterior la representa mediante $g_S \in L^q(S)$.

Afirmamos que φ se anula en las funciones soportadas en $X \setminus S$. Si existiera una de norma uno, h , con $b = \varphi(h) > 0$ tras ajustar su fase, los soportes disjuntos darían, para $t > 0$,

$$\varphi(f_n) + tb = \varphi(f_n + th) \leq C\|f_n + th\|_p = C(1 + t^p)^{1/p}.$$

Al pasar a $n \rightarrow \infty$ y dividir por t ,

$$b \leq C \frac{(1 + t^p)^{1/p} - 1}{t} \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0),$$

contradicción, porque $p > 1$. Extendiendo g_S por cero fuera de S , obtenemos $g \in L^q(\mu)$ y, para toda $f \in L^p$,

$$\varphi(f) = \varphi(f\mathbf{1}_S) = \int_S fg_S d\mu = \int_X fg d\mu.$$

Esto concluye la sobreyectividad en toda la generalidad del enunciado. ■

Observación 4.3 (Separabilidad y los casos extremos). Una aplicación continua sobreyectiva lleva un conjunto denso numerable a un conjunto denso numerable. En particular, un isomorfismo isométrico preserva separabilidad. Junto con el teorema 3.23, esto tiene dos consecuencias:

1. Para la medida de conteo en $\mathbb{N}$, el teorema 4.2 da $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$. Así, el dual de un espacio separable no tiene por qué ser separable.

2. No se puede extender en general el teorema a $p = \infty$. Si la aplicación de integración identificara $(\ell^\infty)^*$ con ℓ^1 , el dual $(\ell^\infty)^*$ sería separable; entonces ℓ^∞ también lo sería, contradicción.

Usamos aquí que ℓ^1 es separable y ℓ^∞ no lo es, hechos estudiados en el capítulo 1. No se está afirmando que todos los espacios L^1 o L^∞ sean no reflexivos: por ejemplo, los casos de dimensión finita sí lo son.

4.2 Los espacios ℓ^p y c_0

Teorema 4.4. *El operador*

$$\Phi : \ell^1 \longrightarrow (c_0)^*, \quad b = (b_j) \longmapsto \varphi_b, \quad \varphi_b((a_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j,$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Para $b \in \ell^1$ y $a \in c_0$, la serie converge absolutamente y

$$|\varphi_b(a)| \leq \|a\|_\infty \sum_j |b_j| = \|a\|_\infty \|b\|_1.$$

Así, $\|\varphi_b\| \leq \|b\|_1$.

Dado $\varphi \in (c_0)^*$, pongamos $b_j = \varphi(e_j)$. Para cada n , definamos $a^{(n)} \in c_{00}$ por

$$a_j^{(n)} = \begin{cases} \overline{b_j}/|b_j|, & j \leq n, \ b_j \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\|a^{(n)}\|_\infty \leq 1$ y

$$\sum_{j=1}^n |b_j| = \sum_{j=1}^n a_j^{(n)} b_j = \varphi(a^{(n)}) \leq \|\varphi\|.$$

Al pasar al límite, $b \in \ell^1$ y $\|b\|_1 \leq \|\varphi\|$.

Si $a = (a_j) \in c_0$, sus truncamientos $\sum_{j \leq n} a_j e_j$ convergen a a en la norma del supremo. Por continuidad,

$$\varphi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j = \varphi_b(a).$$

Esto prueba la sobreyectividad. Aplicando las dos cotas anteriores al funcional φ_b , se obtiene $\|\varphi_b\| = \|b\|_1$, por lo que Φ también es inyectivo. ■

4.3 Bidual y espacios reflexivos

Para un espacio normado E , su *bidual* es $E^{**} = (E^*)^*$.

Proposición 4.5 (Encaje canónico). *La aplicación*

$$J_E : E \longrightarrow E^{**}, \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \quad (\varphi \in E^*),$$

es una isometría lineal.

Demostración. Para cada $x \in E$, la evaluación $J_E(x)$ es lineal en φ , y

$$|J_E(x)(\varphi)| \leq \|\varphi\| \|x\|.$$

Por tanto, pertenece a E^{**} . La linealidad en x es inmediata. Por el corolario 3.12,

$$\|J_E(x)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| = \|x\|.$$

■

Proposición 4.6 (Completación mediante el bidual). *Todo espacio normado E admite una completación: existe un espacio de Banach $\hat{E}$ que contiene una copia isométrica densa de E .*

Demostración. Tomamos $\hat{E} = \overline{J_E(E)} \subseteq E^{**}$. Es de Banach por ser cerrado en el espacio de Banach E^{**} . La copia $J_E(E)$ es isométrica a E y densa en $\hat{E}$. No se afirma que $\hat{E}$ coincida con $J_E(E)$ si E es incompleto. ■

Definición 4.7. Un espacio normado E es *reflexivo* si el encaje canónico $J_E : E \rightarrow E^{**}$ es sobreyectivo.

Proposición 4.8. *Todo espacio normado reflexivo es de Banach.*

Demostración. En ese caso, J_E identifica isométricamente a E con el espacio de Banach E^{**} . ■

Ejemplo 4.9. Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo: si $\dim E = n$, también $\dim E^* = \dim E^{**} = n$, y el operador lineal inyectivo J_E debe ser sobreyectivo. En cambio, c_{00} con la norma del supremo no es completo, como muestran los truncamientos de $(1/n)_{n \geq 1}$; por la proposición 4.8, no es reflexivo.

Proposición 4.10. *Si E es separable y reflexivo, entonces E^* es separable.*

Demostración. El isomorfismo isométrico J_E implica que E^{**} es separable. Aplicamos el teorema 3.23 al espacio E^* . ■

Ejemplo 4.11. El espacio ℓ^1 no es reflexivo. En efecto, es separable, pero su dual ℓ^∞ no lo es, en contradicción con la proposición 4.10 si se supusiera reflexividad.

4.3.1 El operador adjunto

Definición 4.12. Sean E, F espacios normados y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Su *adjunto de Banach* es

$$T^* : F^* \longrightarrow E^*, \quad T^*(\varphi) = \varphi \circ T.$$

En particular, $(T^*\varphi)(x) = \varphi(Tx)$. Este operador actúa entre espacios duales. Debe distinguirse del adjunto de Hilbert $T^\dagger$, definido mediante el producto interno en el capítulo 8.

Proposición 4.13. *Para $\varphi \in F^*$, el funcional $T^*\varphi$ es continuo y*

$$\|T^*\varphi\| \leq \|T\| \|\varphi\|.$$

Demostración. Para todo $x \in E$,

$$|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leq \|\varphi\| \|Tx\| \leq \|\varphi\| \|T\| \|x\|.$$

■

Ejemplo 4.14 (Desplazamientos). Para $1 \leq p < \infty$, el desplazamiento a la izquierda

$$T : \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad T(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$$

es lineal continuo, de norma uno. Bajo la identificación $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ del teorema 4.2, un elemento $b \in \ell^q$ representa $\varphi_b(a) = \sum_{j \geq 1} a_j b_j$. Entonces

$$(T^*\varphi_b)(a) = \sum_{j \geq 1} a_{j+1} b_j = \varphi_{(0, b_1, b_2, \dots)}(a).$$

Por tanto, el adjunto es el desplazamiento a la derecha $b \mapsto (0, b_1, b_2, \dots)$ en ℓ^q , incluido $q = \infty$ cuando $p = 1$.

Proposición 4.15. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ y $\|T^*\| = \|T\|$. Si T es un isomorfismo de espacios normados, T^* también lo es, con inverso $(T^{-1})^*$. Si T es, además, isométrico, T^* es un isomorfismo isométrico.

Demostración. La linealidad es inmediata, y la proposición anterior da $\|T^*\| \leq \|T\|$. Para la desigualdad opuesta usamos el corolario 3.12:

$$\|Tx\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(Tx)| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(T^*\varphi)(x)| \leq \|T^*\| \|x\|.$$

Luego $\|T\| \leq \|T^*\|$.

Si T es un isomorfismo, la composición con T^{-1} muestra directamente que $(T^{-1})^* T^* = I_{F^*}$ y $T^* (T^{-1})^* = I_{E^*}$. Si también es isométrico, lleva la bola unitaria de E sobre la de F , por lo que

$$\|T^*\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(Tx)| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi(y)| = \|\varphi\|.$$

■

Proposición 4.16. Si $1 < p < \infty$, los espacios $L^p(\mu)$ son reflexivos para cualquier medida μ . En particular, ℓ^p es reflexivo.

Demostración. Sea q conjugado de p . Por el teorema 4.2, las aplicaciones

$$T : L^q \rightarrow (L^p)^*, \quad T(g)(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad S : L^p \rightarrow (L^q)^*, \quad S(f)(g) = \int_X fg \, d\mu$$

son isomorfismos isométricos. Por la proposición 4.15, también lo es

$$(T^{-1})^* \circ S : L^p \longrightarrow (L^p)^{**}.$$

No basta exhibir un isomorfismo cualquiera con el bidual: debemos comprobar que es el encaje canónico. Dado $\varphi = T(g) \in (L^p)^*$,

$$((T^{-1})^* S(f))(\varphi) = S(f)(T^{-1}\varphi) = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) = J_{L^p}(f)(\varphi).$$

Así, el operador compuesto es J_{L^p} y éste es sobreyectivo.

■

Proposición 4.17. *Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y solo si E^* es reflexivo.*

Demostración. Si E es reflexivo, $J_E : E \rightarrow E^{**}$ es un isomorfismo isométrico, y lo mismo vale para $(J_E)^* : E^{***} \rightarrow E^*$. Para $\Psi \in E^{***}$, pongamos $\varphi = (J_E)^* \Psi$. Para todo $x \in E$,

$$J_{E^*}(\varphi)(J_E x) = J_E x(\varphi) = \varphi(x) = \Psi(J_E x).$$

Como J_E es sobreyectivo, esto implica $J_{E^*}(\varphi) = \Psi$. Luego E^* es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que E^* es reflexivo. Como E es completo y J_E es isometría, $J_E(E)$ es cerrado en E^{**} . Si fuera propio, el corolario 3.36 produciría $\Psi \in E^{***} \setminus \{0\}$ que se anula en $J_E(E)$. Por reflexividad de E^* , $\Psi = J_{E^*}(\varphi)$ para alguna $\varphi \in E^*$. Entonces

$$0 = \Psi(J_E x) = J_E x(\varphi) = \varphi(x) \quad (x \in E).$$

Así, $\varphi = 0$ y $\Psi = 0$, contradicción. Por tanto, $J_E(E) = E^{**}$. ■

Ejemplo 4.18. El espacio ℓ^∞ no es reflexivo porque es isométricamente isomorfo a $(\ell^1)^*$, mientras que ℓ^1 no es reflexivo. Asimismo, c_0 no es reflexivo: su dual es ℓ^1 . Aquí se usa la invariancia por isomorfismos, demostrada en la proposición 4.20.

4.3.2 Resultados adicionales

Proposición 4.19. *Si E es reflexivo, todo $\varphi \in E^*$ alcanza su norma en la bola unitaria cerrada. Si $E \neq \{0\}$, se puede encontrar $x \in E$ con $\|x\| = 1$ y $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$.*

Demostración. Si $\varphi \neq 0$, aplicamos el corolario 3.11 al espacio E^* : existe $\Psi \in E^{**}$ con $\|\Psi\| = 1$ y $\Psi(\varphi) = \|\varphi\|$. La reflexividad permite escribir $\Psi = J_E x$, con $\|x\| = 1$, y entonces $\varphi(x) = \|\varphi\|$. Para $\varphi = 0$, sirve cualquier vector unitario si $E \neq \{0\}$, y el vector cero siempre pertenece a la bola cerrada. ■

Proposición 4.20. *Si E y F son espacios normados isomorfos y E es reflexivo, entonces F también lo es.*

Demostración. Sea $T : E \rightarrow F$ un isomorfismo lineal continuo con inverso continuo. Por la proposición 4.15, $T^{**} : E^{**} \rightarrow F^{**}$ es un isomorfismo. Para $x \in E$ y $\varphi \in F^*$,

$$(T^{**} J_E x)(\varphi) = J_E x(T^* \varphi) = \varphi(Tx) = (J_F Tx)(\varphi).$$

Así, $T^{**} J_E = J_F T$. El miembro izquierdo es sobreyectivo, de modo que J_F es sobreyectivo. ■

Proposición 4.21. *Todo subespacio cerrado F de un espacio reflexivo E es reflexivo.*

Demostración. Sea $\psi \in F^{**}$. La restricción $R : E^* \rightarrow F^*$, $R\varphi = \varphi|_F$, es continua, de norma a lo sumo uno, y sobreyectiva por Hahn–Banach. Definamos

$$\Phi : E^* \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(\varphi) = \psi(\varphi|_F).$$

Es lineal y $|\Phi(\varphi)| \leq \|\psi\| \|\varphi|_F\| \leq \|\psi\| \|\varphi\|$, así que $\Phi \in E^{**}$. La reflexividad de E da $x \in E$ con $J_E x = \Phi$.

Si $x \notin F$, como F es cerrado, el corolario 3.36 proporciona $\varphi_0 \in E^*$ con $\varphi_0|_F = 0$ y $\varphi_0(x) = 1$. Pero entonces

$$1 = \varphi_0(x) = J_E x(\varphi_0) = \Phi(\varphi_0) = \psi(0) = 0,$$

contradicción. Por tanto, $x \in F$. Dado $f^* \in F^*$, tomamos una extensión $\varphi \in E^*$; se obtiene

$$\psi(f^*) = \Phi(\varphi) = \varphi(x) = f^*(x) = J_F x(f^*).$$

Luego $\psi = J_F x$, y F es reflexivo. ■

Espacios de Hilbert

5.1 Espacios con producto interno

En $\mathbb{R}^n$, la geometría euclídea está descrita por $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ y $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$. Generalizaremos estas identidades a espacios reales y complejos, sin suponer que su dimensión sea finita.

Definición 5.1 (Producto interno). Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ que cumple

- a) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;
- b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- d) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.

En todo el texto el producto interno es lineal en la primera entrada y conjugado-lineal en la segunda. En particular,

$$\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle x, y_2 \rangle, \quad \langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0.$$

Si $\langle z, y_1 \rangle = \langle z, y_2 \rangle$ para todo z , entonces $y_1 = y_2$: basta poner $z = y_1 - y_2$. Sobre $\mathbb{R}$, el producto interno es bilineal y simétrico.

Definición 5.2. La función $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ se llama norma inducida por el producto interno. Verificaremos enseguida que es una norma.

Ejemplo 5.3. En $\mathbb{K}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ induce la norma euclídea. En ℓ^2 , la expresión $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ está bien definida por Hölder e induce la norma $\|\cdot\|_2$.

Ejemplo 5.4. En $L^2(\mu)$, el producto

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

está bien definido por Hölder e induce la norma $\|\cdot\|_2$. Trabajamos con clases de funciones iguales casi en todas partes; en el espacio de funciones sin tomar ese cociente solo se obtiene una seminorma.

Proposición 5.5 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz). *En un espacio con producto interno, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Hay igualdad si y solo si x e y son linealmente dependientes.*

Demostración. Si $y = 0$, ambas afirmaciones son inmediatas. Si $y \neq 0$, ponemos $a = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$. Al desarrollar el producto interno,

$$0 \leq \|x - ay\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

Esto prueba la desigualdad. La igualdad equivale a $x - ay = 0$, es decir, a que x sea múltiplo de y . ■

Corolario 5.6. *La función $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma.*

Demostración. La positividad y la homogeneidad se deducen de los axiomas. Además,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

por Cauchy–Schwarz; tomando raíces obtenemos la desigualdad triangular. ■

Proposición 5.7 (Continuidad del producto interno). *Para y fijo, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ y $x \mapsto \langle y, x \rangle$ son continuas. El producto interno también es conjuntamente continuo.*

Demostración. La continuidad en una entrada resulta de $|\langle x - x_0, y \rangle| \leq \|x - x_0\|\|y\|$ y la simetría conjugada. Si $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, entonces $(\|y_n\|)$ está acotada y

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

Como los espacios involucrados son métricos, esto prueba la continuidad. ■

Definición 5.8. Un espacio con producto interno completo para su norma inducida se llama *espacio de Hilbert*. En particular, es un espacio de Banach.

Ejemplo 5.9. Los espacios $\mathbb{K}^n$, ℓ^2 y $L^2(\mu)$ son espacios de Hilbert, por la completitud de sus normas respectivas.

Proposición 5.10 (Paralelogramo y polarización). *Para cualesquiera x, y se cumple la ley del paralelogramo:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Sobre $\mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)/4$. Sobre $\mathbb{C}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Demostración. Desarrollar $\|x \pm y\|^2$ da $\|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$. Sumando se obtiene el paralelogramo y restando, la parte real de la polarización. Con nuestra convención, $\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = 4\operatorname{Im}\langle x, y \rangle$, lo que da la fórmula compleja. ■

5.2 Ortogonalidad y proyecciones

Definición 5.11. Escribimos $x \perp y$ cuando $\langle x, y \rangle = 0$. Para $A \subset E$, su complemento ortogonal es

$$A^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in A\}.$$

En $\mathbb{R}^2$ se recupera la condición $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Observación 5.12 (Pitágoras). Si $x \perp y$, entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Teorema 5.13 (Mejor aproximación). *Sea M un subespacio completo de un espacio con producto interno E . Para cada $x \in E$ existe un único $p \in M$ tal que*

$$\|x - p\| = d(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Demostración. Sea $d = d(x, M)$ y elijamos $y_n \in M$ con $d \leq \|x - y_n\| < d + 1/n$. Por el paralelogramo y porque $(y_n + y_m)/2 \in M$,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \\ &\leq 2(d + 1/n)^2 + 2(d + 1/m)^2 - 4d^2.\end{aligned}$$

La última expresión tiende a cero. Así, (y_n) es de Cauchy y converge a $p \in M$; por continuidad de la norma, $\|x - p\| = d$. Si $q \in M$ también alcanza la distancia, de nuevo el paralelogramo da

$$\|p - q\|^2 = 4d^2 - 4\|x - (p + q)/2\|^2 \leq 0,$$

y por tanto $p = q$. ■

Proposición 5.14. *El conjunto $A^\perp$ es un subespacio cerrado. Además, $A \subset (A^\perp)^\perp$, $E^\perp = \{0\}$ y $\{0\}^\perp = E$. La intersección $A \cap A^\perp$ es $\{0\}$ si $0 \in A$, y es vacía en caso contrario.*

Demostración. La conjugado-linealidad prueba que $A^\perp$ es subespacio y la continuidad prueba que es cerrado, como intersección de los conjuntos $\{y : \langle x, y \rangle = 0\}$, $x \in A$. Las restantes afirmaciones se deducen de la simetría conjugada y de que $\langle x, x \rangle = 0$ implica $x = 0$. ■

Teorema 5.15 (Descomposición ortogonal). *Si M es un subespacio completo de E , entonces $E = M \oplus M^\perp$. Si $x = p + q$, con $p \in M$ y $q \in M^\perp$, el vector p es su mejor aproximación en M . Los operadores $Px = p$ y $Qx = q$ satisfacen*

$$P, Q \in \mathcal{L}(E, E), \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad P + Q = I, \quad PQ = QP = 0.$$

Sus imágenes son M y $M^\perp$. Ambas normas son a lo sumo 1; $\|P\| = 1$ si $M \neq \{0\}$ y $\|Q\| = 1$ si $M \neq E$.

Demostración. Sea p la mejor aproximación de x y $q = x - p$. Para $y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, la minimalidad implica

$$0 \leq \|q - \lambda y\|^2 - \|q\|^2 = |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda \langle y, q \rangle).$$

Si $y \neq 0$, tomando $\lambda = \overline{\langle y, q \rangle} / \|y\|^2$ resulta $\langle y, q \rangle = 0$; para $y = 0$ es inmediato. Así, $q \in M^\perp$. La representación es única porque $M \cap M^\perp = \{0\}$. Recíprocamente, para $z \in M$, Pitágoras da $\|x - z\|^2 = \|q\|^2 + \|p - z\|^2$, lo que identifica la mejor aproximación. La unicidad de la descomposición prueba la linealidad de P, Q y las identidades algebraicas. Además, $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$, de modo que ambos son contractivos. Una proyección no nula fija algún vector unitario de su imagen, y por ello su norma es 1. ■

La Figura 5.1 ilustra la descomposición $x = P_M x + (x - P_M x)$. La ortogonalidad del segundo sumando convierte la minimización de la distancia a M en una aplicación de Pitágoras.

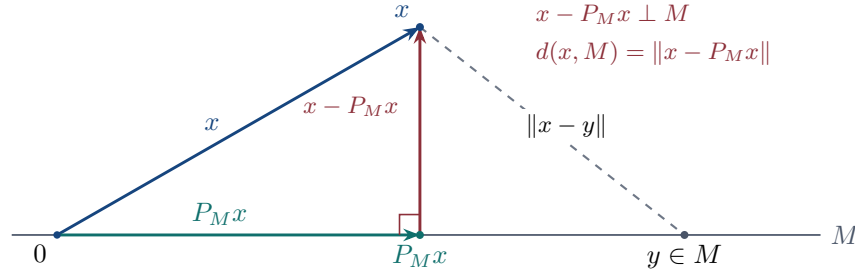


Figura 5.1. Descomposición $x = P_M x + (x - P_M x)$, representada para una recta M . La perpendicular da la distancia mínima: $\|x - y\|^2 = \|x - P_M x\|^2 + \|P_M x - y\|^2$ para todo $y \in M$.

5.3 Sistemas ortonormales y series

Definición 5.16. Un conjunto $S = \{e_i : i \in I\}$ es ortonormal si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$: el valor es 1 cuando $i = j$ y 0 cuando $i \neq j$. Se llama completo si $S^\perp = \{0\}$.

Ejemplo 5.17. Una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ es completa. En ℓ^2 , los vectores canónicos e_j forman un sistema ortonormal completo: si $x \perp e_j$ para todo j , todas las coordenadas de x son cero.

Proposición 5.18 (Proyección finita y Bessel finito). Si $e_1, \dots, e_n$ son ortonormales y $M = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces

$$P_M x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j, \quad \|x - P_M x\| = d(x, M), \quad \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración. M es completo por ser de dimensión finita. Escribiendo $x = p + q$ con $p = \sum_j a_j e_j \in M$ y $q \perp M$, obtenemos $a_j = \langle p, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$. Finalmente, $\sum_j |a_j|^2 = \|p\|^2 \leq \|x\|^2$ por Pitágoras. ■

Lema 5.19. Para un sistema ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ y $x \in E$, el conjunto $I_x = \{i : \langle x, e_i \rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

Demostración. Pongamos $I_k = \{i : |\langle x, e_i \rangle| > 1/k\}$. Si $i_1, \dots, i_n$ son distintos y pertenecen a I_k , Bessel finito da $n/k^2 < \sum_{j=1}^n |\langle x, e_{i_j} \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Por tanto I_k es finito, e $I_x = \bigcup_{k \geq 1} I_k$ es numerable. ■

Teorema 5.20 (Desigualdad de Bessel). Para todo sistema ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ y todo $x \in E$,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La suma de términos no negativos se define como el supremo de las sumas sobre subconjuntos finitos de I ; solo hay a lo sumo numerablemente muchos términos no nulos.

Demostración. Tomamos el supremo de las desigualdades de la Proposición 5.18. Equivalentemente, enumeramos I_x y hacemos tender a infinito el número de términos de sus sumas parciales. ■

5.3.1 Reordenamiento de series

Definición 5.21. En un espacio normado, $\sum_n x_n$ converge si convergen sus sumas parciales. Es incondicionalmente convergente si $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge para toda biyección $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Proposición 5.22. Todas las reordenaciones de una serie incondicionalmente convergente convergen al mismo vector.

Demostración. Para $f \in E^*$, todas las reordenaciones de $\sum_n f(x_n)$ convergen. El teorema escalar de reordenamiento implica que esta serie es absolutamente convergente y todas sus sumas coinciden. En el caso complejo se aplica ese teorema a las partes real e imaginaria. Si s_1, s_2 son sumas vectoriales de dos reordenaciones, la continuidad da $f(s_1 - s_2) = 0$ para todo $f \in E^*$. Como el dual separa puntos por Hahn–Banach, $s_1 = s_2$. ■

Lema 5.23. Si $(e_i)_{i \in I}$ es ortonormal en un Hilbert H , para cada $x \in H$ la serie $\sum_{i \in I_x} \langle x, e_i \rangle e_i$ converge incondicionalmente.

Demostración. Si I_x es finito no hay nada que demostrar. En el caso numerable, enumeramos sus índices y elegimos cualquier reordenación σ . Para sus sumas parciales s_n , si $n > m$, Pitágoras da

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \left| \langle x, e_{\sigma(k)} \rangle \right|^2 \rightarrow 0.$$

Bessel asegura la convergencia de la serie escalar y la completitud de H da la convergencia de (s_n) . La Proposición 5.22 identifica todas las sumas. ■

Teorema 5.24 (Compleitud y Parseval). Para un sistema ortonormal $S = (e_i)_{i \in I}$ en un Hilbert H , son equivalentes:

- a) $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ para todo $x \in H$;
- b) $S^\perp = \{0\}$;
- c) $\overline{\text{span } S} = H$;
- d) $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ para todo $x \in H$;
- e) $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$ para todos $x, y \in H$.

Las series vectoriales se interpretan como en el Lema 5.23; la serie escalar de e) es absolutamente convergente por Bessel y Cauchy–Schwarz.

Demostración. Si a) vale y $x \in S^\perp$, todos sus coeficientes son cero, luego $x = 0$. Si b) vale, el lema anterior define $p = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$. La continuidad del producto interno da $\langle x - p, e_i \rangle = 0$ para todo i , incluso cuando su coeficiente es cero; por b), $x = p$. Así a) y b) equivalen. La implicación a) $\Rightarrow$ c) es inmediata. Si c) vale y $x \perp S$, la continuidad implica $x \perp \overline{\text{span } S}$, luego $x = 0$. También puede obtenerse b) $\Rightarrow$ c) aplicando la descomposición ortogonal a $M = \text{span } S$, pues $M^\perp = S^\perp$.

Bajo a), Pitágoras para las sumas parciales y continuidad de la norma dan d). Recíprocamente, d) implica b) al aplicarse a $x \in S^\perp$. Se conserva también la prueba de c) $\Rightarrow$ d)

por aproximación: dado $\varepsilon > 0$, elegimos z en el span de un subconjunto finito $F \subset I$ con $\|x - z\| < \varepsilon$. La mejor aproximación satisface

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x - P_F x\|^2 \leq \|x - z\|^2 < \varepsilon^2.$$

Bessel y el supremo sobre conjuntos finitos dan d). Finalmente a) y continuidad implican $\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$, que es e). Alternativamente, d) $\Rightarrow$ e) se obtiene aplicando la fórmula de polarización a la isometría de coeficientes. Tomando $y = x$ en e) recuperamos d), y quedan probadas todas las equivalencias. ■

5.4 Ortogonalización y clasificación separable

Proposición 5.25 (Proceso de Gram–Schmidt). *Si (x_n) es una sucesión linealmente independiente en un espacio con producto interno, existe una sucesión ortonormal (e_n) tal que*

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \quad (n \geq 1).$$

Demostración. Tomamos $e_1 = x_1/\|x_1\|$ y, recursivamente,

$$v_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle x_{n+1}, e_j \rangle e_j, \quad e_{n+1} = v_{n+1}/\|v_{n+1}\|.$$

La proyección finita muestra que v_{n+1} es ortogonal a los e_j anteriores. La independencia lineal asegura $v_{n+1} \neq 0$. Las fórmulas y la inducción dan la igualdad de los spans. ■

Corolario 5.26. *En la situación anterior, $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Cada combinación lineal usa un número finito de índices y está contenida en el span de un segmento inicial. Aplicamos Gram–Schmidt a ese segmento en ambas direcciones. ■

Teorema 5.27. *Un Hilbert H de dimensión infinita es separable si y solo si tiene un sistema ortonormal completo numerable.*

Demostración. Si (e_n) es completo, las combinaciones finitas con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (en el caso real) o $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (en el complejo) forman un conjunto numerable denso, por el Teorema 5.24. Recíprocamente, sea (x_n) un conjunto denso. Recorremos esta sucesión y descartamos cada vector perteneciente al span de los ya seleccionados. Obtenemos una familia independiente con el mismo span que los x_n . Es infinita: si fuera finita, su span sería cerrado y denso, y H tendría dimensión finita. Gram–Schmidt produce un sistema ortonormal numerable con span denso, que es completo por el Teorema 5.24. ■

Teorema 5.28 (Riesz–Fischer). *Todo Hilbert separable de dimensión infinita es lineal e isométricamente isomorfo a ℓ^2 . Un Hilbert de dimensión finita n es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$ con la norma euclídea.*

Demostración. En el caso infinito, elijamos un sistema ortonormal completo (e_j) . La aplicación $Tx = (\langle x, e_j \rangle)_{j \geq 1}$ toma valores en ℓ^2 por Bessel, es lineal por nuestra convención y es una isometría por Parseval. Para $a = (a_j) \in \ell^2$, las sumas $s_n = \sum_{j=1}^n a_j e_j$ satisfacen $\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |a_j|^2 \rightarrow 0$. Por completitud convergen en H a cierto x , y continuidad del producto interno da $\langle x, e_j \rangle = a_j$. Así, T es sobreyectiva. La misma construcción con una base finita prueba el segundo caso. ■

Corolario 5.29. *Todo Hilbert separable es reflexivo.*

Demostración. En dimensión infinita usamos la reflexividad de ℓ^2 y el isomorfismo anterior; en dimensión finita, todo espacio normado es reflexivo. Más adelante probaremos el resultado sin hipótesis de separabilidad. ■

Teorema 5.30 (Extensión de sistemas ortonormales). *En un espacio con producto interno E , todo conjunto ortonormal S_0 está contenido en un conjunto ortonormal S con $S^\perp = \{0\}$. Si E es Hilbert, además $\overline{\text{span } S} = E$.*

Demostración. Ordenamos por inclusión la familia de conjuntos ortonormales que contienen S_0 . Es no vacía. La unión de una cadena es ortonormal: dos de sus vectores pertenecen a un mismo miembro de la cadena. Esa unión es una cota superior, por lo que el lema de Zorn da un conjunto maximal S . Si $0 \neq z \in S^\perp$, el conjunto $S \cup \{z/\|z\|\}$ contradice la maximalidad. La última afirmación usa el Teorema 5.24. ■

5.5 Funcionales lineales y representación de Riesz–Fréchet

Ejemplo 5.31. Para $y \in H$, el funcional $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pertenece a H^* y $\|f_y\| = \|y\|$. Cauchy–Schwarz da una desigualdad; si $y \neq 0$, evaluar en $y/\|y\|$ da la otra. Para $y = 0$ es inmediato.

Teorema 5.32 (Riesz–Fréchet). *Si H es Hilbert y $f \in H^*$, existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in H$. Además, $\|f\| = \|y\|$.*

Demostración. Si $f = 0$, tomamos $y = 0$. Si $f \neq 0$, $M = \ker f$ es un subespacio cerrado y completo. Elegimos $z \notin M$ y escribimos $z = p + v$ con $p \in M$, $0 \neq v \in M^\perp$. Como $x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in M$, su producto interno con v es cero, y

$$f(x) = \frac{f(v)}{\|v\|^2} \langle x, v \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(v)}}{\|v\|^2} v \right\rangle.$$

Esto construye el representante y . Si y_1, y_2 representan al mismo funcional, poner $x = y_1 - y_2$ da $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$. La igualdad de normas es el Ejemplo 5.31. ■

Corolario 5.33. *La correspondencia $R: H \rightarrow H^*$, $Ry = f_y$, es una biyección isométrica. Es lineal sobre $\mathbb{R}$ y conjugado-lineal sobre $\mathbb{C}$: $R(\lambda y) = \overline{\lambda} Ry$.*

Observación 5.34. En el caso complejo no debe llamarse isomorfismo lineal a esta correspondencia canónica. Se convierte en una isometría lineal al tomar como dominio el espacio conjugado de H .

Proposición 5.35. *El dual H^* es Hilbert con el producto interno $\langle f_{y_1}, f_{y_2} \rangle_{H^*} = \langle y_2, y_1 \rangle_H$.*

Demostración. La unicidad de Riesz hace que la definición no dependa de elecciones. Como $\lambda f_{y_1} = f_{\overline{\lambda}y_1}$, el orden invertido de los representantes garantiza linealidad en la primera entrada. Los demás axiomas son inmediatos y $\langle f_y, f_y \rangle_{H^*} = \|y\|^2 = \|f_y\|^2$. La completitud se deduce de que todo dual normado es Banach. ■

Corolario 5.36. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Demostración. Sea $\Phi \in H^{**}$. Aplicamos Riesz en H^* : existe $f_y \in H^*$ tal que $\Phi(g) = \langle g, f_y \rangle_{H^*}$ para todo $g \in H^*$. Escribiendo $g = f_z$, obtenemos

$$\Phi(g) = \langle f_z, f_y \rangle_{H^*} = \langle y, z \rangle_H = g(y) = J_H(y)(g).$$

Así, el encaje canónico $J_H : H \rightarrow H^{**}$ es sobreyectivo. ■

Topologías débil y débil estrella

6.1 Topología generada por una familia de funciones

En dimensión infinita, la bola unitaria cerrada de un espacio normado no es compacta para la norma. Una topología con menos abiertos facilita la compacidad, pero puede perder funciones continuas. Las topologías débiles conservan la continuidad de una familia prescrita de funcionales. La bola del dual será compacta para la topología débil estrella; la bola del espacio original será débilmente compacta cuando el espacio sea reflexivo.

Definición 6.1 (Topología inicial). Sean X un conjunto, $(Y_i)_{i \in I}$ espacios topológicos y $f_i : X \rightarrow Y_i$ aplicaciones. La topología inicial generada por (f_i) tiene como base las intersecciones finitas

$$\bigcap_{j=1}^n f_{i_j}^{-1}(U_j), \quad U_j \subset Y_{i_j} \text{ abierto.}$$

Se incluye la intersección vacía, que es X .

Proposición 6.2. La familia anterior es base de una topología $\mathcal{T}$, y se cumple:

- a) Cada $f_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y_i$ es continua.
- b) $\mathcal{T}$ es la menor topología con esa propiedad y es la intersección de todas las topologías con esa propiedad.
- c) Una base de vecindades de x se obtiene tomando intersecciones finitas de $f_{i_j}^{-1}(V_j)$, donde V_j es vecindad de $f_{i_j}(x)$.
- d) Una red (x_α) converge a x en $\mathcal{T}$ si y solo si $f_i(x_\alpha) \rightarrow f_i(x)$ para todo i .
- e) Si Z es topológico, $g : Z \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua si y solo si cada $f_i \circ g$ es continua.
- f) Si todos los Y_i son Hausdorff, $\mathcal{T}$ es Hausdorff si y solo si la familia (f_i) separa puntos de X .

Demostración. La familia cubre X y es estable bajo intersecciones finitas, por lo que forma una base. Toda topología que haga continuas las f_i contiene sus preimágenes de abiertos, sus intersecciones finitas y sus uniones; esto prueba a), b) y c). Para d), la necesidad usa continuidad. Para la suficiencia, una vecindad básica impone solo finitas condiciones y una red que satisface cada una eventualmente las satisface simultáneamente. Para e), la preimagen por g de cada abierto subbásico es la preimagen de un abierto por $f_i \circ g$. Si la familia separa $x \neq y$, una coordenada los distingue y la propiedad Hausdorff de ese Y_i proporciona vecindades disjuntas por preimagen. Si no los separa, x e y pertenecen exactamente a los mismos abiertos básicos y no pueden tener vecindades disjuntas. ■

Nota. Una red es una familia indexada por un conjunto dirigido: dos índices siempre tienen una cota superior común. Las sucesiones son redes con índices en $\mathbb{N}$. En espacios topológicos

generales, las redes caracterizan cerradura y continuidad; las sucesiones pueden no bastar. Por eso los resultados topológicos de este capítulo se formulan con redes cuando es necesario, y los resultados de acotación siguientes se formulan para sucesiones.

6.2 Topología débil de un espacio normado

Definición 6.3. La topología débil de E es $\sigma(E, E^*)$, generada por todos los funcionales lineales continuos $f \in E^*$. Escribimos $x_\alpha \rightarrow x$ para la convergencia en esa topología.

Proposición 6.4. Para un espacio normado E se cumple:

- a) Cada $f \in E^*$ es débilmente continuo.
- b) Las vecindades básicas de x_0 tienen la forma

$$V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{x \in E : |f_j(x - x_0)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Es finita la familia de restricciones, no necesariamente el conjunto V .

- c) $x_\alpha \rightarrow x$ si y solo si $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E^*$; en particular vale para sucesiones.
- d) $\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff.
- e) Una aplicación $g : Z \rightarrow (E, \sigma(E, E^*))$ es continua si y solo si $f \circ g$ es continua para todo $f \in E^*$.

Demostración. Todos los puntos, salvo la forma concreta de b) y la separación de d), son la Proposición 6.2. Para b), en cada una de finitas vecindades escalares tomamos un disco centrado en $f_j(x_0)$ y elegimos como radio común el mínimo de sus radios. Para d), si $x \neq y$, Hahn–Banach proporciona $f \in E^*$ con $f(x - y) = \|x - y\| \neq 0$; así el dual separa puntos. ■

Las restricciones de una vecindad débil básica solo controlan un número finito de evaluaciones. La Figura 6.1 muestra las direcciones que esos funcionales no detectan: si $v \in \bigcap_j \ker f_j$, entonces $x + tv$ permanece en la misma vecindad para todo $t \in \mathbb{K}$ y todo x de ella.

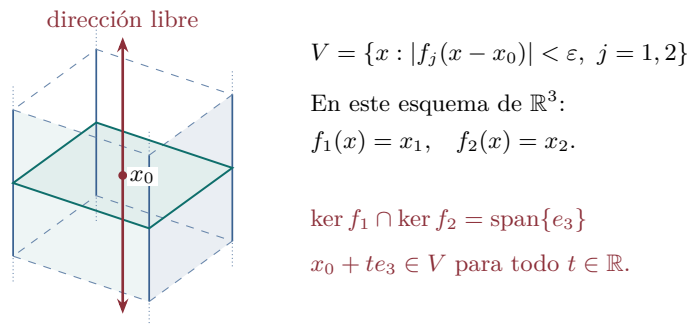


Figura 6.1. Una vecindad definida por dos restricciones, dibujada como un cilindro sin extremos. Las paredes son frontera excluida ($< \varepsilon$); las secciones discontinuas solo delimitan el esquema. La analogía está en $\mathbb{R}^3$; en dimensión infinita, cualquier familia finita de funcionales tiene núcleo común no trivial.

Corolario 6.5. La convergencia en norma implica convergencia débil.

Demostración. Si $x_\alpha \rightarrow x$ en norma, la continuidad de cada $f \in E^*$ da $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$; aplicamos la caracterización anterior. ■

Ejemplo 6.6. Los vectores canónicos e_n de c_0 convergen débilmente a cero. En efecto, $(c_0)^* = \ell^1$ bajo el emparejamiento $f_a(x) = \sum_j a_j x_j$, de modo que $f_a(e_n) = a_n \rightarrow 0$ porque $\sum_j |a_j| < \infty$. Sin embargo, $\|e_n\|_\infty = 1$ y $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ para $n \neq m$, así que no convergen en norma.

Proposición 6.7 (Acotación y semicontinuidad). *Sea E normado. Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces*

$$\sup_n \|x_n\| < \infty, \quad \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Si además $f_n \rightarrow f$ en la norma de E^ , entonces $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Demostración. Cada sucesión $(f(x_n))_n$ es acotada. Aplicamos Banach–Steinhaus a los operadores $J_E(x_n) : E^* \rightarrow \mathbb{K}$. El dominio E^* es Banach aunque E no lo sea, y $\|J_E(x_n)\| = \|x_n\|$; esto prueba la acotación. Para $\|f\| \leq 1$, tenemos $|f(x)| = \lim_n |f(x_n)| \leq \liminf_n \|x_n\|$. El supremo sobre la bola del dual es $\|x\|$. Finalmente, si $C = \sup_n \|x_n\|$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq C\|f_n - f\| + |f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0.$$

■

Proposición 6.8 (Comparación con la norma). *La topología débil está contenida en la topología de la norma. Coinciden si y solo si E tiene dimensión finita. Si E tiene dimensión infinita, la cerradura débil de su esfera unitaria es su bola unitaria cerrada.*

Demostración. La primera afirmación se sigue de la minimalidad de la topología débil. El caso $E = \{0\}$ es inmediato. En dimensión finita positiva, tomemos una base $e_1, \dots, e_n$ de vectores unitarios y sus funcionales coordenados f_j , que son continuos. Si $|f_j(x - x_0)| < r/(2n)$ para todo j , entonces $\|x - x_0\| \leq \sum_j |f_j(x - x_0)| < r$. Así, toda bola abierta contiene una vecindad débil de cada uno de sus puntos, y las topologías coinciden.

En dimensión infinita, sean $S_E = \{x : \|x\| = 1\}$ y $\|x_0\| < 1$. Para una vecindad básica determinada por $f_1, \dots, f_n$, existe $0 \neq y \in \bigcap_j \ker f_j$: de lo contrario, la aplicación $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ inyectaría E en $\mathbb{K}^n$. Toda la recta $x_0 + ty$, $t \in \mathbb{R}$, satisface las restricciones de la vecindad. La función $t \mapsto \|x_0 + ty\|$ es continua, empieza por debajo de 1 y tiende a infinito cuando $t \rightarrow +\infty$; por ello la recta corta S_E . Se deduce que $B_E \subset \overline{S_E}^w$. La inclusión inversa vale porque

$$B_E = \bigcap_{\|f\| \leq 1} \{x : |f(x)| \leq 1\}$$

es débilmente cerrado. En particular, S_E es cerrado para la norma y no para la topología débil, lo que prueba la diferencia de topologías. ■

Observación 6.9. El dual continuo de $(E, \sigma(E, E^*))$ es exactamente E^* . Todo funcional débilmente continuo es continuo para la norma, porque la topología débil es menor; la inclusión contraria es su definición.

6.2.1 Operadores y conjuntos convexos

Un operador acotado $T : E \rightarrow F$ es continuo desde la norma de E hacia la topología débil de F . En cambio, la identidad desde c_0 débil hacia c_0 con su norma no es continua, por el Ejemplo 6.6.

Lema 6.10. *Si X, Y son topológicos, Y es Hausdorff y $g : X \rightarrow Y$ es continua, su gráfico es cerrado en $X \times Y$.*

Demostración. Si una red $(x_\alpha, g(x_\alpha))$ del gráfico converge a (x, y) , las proyecciones dan $x_\alpha \rightarrow x$ y $g(x_\alpha) \rightarrow y$. Por continuidad también $g(x_\alpha) \rightarrow g(x)$, y Hausdorff implica $y = g(x)$. Alternativamente, si $y \neq g(x)$, elegimos vecindades abiertas disjuntas U de y y V de $g(x)$. Entonces $g^{-1}(V) \times U$ es una vecindad de (x, y) disjunta del gráfico. ■

Proposición 6.11. *Sean E, F Banach y $T : E \rightarrow F$ lineal. Entonces T es acotado si y solo si es continuo de $(E, \sigma(E, E^*))$ en $(F, \sigma(F, F^*))$.*

Demostración. Si T es acotado, $f \circ T \in E^*$ para cada $f \in F^*$, y la Proposición 6.4 da la continuidad débil. Recíprocamente, un operador débilmente continuo tiene gráfico cerrado para el producto de las topologías débiles, por el lema anterior. También es cerrado para las topologías de las normas, que son más fuertes. El teorema del gráfico cerrado para Banach da la continuidad en norma. ■

Teorema 6.12 (Mazur: cerraduras convexas). *Si $C \subset E$ es convexo, su cerradura en norma coincide con su cerradura débil. En particular, un conjunto convexo es cerrado en norma si y solo si es débilmente cerrado.*

Demostración. Siempre $\overline{C}^{\|\cdot\|} \subset \overline{C}^w$. Si $x_0 \notin \overline{C}^{\|\cdot\|}$, la separación de Hahn–Banach entre un punto y un convexo cerrado proporciona $f \in E^*$ y $a \in \mathbb{R}$ con

$$\operatorname{Re} f(x_0) > a \geq \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x).$$

El semiespacio $\{x : \operatorname{Re} f(x) > a\}$ es débilmente abierto, contiene x_0 y no corta C . Así $x_0 \notin \overline{C}^w$. En espacios complejos se usa la parte real del funcional; no se ordenan números complejos. ■

Teorema 6.13 (Schur). *En ℓ^1 , una sucesión converge débilmente si y solo si converge en norma.*

Demostración. Solo falta probar que $x_n \rightarrow 0$ implica $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$. Si no fuera así, extrayendo una subsucesión podemos suponer $\|x_n\|_1 \geq \varepsilon > 0$. La convergencia débil implica convergencia a cero en cada coordenada. Construimos índices $n_1 < n_2 < \dots$ y $0 = m_0 < m_1 < \dots$ de modo que

$$\sum_{j \leq m_{k-1}} |x_{n_k, j}| < \varepsilon/8, \quad \sum_{j > m_k} |x_{n_k, j}| < \varepsilon/8.$$

El primer requisito se obtiene eligiendo n_k suficientemente grande; el segundo, eligiendo después m_k suficientemente grande. En el bloque $m_{k-1} < j \leq m_k$ definimos $b_j = \overline{x_{n_k, j}}/|x_{n_k, j}|$ cuando la coordenada no es cero, y $b_j = 0$ si lo es. Entonces $b \in \ell^\infty$ y $\|b\|_\infty \leq 1$. El bloque aporta al menos $3\varepsilon/4$ a la parte real de $\sum_j b_j x_{n_k, j}$, y el resto tiene módulo menor que $\varepsilon/4$. Por tanto $\operatorname{Re} \sum_j b_j x_{n_k, j} > \varepsilon/2$, contradiciendo la convergencia débil para el funcional asociado a b . ■

Observación 6.14. Schur no dice que las topologías débil y de la norma de ℓ^1 coincidan: por la Proposición 6.8 son distintas. Dice que tienen las mismas sucesiones convergentes, lo que ilustra por qué las redes son necesarias para algunos argumentos topológicos.

6.3 Topología débil estrella

Definición 6.15. El encaje canónico $J_E : E \rightarrow E^{**}$ está dado por $J_E(x)(f) = f(x)$. La topología débil estrella de E^* , denotada $\sigma(E^*, E)$, es la topología generada por esas evaluaciones, una por cada $x \in E$. Escribimos $f_\alpha \xrightarrow{*} f$ para su convergencia.

Proposición 6.16. Para todo espacio normado E :

a) Cada evaluación $J_E(x) : (E^*, \sigma(E^*, E)) \rightarrow \mathbb{K}$ es continua.

b) Las vecindades básicas de f_0 son

$$W(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in E^* : |f(x_j) - f_0(x_j)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}.$$

c) $f_\alpha \xrightarrow{*} f$ si y solo si $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in E$.

d) La topología débil estrella es Hausdorff.

e) $g : Z \rightarrow (E^*, \sigma(E^*, E))$ es continua si y solo si $z \mapsto g(z)(x)$ es continua para cada $x \in E$.

Demostración. Aplicamos la Proposición 6.2 a las evaluaciones. Estas separan puntos: si $f \neq g$, existe x con $f(x) \neq g(x)$. La descripción de vecindades se obtiene eligiendo un radio común para finitos discos escalares, como en la Proposición 6.4. ■

Proposición 6.17. La convergencia débil en E^* implica convergencia débil estrella. Si E es Banach y $f_n \xrightarrow{*} f$, entonces

$$\sup_n \|f_n\| < \infty, \quad \|f\| \leq \liminf_n \|f_n\|.$$

Si además $x_n \rightarrow x$ en norma, se tiene $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración. Cada $J_E(x)$ pertenece a E^{**} , así que la convergencia débil implica convergencia en todas las evaluaciones. En el caso débil estrella, $(f_n(x))_n$ es acotada para cada x , y Banach–Steinhaus sobre E da $C = \sup_n \|f_n\| < \infty$. Para $\|x\| \leq 1$, $|f(x)| \leq \liminf_n \|f_n\|$; tomamos el supremo. Por último,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq C\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

La desigualdad de semicontinuidad por sí sola no necesita completitud; la usamos para la acotación uniforme. ■

Proposición 6.18. Todo funcional lineal débil estrella continuo $F : E^* \rightarrow \mathbb{K}$ tiene la forma $F = J_E(x)$ para un único $x \in E$. Por tanto, $(E^*, \sigma(E^*, E))^* = J_E(E)$.

Demostración. Las evaluaciones son continuas. Recíprocamente, por continuidad de F en cero existen $x_1, \dots, x_n$ y $\varepsilon > 0$ tales que $|F(f)| < 1$ si $|f(x_j)| < \varepsilon$ para todos los j . Si todos los $f(x_j)$ son cero, cualquier múltiplo de f pertenece a esa vecindad, por lo que $F(f) = 0$. Así, F

se factoriza por la aplicación $T : E^* \rightarrow \mathbb{K}^n$, $Tf = (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Un funcional lineal en el subespacio $T(E^*)$ se extiende algebraicamente a $\mathbb{K}^n$ y es de la forma $z \mapsto \sum_j a_j z_j$. Entonces $F(f) = \sum_j a_j f(x_j) = f(\sum_j a_j x_j)$, como queríamos. La unicidad resulta de la inyectividad de J_E . ■

Corolario 6.19. $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))^* = J_E^*(E^*)$.

Demostración. Aplicamos la proposición al espacio E^* . ■

Proposición 6.20. En E^* se cumple $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Las topologías débil y débil estrella coinciden si y solo si E es reflexivo.

Demostración. La inclusión $J_E(E) \subset E^{**}$ y la minimalidad de la topología inicial dan la primera inclusión; la segunda ya fue probada. Si $J_E(E) = E^{**}$, las familias generadoras coinciden. Si las topologías coinciden, cada $F \in E^{**}$ es débil estrella continuo, y la Proposición 6.18 obliga a que $F \in J_E(E)$. ■

Teorema 6.21 (Banach–Alaoglu–Bourbaki). Para todo espacio normado E , la bola unitaria cerrada B_{E^*} es compacta para $\sigma(E^*, E)$.

Demostración. Para cada $x \in E$, el disco $D_x = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq \|x\|\}$ es compacto. Por Tychonoff, $P = \prod_{x \in E} D_x$ es compacto. Identificamos $f \in B_{E^*}$ con $(f(x))_{x \in E} \in P$. Su imagen consiste exactamente en los puntos $a = (a_x)$ que cumplen

$$a_{x+y} = a_x + a_y, \quad a_{\lambda x} = \lambda a_x \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}).$$

Estas ecuaciones definen un subconjunto cerrado de P . Todo punto de ese subconjunto define un funcional lineal con $|a_x| \leq \|x\|$, luego pertenece a la bola del dual. La topología producto restringida a la imagen es precisamente la convergencia puntual, es decir, la topología débil estrella. Por tanto la identificación es un homeomorfismo con un cerrado de un compacto. ■

6.4 Compacidad débil y reflexividad

Lema 6.22. Para todo espacio normado E , J_E es un homeomorfismo desde $(E, \sigma(E, E^*))$ sobre su imagen en $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$.

Demostración. J_E es inyectivo y, para cualquier red,

$$x_\alpha \rightharpoonup x \iff f(x_\alpha) \rightarrow f(x) \ (f \in E^*) \iff J_E(x_\alpha) \xrightarrow{*} J_E(x).$$

Esto prueba la continuidad de la aplicación y de su inversa en la imagen. ■

Teorema 6.23. Si E es reflexivo, B_E es débilmente compacta.

Demostración. J_E es una isometría sobreyectiva y el homeomorfismo anterior lleva B_E sobre $B_{E^{**}}$. Esta última bola es débil estrella compacta por Banach–Alaoglu aplicado a E^* . ■

Para demostrar el recíproco, necesitaremos aproximar elementos de la bola del bidual mediante vectores del espacio original.

Lema 6.24 (Helly). Sean E normado sobre $\mathbb{K}$, $f_1, \dots, f_n \in E^*$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Son equivalentes:

a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B_E$ con $|f_j(x) - a_j| < \varepsilon$ para $1 \leq j \leq n$.

b) Para todos $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, $|\sum_j b_j a_j| \leq \|\sum_j b_j f_j\|$.

Demostración. Si a) vale, para el x correspondiente,

$$\left| \sum_j b_j a_j \right| \leq \varepsilon \sum_j |b_j| + \left| \sum_j b_j f_j(x) \right| \leq \varepsilon \sum_j |b_j| + \left\| \sum_j b_j f_j \right\|.$$

Hacemos $\varepsilon \downarrow 0$. Para el recíproco, definimos $Tx = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ y $a = (a_1, \dots, a_n)$. Si $a \notin \overline{T(B_E)}$, la separación finito-dimensional da $b_j \in \mathbb{K}$ y $r \in \mathbb{R}$ con

$$\sup_{x \in B_E} \operatorname{Re} \sum_j b_j f_j(x) \leq r < \operatorname{Re} \sum_j b_j a_j.$$

En el caso complejo usamos que todo funcional real lineal en $\mathbb{C}^n$ es la parte real de un funcional complejo lineal. Como B_E es equilibrada (invariante bajo escalares de módulo uno), el supremo de la parte real de un funcional en ella es su norma. Así, $\|\sum_j b_j f_j\| < |\sum_j b_j a_j|$, contradiciendo b). Por tanto $a \in \overline{T(B_E)}$, que es exactamente a). ■

Teorema 6.25 (Goldstine). Para todo espacio normado E , $J_E(B_E)$ es denso en $B_{E^{**}}$ para la topología $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Demostración. La isometría implica $J_E(B_E) \subset B_{E^{**}}$, y esta última bola es débil estrella cerrada por Alaoglu y Hausdorff. Sean $\Phi \in B_{E^{**}}$, $f_1, \dots, f_n \in E^*$ y $\varepsilon > 0$. Para todos los escalares b_j ,

$$\left| \sum_j b_j \Phi(f_j) \right| = \left| \Phi\left(\sum_j b_j f_j\right) \right| \leq \left\| \sum_j b_j f_j \right\|.$$

Helly, con $a_j = \Phi(f_j)$, proporciona $x \in B_E$ con $|J_E(x)(f_j) - \Phi(f_j)| < \varepsilon$ para todos los j . Así, $J_E(B_E)$ corta cada vecindad básica de Φ . La versión compleja está incluida en el lema, no se reduce sin justificación al caso real. ■

Teorema 6.26 (Kakutani). Un espacio de Banach E es reflexivo si y solo si B_E es débilmente compacta.

Demostración. Una dirección es el Teorema 6.23. Si B_E es débilmente compacta, $J_E(B_E)$ es débil estrella compacta, y por tanto cerrada, por el Lema 6.22 y Hausdorff. Goldstine implica entonces $J_E(B_E) = B_{E^{**}}$. La linealidad permite reescalar cualquier elemento del bidual y concluye que J_E es sobreyectivo. ■

Lema 6.27. Si F es un subespacio de un espacio normado E , la topología $\sigma(F, F^*)$ coincide con la inducida por $\sigma(E, E^*)$.

Demostración. Las restricciones a F de los elementos de E^* pertenecen a F^* . Recíprocamente, Hahn–Banach extiende cada elemento de F^* a E^* . Así, ambas topologías están generadas por la misma familia de funciones. No se necesita que F sea cerrado para esta afirmación. ■

Observación 6.28 (Prueba topológica de la reflexividad de subespacios cerrados). El resultado 4.21 admite ahora la siguiente prueba alternativa, que conserva el argumento topológico de estos apuntes.

Demostración. F es Banach y es débilmente cerrado por Mazur. Por tanto $B_F = F \cap B_E$ es un cerrado de un débilmente compacto. La topología inducida es la débil de F , y Kakutani concluye. ■

Teorema 6.29 (Subsucesiones débilmente convergentes). *En un espacio reflexivo E , toda sucesión acotada tiene una subsucesión que converge débilmente a un elemento de E .*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión con $\|x_n\| \leq C$. El subespacio $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es separable y, por ser cerrado en E , es reflexivo. La Proposición 4.10 implica que M^* es separable. Elegimos una sucesión (f_j) densa en M^* . Cada sucesión escalar $(f_j(x_n))_n$ está acotada. Mediante extracciones sucesivas y un argumento diagonal, obtenemos una subsucesión (x_{n_k}) para la que $f_j(x_{n_k})$ converge para todo j .

Para cualquier $f \in M^*$, la estimación

$$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_l})| \leq 2C\|f - f_j\| + |f_j(x_{n_k}) - f_j(x_{n_l})|$$

muestra que $(f(x_{n_k}))_k$ es de Cauchy: primero aproximamos f por f_j y después hacemos grandes k, l . Por tanto, $\Phi(f) = \lim_k f(x_{n_k})$ define un funcional lineal en M^* con $|\Phi(f)| \leq C\|f\|$, es decir, $\Phi \in M^{**}$. La reflexividad de M proporciona $x \in M$ con $\Phi = J_M(x)$. Así $x_{n_k} \rightharpoonup x$ en M y también en E , pues cada funcional de E^* se restringe a un elemento de M^* . ■

Observación 6.30. El argumento anterior justifica el paso a subsucesiones sin suponer que la topología débil de todo E sea metrizable. Se usará al estudiar operadores compactos en el capítulo 7.

6.5 Espacios uniformemente convexos

Como se aprecia en la Figura 1.1, la esfera euclídea no contiene segmentos no triviales; las esferas de las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$, sí. La convexidad estricta exige $\|(x+y)/2\| < 1$ para puntos distintos x, y de la esfera unitaria. La convexidad uniforme cuantifica cuánto se aleja el punto medio de la esfera si los extremos están separados.

Definición 6.31. La norma de E es uniformemente convexa si para cada $0 < \varepsilon \leq 2$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in B_E$,

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \implies \|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta.$$

La restricción $\varepsilon \leq 2$ es natural porque el diámetro de B_E es a lo sumo 2.

Ejemplo 6.32. Toda norma de Hilbert es uniformemente convexa. Por el paralelogramo,

$$\|(x + y)/2\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{\|x - y\|^2}{4} \leq 1 - \varepsilon^2/4.$$

Sirve $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$.

Ejemplo 6.33. En $\mathbb{R}^2$ con la norma del supremo, los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$ tienen distancia 2 y su punto medio tiene norma 1. Con la norma $\|\cdot\|_1$, ocurre lo mismo con $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Estas normas no son uniformemente convexas. Completando con ceros obtenemos los mismos contraejemplos en c_0 , ℓ^∞ y ℓ^1 con sus normas usuales.

Lema 6.34. Sea E uniformemente convexo y $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en B_E . Si $\|(x_\alpha + x_\beta)/2\| \rightarrow 1$ cuando (α, β) avanza en el conjunto dirigido producto $I \times I$, entonces (x_α) es de Cauchy.

Demostración. Para $0 < \varepsilon \leq 2$, tomemos el δ de convexidad uniforme. Eventualmente $\|(x_\alpha + x_\beta)/2\| > 1 - \delta$ para ambos índices suficientemente grandes. La contraposición de la definición da $\|x_\alpha - x_\beta\| < \varepsilon$. Podemos elegir una cota superior común de los dos índices iniciales, como requiere la condición de Cauchy. ■

Teorema 6.35 (Milman–Pettis). Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Demostración. Sea $\Phi \in E^{**}$ con $\|\Phi\| = 1$. Por Goldstine existe una red (x_α) en B_E tal que $J_E(x_\alpha) \xrightarrow{*} \Phi$. Fijado $\eta > 0$, elegimos $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$ y $\operatorname{Re} \Phi(f) > 1 - \eta$; en el caso complejo ajustamos la fase de f . Eventualmente $\operatorname{Re} f(x_\alpha) > 1 - 2\eta$. Por ello, para α, β suficientemente grandes,

$$1 \geq \|(x_\alpha + x_\beta)/2\| \geq \operatorname{Re} f((x_\alpha + x_\beta)/2) > 1 - 2\eta.$$

Como η es arbitrario, los puntos medios tienen normas que tienden a 1. El Lema 6.34 muestra que la red es de Cauchy. La completitud métrica implica que toda red de Cauchy converge en norma: se eligen sucesivamente colas de diámetro menor que 2^{-n} , se toma una sucesión de puntos en esas colas y su límite es también el de la red. Sea $x \in B_E$ ese límite. Entonces $J_E(x_\alpha) \rightarrow J_E(x)$ en norma, y también débil estrella. La unicidad del límite da $\Phi = J_E(x)$. Reescalando se obtiene la sobreyectividad de J_E . ■

Proposición 6.36 (Convergencia débil y convergencia de normas). Si E es Banach uniformemente convexo, $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, entonces $x_n \rightarrow x$ en norma.

Demostración. Si $x = 0$, la afirmación es inmediata. En otro caso podemos suponer $\|x_n\| > 0$ y definir $y_n = x_n/\|x_n\|$, $y = x/\|x\|$. Entonces $y_n \rightharpoonup y$ y $\|y_n\| = \|y\| = 1$. Por Hahn–Banach hay $f \in E^*$ con $\|f\| = f(y) = 1$. Como $f(y_n) \rightarrow 1$,

$$|f((y_n + y_m)/2)| \leq \|(y_n + y_m)/2\| \leq 1$$

implica que las normas de los puntos medios tienden a 1. El lema anterior da que (y_n) es de Cauchy, y por completitud converge en norma. Su límite débil es y , luego también su límite en norma. Finalmente,

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + |\|x_n\| - \|x\|| \|y\| \rightarrow 0.$$

■

6.5.1 Desigualdades de Clarkson

Lema 6.37. Si $2 \leq p < \infty$ y $a, b \in \mathbb{K}$, entonces

$$|a + b|^p + |a - b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Demostración. La comparación de normas en $\mathbb{K}^2$, el paralelogramo escalar y Hölder dan

$$\begin{aligned} (|a + b|^p + |a - b|^p)^{1/p} &\leq (|a + b|^2 + |a - b|^2)^{1/2} \\ &= 2^{1/2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2} \\ &\leq 2^{1-1/p}(|a|^p + |b|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Elevamos a la potencia p . Para $p = 2$ hay igualdad. ■

Proposición 6.38 (Primera desigualdad de Clarkson). Si $2 \leq p < \infty$ y $f, g \in L^p(\mu)$, entonces

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Demostración. Aplicamos el lema a $a = f(t)$, $b = g(t)$ e integramos respecto de μ . ■

Lema 6.39. Si $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$ y $a, b \in \mathbb{K}$, entonces

$$|a + b|^q + |a - b|^q \leq 2(|a|^p + |b|^p)^{q-1}.$$

Demostración. Primero sean a, b reales. Por simetría, homogeneidad y valores absolutos, basta demostrar $(1+t)^q + (1-t)^q \leq 2(1+t^p)^{q-1}$ para $0 \leq t \leq 1$. El caso $q = 2$ es el paralelogramo y $t = 0$ es inmediato. Para $q > 2$ y $0 < t \leq 1$, definimos, con $0 < \alpha \leq 1$,

$$F(\alpha, t) = (1 + \alpha^{1-q}t)(1 + \alpha t)^{q-1} + (1 - \alpha^{1-q}t)(1 - \alpha t)^{q-1}.$$

Para $0 < \alpha < 1$, derivar y agrupar términos da

$$\partial_\alpha F = (q-1)t(1 - \alpha^{-q})[(1 + \alpha t)^{q-2} - (1 - \alpha t)^{q-2}] \leq 0.$$

Por continuidad en los extremos y porque $t^{p-1} \leq 1$,

$$(1+t)^q + (1-t)^q = F(1, t) \leq F(t^{p-1}, t) = 2(1+t^p)^{q-1};$$

la última identidad usa $(p-1)(q-1) = 1$. Para escalares complejos, ponemos $A = |a|^2 + |b|^2$ y $s = 2|\operatorname{Re}(a\bar{b})| \leq 2|a||b|$. La función $(A+s)^{q/2} + (A-s)^{q/2}$ es no decreciente en $s \in [0, A]$. Así, el lado izquierdo no excede $(|a| + |b|)^q + ||a| - |b||^q$, al que aplicamos el caso real. ■

Lema 6.40 (Desigualdad inversa para potencias menores que uno). Sean $0 < r \leq 1$ y $u, v \geq 0$ medibles con integrales de sus potencias r finitas. Escribamos $M_r(u) = (\int u^r d\mu)^{1/r}$. Entonces $M_r(u) + M_r(v) \leq M_r(u+v)$. Para $r < 1$, M_r no es una norma.

Demostración. Sean $A = M_r(u)$ y $B = M_r(v)$. Si alguno es cero, su función es cero casi en todas partes y la afirmación es inmediata. Si ambos son positivos, la concavidad de $s \mapsto s^r$, con $\lambda = A/(A+B)$, da

$$\int \left(\frac{u+v}{A+B} \right)^r d\mu \geq \lambda \int (u/A)^r d\mu + (1-\lambda) \int (v/B)^r d\mu = 1.$$

Tomando la potencia $1/r$ se obtiene la desigualdad. ■

Proposición 6.41 (Segunda desigualdad de Clarkson). Si $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$ y $f, g \in L^p(\mu)$, entonces

$$\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q \leq 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{q-1}.$$

Demostración. Ponemos $r = p - 1$, de modo que $qr = p$ y $1/r = q - 1$. Aplicando el lema anterior y después la desigualdad escalar, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q &= M_r(|f + g|^q) + M_r(|f - g|^q) \\ &\leq M_r(|f + g|^q + |f - g|^q) \\ &\leq 2M_r((|f|^p + |g|^p)^{q-1}) \\ &= 2\left(\int (|f|^p + |g|^p) d\mu\right)^{q-1}. \end{aligned}$$

Aquí $(q-1)r = 1$ y la homogeneidad de M_r conserva el factor 2. ■

Teorema 6.42. Para cualquier espacio de medida y $1 < p < \infty$, $L^p(\mu)$ es uniformemente convexo. En consecuencia, es reflexivo.

Demostración. Si $f, g \in B_{L^p(\mu)}$ y $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$, la primera desigualdad de Clarkson, para $p \geq 2$, da

$$\|(f + g)/2\|_p \leq (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p}.$$

Sirve $\delta = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p} > 0$. Para $1 < p \leq 2$, la segunda desigualdad da

$$\|(f + g)/2\|_p \leq (1 - (\varepsilon/2)^q)^{1/q},$$

y sirve $\delta = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^q)^{1/q}$. La completitud de $L^p(\mu)$ y Milman–Pettis dan la reflexividad. El caso de ℓ^p se obtiene usando la medida de conteo en $\mathbb{N}$. ■

Observación 6.43 (Dualidad de L^p). El resultado final de los apuntes originales identifica, para $1 < p < \infty$, el dual de $L^p(\mu)$ con $L^q(\mu)$, donde $q = p/(p-1)$, mediante

$$g \mapsto f_g, \quad f_g(f) = \int_X fg d\mu.$$

Su formulación completa y su demostración están en el Teorema 4.2, también para espacios de medida arbitrarios; no las repetimos aquí. El emparejamiento es bilineal, aun sobre $\mathbb{C}$: no es el producto interno sesquilineal de $L^2(\mu)$. El Teorema 6.42 ofrece otra prueba de la reflexividad de $L^p(\mu)$ establecida en el resultado 4.16: utiliza su geometría uniforme y Milman–Pettis, en lugar de identificar dos veces su dual.

Operadores compactos y teoría espectral

Los operadores compactos conservan parte del comportamiento de las matrices: fuera del valor 0, los puntos de su espectro son autovalores aislados con autoespacios de dimensión finita. Para demostrarlo combinaremos compacidad, dualidad y el lema de Riesz. El caso autoadjunto en espacios de Hilbert se desarrolla en el capítulo siguiente.

7.1 Autovalores, resolvente y espectro

Definición 7.1. Sea $T : E \rightarrow E$ un operador lineal sobre $\mathbb{K}$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de T si existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. El subespacio

$$E_\lambda = \ker(\lambda I - T)$$

es el *autoespacio* correspondiente. Sus elementos *no nulos* se llaman autovectores. El conjunto de autovalores se denota $\sigma_p(T)$ y se llama espectro puntual.

En dimensión finita, la ausencia de autovectores para λ equivale a que $\lambda I - T$ sea inyectivo y, por igualdad de dimensiones, biyectivo. En dimensión infinita, la inyectividad no implica sobreyectividad. Incluso cuando λ no es autovalor, la inversa algebraica

$$(\lambda I - T)^{-1} : (\lambda I - T)(E) \rightarrow E$$

puede estar definida solo sobre una parte de E o no ser continua.

Definición 7.2. Sea E normado y $T \in \mathcal{L}(E, E)$. El *conjunto resolvente* es

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ es biyectivo y su inversa es continua}\}.$$

Para $\lambda \in \rho(T)$, el operador $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ se llama resolvente de T en λ . El *espectro* es

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T).$$

Siempre $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Si E es de Banach, el teorema de la aplicación abierta asegura que basta exigir la biyectividad de $\lambda I - T$.

La convención $\lambda I - T$ solo fija el signo del operador resolvente: los conjuntos $\rho(T)$ y $\sigma(T)$ son los mismos que se obtienen con $T - \lambda I$.

Proposición 7.3 (Serie de Neumann). Sea E de Banach y $A \in \mathcal{L}(E, E)$ con $\|A\| < 1$. Entonces $I - A$ es invertible y

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

La serie converge en norma de operador y su primer término es $A^0 = I$.

Demostración. El espacio $\mathcal{L}(E, E)$ es de Banach y $\sum_{j \geq 0} \|A^j\| \leq \sum_{j \geq 0} \|A\|^j < \infty$. Por tanto, las sumas parciales $S_n = I + A + \cdots + A^n$ convergen en norma a un operador S . La identidad telescópica

$$(I - A)S_n = S_n(I - A) = I - A^{n+1}$$

y la convergencia $\|A^{n+1}\| \rightarrow 0$ implican $(I - A)S = S(I - A) = I$. La cota de norma se sigue de la serie geométrica. ■

Teorema 7.4. Sea E de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, E)$. El conjunto $\rho(T)$ es abierto y

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

es compacto. Si además $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $E \neq \{0\}$, el espectro es no vacío.

Demostración. Si $|\lambda| > \|T\|$, la serie de Neumann da

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^j}, \quad \|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}. \quad (7.1)$$

Así, el espectro está contenido en el disco indicado. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $R_0 = R(\lambda_0, T)$, factorizamos

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)[I + (\lambda - \lambda_0)R_0].$$

El segundo factor es invertible cuando $|\lambda - \lambda_0|\|R_0\| < 1$. Esto prueba que el resolvente es abierto. Su complemento es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y por ello compacto.

Para la no vacuidad en el caso complejo usamos el teorema de Liouville. Si $\sigma(T)$ fuera vacío, la factorización anterior y Neumann darían alrededor de cualquier $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ la serie convergente

$$R(\lambda, T) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^j R_0^{j+1}.$$

Para $x \in E$ y $\varphi \in E^*$, la función escalar $h(\lambda) = \varphi(R(\lambda, T)x)$ sería entera. La cota (7.1) muestra que tiende a cero cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$; en el disco restante está acotada por continuidad. Liouville implica $h = 0$. Como esto vale para todo φ y el dual separa puntos, tendríamos $R(\lambda, T)x = 0$ para todo x , incompatible con que sea la inversa de $\lambda I - T$ en un espacio no nulo. ■

Ejemplo 7.5. Sobre el espacio real $\mathbb{R}^2$, la rotación $T(x, y) = (-y, x)$ tiene espectro real vacío: la matriz de $\lambda I - T$ tiene determinante $\lambda^2 + 1 > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Al considerar el mismo operador sobre $\mathbb{C}^2$, su espectro es $\{i, -i\}$. La hipótesis de campo complejo en la afirmación de no vacuidad no puede omitirse. En el espacio cero, el espectro también es vacío.

7.2 Compacidad de un operador

En lo que sigue, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ denota la bola unitaria cerrada. Un conjunto es *relativamente compacto* en F cuando su clausura en F es compacta. La especificación del espacio ambiente importa si este no es completo.

Definición 7.6. Un operador lineal $T : E \rightarrow F$ entre espacios normados es *compacto* si $\overline{T(B_E)}$ es compacto en F . Denotamos por $\mathcal{K}(E, F)$ el conjunto de esos operadores.

Proposición 7.7. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Todo operador compacto es continuo.*
2. *Todo operador lineal continuo de rango finito es compacto.*
3. *La identidad de un espacio normado E es compacta si y solo si E tiene dimensión finita.*

Demostración. Si T es compacto, su imagen de la bola unitaria es acotada, de modo que $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$; esta es una de las caracterizaciones de continuidad lineal.

Si T es continuo y $T(E)$ tiene dimensión finita, $T(B_E)$ es acotado en ese subespacio. Los subespacios de dimensión finita son cerrados y, en ellos, los conjuntos cerrados y acotados son compactos. Así, su clausura en F es compacta.

Finalmente, la identidad es compacta precisamente cuando la bola unitaria cerrada de E es compacta, lo que equivale a dimensión finita por el Teorema 1.36. ■

Proposición 7.8. *Para un operador lineal $T : E \rightarrow F$ entre espacios normados son equivalentes:*

1. *T es compacto;*
2. *para todo conjunto acotado $A \subset E$, la clausura de $T(A)$ es compacta en F ;*
3. *para toda sucesión acotada $(x_n) \subset E$, la sucesión (Tx_n) tiene una subsucesión convergente en F .*

Demostración. Si A es acotado, está contenido en rB_E para algún $r > 0$. Por linealidad, $\overline{T(A)}$ es un subconjunto cerrado del compacto $r\overline{T(B_E)}$. Esto prueba (1) $\Rightarrow$ (2); la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) se sigue de la compacidad secuencial.

Supongamos (3) y tomemos una sucesión $(y_n) \subset \overline{T(B_E)}$. Elegimos $x_n \in B_E$ con $\|y_n - Tx_n\| < 1/n$. Alguna subsucesión (Tx_{n_k}) converge en F , y entonces (y_{n_k}) converge al mismo límite. Como la clausura es cerrada, ese límite le pertenece. Así, la clausura es secuencialmente compacta y, al ser un espacio métrico, es compacta. ■

7.2.1 Arzelà–Ascoli y operadores integrales

Teorema 7.9 (Arzelà–Ascoli). *Sea K un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{K})$, con la norma uniforme. La clausura de $\mathcal{A}$ es compacta si y solo si:*

1. *la familia es equicontinua: para cada $t \in K$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(t, s) < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon \quad \text{para todo } f \in \mathcal{A};$$

2. *es puntualmente acotada: $\sup_{f \in \mathcal{A}} |f(t)| < \infty$ para cada $t \in K$.*

Demostración. Si la clausura es compacta, las evaluaciones $f \mapsto f(t)$ son continuas y sus imágenes son acotadas. Para la equicontinuidad, fijemos t y $\varepsilon > 0$. Cubrimos la clausura mediante un número finito de bolas de norma uniforme de radio $\varepsilon/3$, con centros $f_1, \dots, f_m \in C(K)$. Por continuidad de esos centros, existe $\delta > 0$ tal que $d(t, s) < \delta$ implica $|f_j(t) - f_j(s)| < \varepsilon/3$ para todo j . Si $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon/3$, una desigualdad triangular de tres términos da $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Para la recíproca, probaremos que $\mathcal{A}$ es totalmente acotada, es decir, admite un recubrimiento finito por bolas de cualquier radio positivo. Dado $\varepsilon > 0$, la equicontinuidad proporciona para cada $t \in K$ un entorno U_t tal que

$$s \in U_t \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon/3 \quad (f \in \mathcal{A}).$$

Por compacidad, elegimos $t_1, \dots, t_m$ cuyos entornos cubren K . Los vectores de evaluaciones

$$\{(f(t_1), \dots, f(t_m)) : f \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{K}^m$$

forman un conjunto acotado y admiten una red finita de radio $\varepsilon/3$ en norma máxima, cuyos centros podemos tomar de ese mismo conjunto. Sean $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{A}$ representantes de los centros. Para cada $f \in \mathcal{A}$ existe j tal que $\max_i |f(t_i) - f_j(t_i)| < \varepsilon/3$. Si $s \in U_{t_i}$, entonces

$$|f(s) - f_j(s)| \leq |f(s) - f(t_i)| + |f(t_i) - f_j(t_i)| + |f_j(t_i) - f_j(s)| < \varepsilon.$$

Esto da un recubrimiento finito uniforme. Como $C(K)$ es completo, la clausura de un conjunto totalmente acotado es compacta: de cualquier sucesión se extrae sucesivamente una subsucesión en una de las finitísimas bolas de radios 2^{-n} y la diagonal es de Cauchy. Si $\mathcal{A}$ o K es vacío, las conclusiones se verifican directamente. ■

Ejemplo 7.10 (Núcleo continuo). Sea $k \in C([0, 1]^2, \mathbb{K})$ y definamos

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s) ds, \quad T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]).$$

La continuidad uniforme de k garantiza que Tf es continua. Además,

$$\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty,$$

así que T es lineal y continuo. Si $\|f\|_\infty \leq 1$, se tiene

$$|(Tf)(t) - (Tf)(u)| \leq \int_0^1 |k(t, s) - k(u, s)| ds \leq \sup_{s \in [0, 1]} |k(t, s) - k(u, s)|.$$

El último término tiende a cero cuando $t - u \rightarrow 0$, uniformemente en f . La imagen de la bola unitaria es equicontinua y uniformemente acotada; Arzelà–Ascoli prueba que T es compacto.

Ejemplo 7.11 (Operador de Volterra). La aplicación

$$V : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \quad (Vf)(t) = \int_0^t f(s) ds$$

es compacta. En efecto, para $\|f\|_\infty \leq 1$,

$$\|Vf\|_\infty \leq 1, \quad |(Vf)(t) - (Vf)(u)| \leq |t - u|.$$

De nuevo se aplica Arzelà–Ascoli. Aquí el núcleo $\mathbf{1}_{\{s \leq t\}}$ no es continuo en todo el cuadrado, por lo que conviene verificar las condiciones directamente. Más adelante calcularemos su espectro.

7.2.2 Estabilidad, aproximación y dualidad

Proposición 7.12. *El conjunto $\mathcal{K}(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Si F es de Banach, es cerrado para la norma de operador.*

Demostración. Si S, T son compactos, la suma de los compactos $\overline{S(B_E)}$ y $\overline{T(B_E)}$ es compacta, por ser la imagen de su producto bajo la suma continua. La clausura de $(S + T)(B_E)$ está contenida en esa suma y es cerrada; por tanto, es compacta. El argumento para múltiplos escalares es inmediato.

Supongamos ahora que F es completo y $T_n \rightarrow T$ en norma, con cada T_n compacto. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos n con $\|T - T_n\| < \varepsilon/3$. Una red finita de radio $\varepsilon/3$ para $T_n(B_E)$ es una red de radio $2\varepsilon/3$ para $T(B_E)$. Así, esta última imagen es totalmente acotada. Su clausura es compacta por completitud de F . ■

Proposición 7.13 (Propiedad de ideal). *Sean $S \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $T \in \mathcal{K}(E, F)$ y $U \in \mathcal{L}(F, F_0)$. Entonces $UTS \in \mathcal{K}(E_0, F_0)$.*

Demostración. La imagen por S de una sucesión acotada sigue siendo acotada. La compacidad de T permite extraer una subsucesión cuyas imágenes por TS convergen en F . La continuidad de U preserva esa convergencia. Aplicamos el criterio secuencial de compacidad. ■

Ejemplo 7.14 (Operadores diagonales). Sea $a = (a_n) \in \ell^\infty$ y consideremos

$$D_a : \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad D_a(x)_n = (a_n x_n)_n.$$

Se tiene $\|D_a\| = \sup_n |a_n|$: la desigualdad superior se obtiene sumando $|a_n x_n|^2$, y la inferior evaluando sobre e_n . Definamos la truncación de rango finito

$$D_a^{(m)} x = (a_1 x_1, \dots, a_m x_m, 0, 0, \dots).$$

Entonces

$$\|D_a - D_a^{(m)}\| = \sup_{n > m} |a_n|.$$

Si $a_n \rightarrow 0$, las truncaciones convergen en norma a D_a y la Proposición 7.12 muestra que D_a es compacto. Recíprocamente, si a_n no tiende a cero, existen $\varepsilon > 0$ e índices distintos n_j con $|a_{n_j}| \geq \varepsilon$. Para $j \neq k$,

$$\|D_a e_{n_j} - D_a e_{n_k}\|_2^2 = |a_{n_j}|^2 + |a_{n_k}|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

La sucesión de imágenes no tiene subsucesión convergente. Por tanto,

$$D_a \text{ es compacto} \iff a_n \rightarrow 0.$$

La Figura 7.1 concreta esta aproximación para $D(x_n) = (x_n/n)$. Aunque la sucesión de vectores unitarios e_n no tiene subsucesiones convergentes en norma, sus imágenes se contraen hacia cero; el control uniforme de las colas se expresa en $\|D - D_N\| = 1/(N+1)$.

Observación 7.15. La cerradura muestra que todo límite en norma de operadores de rango finito es compacto cuando el codominio es de Banach. No estamos afirmando la recíproca para espacios de Banach arbitrarios. En el ejemplo diagonal, la aproximación se construyó explícitamente.

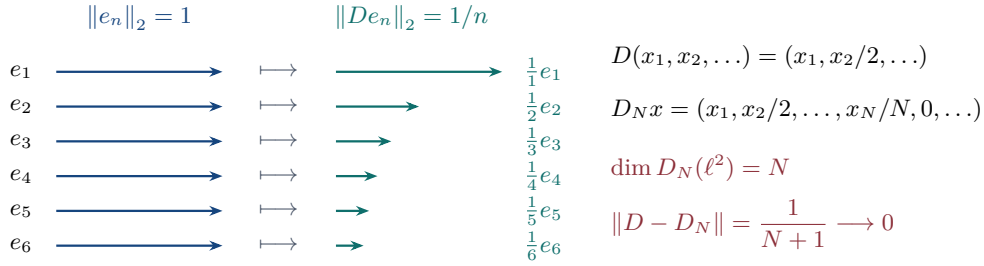


Figura 7.1. El operador diagonal $De_n = n^{-1}e_n$ en ℓ^2 . Las flechas comparan longitudes, no direcciones: los e_n son ortogonales. Aunque $\|e_n\|_2 = 1$, sus imágenes tienden a cero. Las truncaciones D_N prueban que D es compacto.

Recordemos que el adjunto de Banach de $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es

$$T^* : F^* \rightarrow E^*, \quad T^* \varphi = \varphi \circ T.$$

En esta notación los funcionales son lineales y $(\lambda T)^* = \lambda T^*$, también sobre $\mathbb{C}$. El adjunto de Hilbert, que incorpora la identificación mediante el producto interno, se denotará $T^\dagger$ en el capítulo siguiente.

Teorema 7.16 (Schauder). Sean E, F espacios normados y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es compacto, $T^* : F^* \rightarrow E^*$ es compacto. Si además F es de Banach, vale también la recíproca.

Demostración. Supongamos que T es compacto y sea $(\varphi_n) \subset F^*$ acotada, con $\|\varphi_n\| \leq M$. Sobre el compacto métrico $K = \overline{T(B_E)}$, las restricciones $f_n = \varphi_n|_K$ satisfacen

$$|f_n(y) - f_n(z)| \leq M\|y - z\|, \quad |f_n(y)| \leq M\|y\|.$$

Por Arzelà–Ascoli, alguna subsucesión (f_{n_j}) converge uniformemente sobre K . De ahí,

$$\left\| T^* \varphi_{n_j} - T^* \varphi_{n_k} \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi_{n_j}(Tx) - \varphi_{n_k}(Tx)| \leq \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty \rightarrow 0.$$

El dual E^* es completo, de modo que esta sucesión converge en E^* . El criterio secuencial prueba la compacidad de T^* .

Para la recíproca, supongamos que T^* es compacto. La primera parte, aplicada a T^* , implica que $T^{**} : E^{**} \rightarrow F^{**}$ es compacto. Si $J_E : E \rightarrow E^{**}$ y $J_F : F \rightarrow F^{**}$ son las inclusiones canónicas isométricas, entonces

$$T^{**} J_E = J_F T,$$

pues ambos miembros evaluados en $x \in E$ y $\varphi \in F^*$ dan $\varphi(Tx)$. Por la propiedad de ideal, $J_F T$ es compacto. Para cualquier sucesión acotada (x_n) , podemos extraer una subsucesión tal que $(J_F T x_{n_j})$ converge en F^{**} . Como J_F es isométrica, $(T x_{n_j})$ es de Cauchy en F , y la completitud de F garantiza que converge en F . Concluimos que T es compacto. ■

Observación 7.17. La completitud del codominio en la recíproca garantiza que el límite obtenido pertenece a F , y no solo a su completación. Esta distinción es necesaria con la definición de compacidad adoptada, que exige clausura compacta dentro del codominio.

Proposición 7.18. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entre espacios normados.

1. Si T es compacto y $x_n \rightharpoonup x$ en E , entonces $Tx_n \rightarrow Tx$ en norma de F .
2. Si E es reflexivo, T es compacto si y solo si transforma toda sucesión débilmente convergente en una sucesión convergente en norma al valor de T en su límite.

Demostración. Una sucesión débilmente convergente es acotada. Además, $Tx_n \rightharpoonup Tx$ porque $\varphi(Tx_n) = (T^*\varphi)(x_n) \rightarrow (T^*\varphi)(x)$ para todo $\varphi \in F^*$. Si no hubiera convergencia en norma, existirían $\varepsilon > 0$ y una subsucesión con $\|Tx_{n_j} - Tx\| \geq \varepsilon$. La compacidad permitiría extraer una subsucesión adicional convergente en norma a algún $y \in F$. Ese límite también sería su límite débil; por unicidad del límite débil, $y = Tx$, contradicción.

Para la recíproca bajo reflexividad, toda sucesión acotada $(x_n) \subset E$ tiene una subsucesión débilmente convergente a algún $x \in E$, por el Teorema 6.29. La propiedad supuesta da $Tx_{n_j} \rightarrow Tx$ en norma. Aplicamos el criterio secuencial de compacidad. ■

7.3 Rango cerrado y alternativa de Fredholm

Proposición 7.19. Sea E de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, E)$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\dim \ker(\lambda I - T) < \infty, \quad (\lambda I - T)(E) \text{ es cerrado en } E.$$

Demostración. Escribamos $A = \lambda I - T$ y $N = \ker A$, que es cerrado porque A es continuo. En N , el operador T coincide con λI_N . Su restricción a N es compacta como operador con valores en N : cualquier límite de sus imágenes permanece en N , por cerradura. Así, I_N es compacto y N tiene dimensión finita.

Para probar la cerradura del rango, establecemos primero que existe $c > 0$ tal que

$$\|Ax\| \geq c \operatorname{dist}(x, N) \quad (x \in E). \quad (7.2)$$

Si no existiera tal c , podríamos elegir u_n con $\operatorname{dist}(u_n, N) = 1$ y $\|Au_n\| < 1/n$, normalizando contraejemplos a la cota. Para cada n elegimos $z_n \in N$ con $\|u_n - z_n\| < 2$ y ponemos $v_n = u_n - z_n$. Entonces (v_n) es acotada, $\operatorname{dist}(v_n, N) = 1$ y $Av_n \rightarrow 0$. Alguna subsucesión de (Tv_n) converge por compacidad. De

$$\lambda v_n = Av_n + Tv_n$$

se deduce que la misma subsucesión de (v_n) converge a un vector v . Por continuidad, $Av = 0$, pero también $\operatorname{dist}(v, N) = 1$, ya que la distancia a un conjunto es lipschitziana. Esto es imposible y demuestra (7.2).

Ahora sea $Ax_n \rightarrow y$. Elegimos $z_n \in N$ con $\|x_n - z_n\| \leq 2 \operatorname{dist}(x_n, N)$, tomando $z_n = x_n$ si la distancia es cero. La cota (7.2) muestra que $v_n = x_n - z_n$ está acotada, porque (Ax_n) lo está. Tras extraer una subsucesión, Tv_n converge. Como $Av_n = Ax_n \rightarrow y$ y $\lambda v_n = Av_n + Tv_n$, también $v_n \rightarrow v$ para algún $v \in E$, y $Av = y$. Por tanto, y pertenece al rango. ■

Lema 7.20. Si $f : A \rightarrow A$ es inyectiva y no sobreyectiva, entonces $f(f(A))$ es un subconjunto propio de $f(A)$. Más generalmente, las imágenes iteradas forman una cadena estrictamente decreciente.

Demostración. Tomemos $a \in A \setminus f(A)$. El elemento $f(a)$ pertenece a $f(A)$, pero si $f(a) = f(f(b))$ para algún b , la inyectividad implicaría $a = f(b)$, contradicción. Para las iteraciones, si $f^n(A) = f^{n+1}(A)$, la inyectividad de f^n implicaría $A = f(A)$. ■

Teorema 7.21 (Alternativa de Fredholm). *Sea E de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, E)$ y $\lambda \neq 0$. El operador $\lambda I - T$ es inyectivo si y solo si es sobreyectivo. En consecuencia, se cumple exactamente una de las siguientes alternativas:*

1. $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ y, para cada $y \in E$, existe un único $x \in E$ tal que $\lambda x - Tx = y$; la solución depende continuamente de y .
2. $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$ y el rango es un subespacio cerrado propio de E . Hay datos y para los cuales la ecuación no tiene solución; cuando existe una solución x_0 , todas son $x_0 + \ker(\lambda I - T)$.

Demostración. Sea $A = \lambda I - T$. Supongamos primero que A es inyectivo pero no sobreyectivo. Definimos $R_n = A^n(E)$ para $n \geq 0$, con $R_0 = E$. Por el lema anterior,

$$R_0 \supsetneq R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq \cdots$$

Cada R_n es cerrado: al expandir la potencia obtenemos $A^n = \lambda^n I - K_n$, donde K_n es una combinación finita de potencias positivas de T y, por las propiedades de subespacio e ideal, es compacto. Aplicamos la Proposición 7.19.

El lema de Riesz permite elegir $x_n \in R_{n-1}$ con $\|x_n\| = 1$ y $\text{dist}(x_n, R_n) > 1/2$. Si $m > n$, entonces $x_m \in R_n$, $Ax_n \in R_n$ y $Tx_m \in R_n$; esta última inclusión usa que T conmuta con A y preserva todas sus imágenes iteradas. Por tanto,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda x_n - (Ax_n + Tx_m)\| \geq |\lambda| \text{dist}(x_n, R_n) > \frac{|\lambda|}{2}.$$

Esto contradice la compacidad de T . Hemos probado que la inyectividad implica sobreyectividad.

Para la otra implicación, supongamos que A es sobreyectivo. Entonces $A^* = \lambda I - T^*$ es inyectivo: un funcional que se anula sobre $A(E) = E$ es cero. Por Schauder, T^* es compacto, y E^* es de Banach. La implicación ya probada, aplicada a A^* , muestra que A^* es sobreyectivo. Si $Ax = 0$, todo $\varphi \in E^*$ puede escribirse como $\varphi = A^*\psi$ y satisface

$$\varphi(x) = \psi(Ax) = 0.$$

Hahn–Banach implica $x = 0$. Así, A es inyectivo.

Si el núcleo es trivial, la inversa de A es continua por la aplicación abierta. Si no es trivial, la equivalencia anterior asegura que el rango es propio; su cerradura ya está demostrada. Finalmente, $Ax = Ax_0$ equivale a $x - x_0 \in \ker A$, lo que describe todas las soluciones. ■

Corolario 7.22 (Compatibilidad de los datos). *Bajo las hipótesis del teorema anterior, la ecuación $\lambda x - Tx = y$ tiene solución si y solo si*

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in \ker(\lambda I - T^*).$$

Basta verificar esta condición en una base de ese núcleo, que tiene dimensión finita.

Demostración. Si $y = Ax$ y $A^*\varphi = 0$, entonces $\varphi(y) = \varphi(Ax) = (A^*\varphi)(x) = 0$. Recíprocamente, si $y \notin A(E)$, como $A(E)$ es un subespacio cerrado, Hahn–Banach proporciona un funcional φ que se anula sobre $A(E)$ y no sobre y . Ese funcional pertenece a $\ker A^*$. Por tanto, las condiciones son equivalentes. La finitud del núcleo dual se sigue de Schauder y de la Proposición 7.19 aplicada en E^* . ■

Observación 7.23. Tomando $\lambda = 1$, la alternativa dice: o bien T tiene un punto fijo no nulo, o bien para cada $y \in E$ existe una única solución de $Tx - x = y$. En esta segunda formulación cambia únicamente el signo del dato. El orden correcto de cuantificadores es $\forall y \exists! x$; no se afirma que un mismo x resuelva la ecuación para todos los datos.

7.4 El espectro de un operador compacto

Teorema 7.24. Sea E de Banach y $T \in \mathcal{K}(E, E)$.

1. Todo $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ es un autovalor y su autoespacio tiene dimensión finita.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, solo hay finitísimos puntos de $\sigma(T)$ con $|\lambda| \geq \varepsilon$. En particular, los puntos espectrales no nulos son aislados, forman un conjunto a lo sumo numerable y su único punto de acumulación posible es 0.
3. Si E tiene dimensión infinita, entonces $0 \in \sigma(T)$ y

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T).$$

No necesariamente 0 es un autovalor.

Demostración. Para $\lambda \neq 0$, Fredholm asegura que si $\lambda I - T$ no es invertible, tampoco es inyectivo. Por tanto, λ es autovalor. La finitud del autoespacio ya fue demostrada.

Supongamos que hay infinitos puntos espectrales distintos λ_n con $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$, y elijamos autovectores $e_n \neq 0$. Los autovectores de autovalores distintos son linealmente independientes: en una relación finita mínima, aplicar $T - \lambda_n I$ eliminaría un término y produciría una relación no trivial más corta. Pongamos $M_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. El lema de Riesz permite elegir $u_n \in M_n$ con $\|u_n\| = 1$ y $\text{dist}(u_n, M_{n-1}) > 1/2$, donde $M_0 = \{0\}$.

Como $(T - \lambda_n I)u_n \in M_{n-1}$ y $Tu_m \in M_{n-1}$ para $m < n$, tenemos

$$\|Tu_n - Tu_m\| \geq |\lambda_n| \text{dist}(u_n, M_{n-1}) > \varepsilon/2.$$

Esto contradice la compacidad de T . Así, fuera de cada disco de radio ε hay solo finitísimos puntos espectrales. Tomando $\varepsilon = 1/m$ vemos que los puntos no nulos forman una unión numerable de conjuntos finitos. La misma propiedad excluye acumulación en un punto no nulo y demuestra que cada uno de ellos está aislado.

Si E es de dimensión infinita y $0 \notin \sigma(T)$, entonces T tiene inversa continua y $I = T^{-1}T$ sería compacto por la propiedad de ideal. Esto contradice la caracterización de dimensión finita mediante la compacidad de la identidad. Por tanto, $0 \in \sigma(T)$, y la descripción del espectro se sigue del primer punto. ■

Ejemplo 7.25. En ℓ^2 , el operador

$$D(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$$

es compacto por el Ejemplo 7.14. Cada $1/n$ es autovalor con autoespacio $\text{span}\{e_n\}$. Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1/n$ para todo n , la sucesión $((\lambda - 1/n)^{-1})_n$ es acotada: para índices grandes, $1/n$ está separado de λ , y quedan solo finitísimos denominadores no nulos. Por ello,

$$R(\lambda, D)(y_n)_n = \left(\frac{y_n}{\lambda - 1/n} \right)_n$$

es un operador acotado que invierte $\lambda I - D$. En consecuencia,

$$\sigma(D) = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}.$$

El operador D es inyectivo, de modo que 0 no es un autovalor. No es sobreyectivo: el vector $(1/n)_n$ pertenece a ℓ^2 , pero su única preimagen coordenada a coordenada sería $(1, 1, \dots)$, que no pertenece a ℓ^2 .

Ejemplo 7.26 (Espectro de Volterra). El operador V del Ejemplo 7.11 es inyectivo, porque $(Vf)' = f$. Tampoco tiene autovalores no nulos: si $Vf = \lambda f$ con $\lambda \neq 0$, entonces f es de clase C^1 y satisface

$$\lambda f' = f, \quad f(0) = 0.$$

La derivada de $e^{-t/\lambda}f(t)$ es cero, de modo que $f = 0$. Como V es compacto en un espacio de dimensión infinita, el Teorema 7.24 da

$$\sigma(V) = \{0\}, \quad \sigma_p(V) = \emptyset.$$

Este ejemplo muestra que un operador compacto no nulo puede no tener ningún autovector.

También podemos construir todas sus inversas resolventes. La integración iterada da, para $n \geq 1$,

$$(V^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad \|V^n\| = \frac{1}{n!}.$$

La fórmula se verifica por inducción e intercambio del orden de integración sobre el triángulo $0 \leq s \leq t \leq 1$. La cota de norma se obtiene integrando el núcleo positivo; la igualdad se alcanza con $f = 1$ y $t = 1$. Por tanto, para todo $\lambda \neq 0$, la serie

$$R(\lambda, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{\lambda^{n+1}}$$

converge absolutamente en norma, ya que sus normas suman a lo sumo $|\lambda|^{-1} \exp(|\lambda|^{-1})$. Multiplicar las sumas parciales por $\lambda I - V$ deja el residuo V^{n+1}/λ^{n+1} , que tiende a cero. Así, esta serie es efectivamente la inversa para todo $\lambda \neq 0$, incluso cuando $\|V/\lambda\| \geq 1$.

Operadores autoadjuntos y descomposición espectral

Los resultados del capítulo anterior describen el espectro de un operador compacto. La estructura de Hilbert permite ir más lejos: para un operador compacto autoadjunto, sus autovectores dan una descomposición ortogonal de todo el espacio. El producto interno será lineal en la primera entrada. No suponemos separabilidad de los espacios de Hilbert.

8.1 El adjunto de Hilbert

Definición 8.1 (Construcción mediante Riesz). Para un espacio de Hilbert H , sea

$$R_H : H \longrightarrow H^*, \quad (R_H y)(x) = \langle x, y \rangle.$$

Por el teorema 5.32, R_H es una biyección isométrica. Es lineal sobre $\mathbb{R}$ y conjugado-lineal sobre $\mathbb{C}$: $R_H(\alpha y) = \bar{\alpha} R_H y$.

Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, definimos su *adjunto de Hilbert* por

$$T^\dagger = R_{H_1}^{-1} \circ T^* \circ R_{H_2} : H_2 \longrightarrow H_1.$$

Aquí $T^* : H_2^* \rightarrow H_1^*$ es el adjunto de Banach del capítulo 4. La notación $\dagger$ distingue ambos operadores.

Proposición 8.2. Para $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $T^\dagger \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ y

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\dagger y \rangle \quad (x \in H_1, y \in H_2). \quad (8.1)$$

2. $T^\dagger$ es el único operador que satisface (8.1).

3. $\|T^\dagger\| = \|T\|$ y $(T^\dagger)^\dagger = T$.

4. La aplicación $T \mapsto T^\dagger$ es una biyección isométrica entre $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathcal{L}(H_2, H_1)$. Es lineal sobre $\mathbb{R}$ y conjugado-lineal sobre $\mathbb{C}$:

$$(\alpha T + \beta S)^\dagger = \bar{\alpha} T^\dagger + \bar{\beta} S^\dagger.$$

Si las composiciones están definidas, $(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger$.

Demostración. En el caso complejo, R_{H_2} y $R_{H_1}^{-1}$ son conjugado-lineales, mientras que T^* es lineal. Su composición es, por tanto, lineal. En el caso real todas las aplicaciones son lineales. Como las aplicaciones de Riesz son isometrías,

$$\|T^\dagger y\| = \|T^*(R_{H_2} y)\| \leq \|T^*\| \|y\| = \|T\| \|y\|.$$

La última igualdad es la proposición 4.15. La definición da

$$\langle x, T^\dagger y \rangle = (R_{H_1} T^\dagger y)(x) = (T^* R_{H_2} y)(x) = (R_{H_2} y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle.$$

Si otro operador A satisface esa identidad, $\langle x, (T^\dagger - A)y \rangle = 0$ para todo x , y tomar $x = (T^\dagger - A)y$ prueba la unicidad.

Por simetría conjugada,

$$\langle T^\dagger y, x \rangle = \overline{\langle x, T^\dagger y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle.$$

La unicidad implica $(T^\dagger)^\dagger = T$. Aplicando a $T^\dagger$ la cota ya demostrada obtenemos $\|T\| \leq \|T^\dagger\|$, y con ello la igualdad de normas y la biyectividad.

Finalmente, la conjugación de escalares en la segunda entrada de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verifica la fórmula para combinaciones lineales. Asimismo,

$$\langle STx, z \rangle = \langle Tx, S^\dagger z \rangle = \langle x, T^\dagger S^\dagger z \rangle,$$

y la unicidad prueba la fórmula de composición. ■

Proposición 8.3 (Rango y núcleo). Si $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces

$$(\text{ran } A)^\perp = \ker A^\dagger, \quad \overline{\text{ran } A} = (\ker A^\dagger)^\perp.$$

Demostración. Un vector $y \in H_2$ es ortogonal a $\text{ran } A$ si y solo si $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\dagger y \rangle = 0$ para todo $x \in H_1$, lo que equivale a $A^\dagger y = 0$. La segunda igualdad se obtiene tomando complementos ortogonales y usando la descomposición ortogonal del teorema 5.15. ■

8.2 Autoadjunción y forma cuadrática

Definición 8.4. Un operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$ es *autoadjunto* si $T = T^\dagger$. Equivalentemente,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in H).$$

Su forma cuadrática es $q_T(x) = \langle Tx, x \rangle$.

Proposición 8.5. En un espacio de Hilbert complejo, T es autoadjunto si y solo si $q_T(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

Demostración. Si $T = T^\dagger$, entonces $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$.

Recíprocamente, si todos esos valores son reales, pongamos $A = T - T^\dagger$. Se cumple $\langle Ax, x \rangle = q_T(x) - \overline{q_T(x)} = 0$. La polarización de la forma sesquilineal $B(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ da

$$\begin{aligned} 4B(x, y) &= B(x + y, x + y) - B(x - y, x - y) \\ &\quad + iB(x + iy, x + iy) - iB(x - iy, x - iy) = 0. \end{aligned}$$

Luego $B(x, y) = 0$ para todo x, y , y tomando $y = Ax$ obtenemos $A = 0$. ■

Ejemplo 8.6 (La hipótesis compleja es esencial). En $\mathbb{R}^2$, la rotación $J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ cumple $\langle Jx, x \rangle = 0$ para todo x , pero $J^\dagger = -J \neq J$. Sobre $\mathbb{R}$, que la forma cuadrática tenga valores reales es automático y no caracteriza la autoadjunción.

Teorema 8.7 (Norma de un operador autoadjunto). *Sea $H \neq \{0\}$ un espacio de Hilbert real o complejo y $T = T^\dagger \in \mathcal{L}(H, H)$. Entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Demostración. Denotemos el supremo por M . Cauchy-Schwarz da $M \leq \|T\|$ y, por homogeneidad, $|q_T(z)| \leq M\|z\|^2$ para todo z .

Sean x, y unitarios. En el caso complejo, multiplicando y por una fase de módulo uno podemos suponer que $\langle Tx, y \rangle$ es real y no negativo; en el caso real basta cambiar su signo. La autoadjunción implica

$$4|\langle Tx, y \rangle| = q_T(x + y) - q_T(x - y).$$

Por consiguiente, usando la identidad del paralelogramo,

$$4|\langle Tx, y \rangle| \leq M(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 4M.$$

Tomando el supremo sobre los vectores unitarios y obtenemos $\|Tx\| \leq M$; tomando después el supremo sobre x concluimos $\|T\| \leq M$. ■

8.3 Autovalores y resolvente

Usamos la convención del capítulo 7: $\lambda \in \rho(T)$ si $\lambda I - T$ tiene inverso lineal continuo, y $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$. Para espacios complejos, la realidad del espectro será una conclusión. Para espacios reales, las afirmaciones con $\lambda \in \mathbb{K}$ se refieren al resolvente real.

Proposición 8.8. *Si $T = T^\dagger$, sus autovalores son reales. Además, los autoespacios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Demostración. Si $Tx = \lambda x$ con $x \neq 0$, entonces

$$\lambda\|x\|^2 = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R},$$

así que $\lambda \in \mathbb{R}$. Si además $Ty = \mu y$, por autoadjunción,

$$\lambda\langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \bar{\mu}\langle x, y \rangle = \mu\langle x, y \rangle.$$

Para $\lambda \neq \mu$ se obtiene $\langle x, y \rangle = 0$. ■

Proposición 8.9 (Cota inferior y resolvente). *Sea $T = T^\dagger \in \mathcal{L}(H, H)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces $\lambda \in \rho(T)$ si y solo si existe $c > 0$ tal que*

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq c\|x\| \quad (x \in H). \quad (8.2)$$

En ese caso, $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq 1/c$.

Demostración. Si existe el inverso continuo, la identidad $x = (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x$ da la cota inferior, tomando $c = 1/\|(\lambda I - T)^{-1}\|$ si $H \neq \{0\}$. El caso $H = \{0\}$ es inmediato.

Supongamos ahora (8.2) y escribamos $A = \lambda I - T$. La cota implica que A es inyectivo y que su rango es cerrado: si $Ax_n \rightarrow y$, entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|Ax_n - Ax_m\|,$$

por lo que x_n converge a algún $x \in H$ y $Ax = y$.

Falta la sobreyectividad. Como $q_T(x)$ es real,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \|Tx\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)q_T(x) + |\lambda|^2\|x\|^2 = \|(\bar{\lambda}I - T)x\|^2.$$

Por tanto, $A^\dagger = \bar{\lambda}I - T$ satisface la misma cota inferior y $\ker A^\dagger = \{0\}$. La proposición 8.3 muestra que $\operatorname{ran} A$ es denso. Al ser también cerrado, es todo H . Finalmente, (8.2) da la cota del inverso. ■

Observación 8.10. Una cota inferior para un operador arbitrario sólo garantiza inyectividad y rango cerrado. Aquí la autoadjunción permite comprobar también que el rango es denso; ese paso no puede omitirse.

Corolario 8.11 (Espectro real). *Para un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert complejo,*

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|].$$

Si $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, entonces

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Demostración. Para $x \neq 0$, la realidad de $q_T(x)$ y Cauchy-Schwarz dan

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|x\|^2 = |\operatorname{Im} \langle (\lambda I - T)x, x \rangle| \leq \|(\lambda I - T)x\| \|x\|.$$

La proposición 8.9 implica que todo λ no real está en el resolvente y proporciona la cota. Para $|\lambda| > \|T\|$, la serie de Neumann del capítulo anterior da la invertibilidad; así, el espectro real queda en el intervalo indicado. ■

8.4 Un autovalor de módulo máximo

Proposición 8.12. *Si $T \neq 0$ es compacto y autoadjunto, uno de los números $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un autovalor de T . En particular, existe un vector unitario v con*

$$|\langle Tv, v \rangle| = \|T\|.$$

Demostración. Sea $a = \|T\| > 0$. Por el teorema 8.7, existen vectores unitarios x_n con $|q_T(x_n)| \rightarrow a$. Pasando a una subsucesión, podemos escoger $\lambda \in \{a, -a\}$ de modo que $q_T(x_n) \rightarrow \lambda$. Como λ es real,

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda q_T(x_n) + \lambda^2 \\ &\leq 2a^2 - 2\lambda q_T(x_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La compacidad permite tomar otra subsucesión con $Tx_n \rightarrow y$. Puesto que $\lambda \neq 0$, la relación anterior implica $x_n \rightarrow v = y/\lambda$. Entonces $\|v\| = 1$ y, por continuidad, $Tv = \lambda v$. Finalmente, $q_T(v) = \lambda$. ■

Corolario 8.13. *Sea $H \neq \{0\}$ y T compacto y autoadjunto. Entonces $\sigma(T) \neq \emptyset$. Además,*

$$\sigma(T) = \{0\} \iff T = 0.$$

Demostración. Si $T \neq 0$, la proposición 8.12 produce un autovalor no nulo, que pertenece al espectro. Si $T = 0$ y $H \neq \{0\}$, λI es invertible exactamente para $\lambda \neq 0$, luego $\sigma(T) = \{0\}$. ■

8.5 Descomposición espectral de un compacto autoadjunto

Teorema 8.14 (Descomposición espectral). *Sea H un espacio de Hilbert real o complejo y $T \in \mathcal{L}(H, H)$ compacto y autoadjunto. Existen una familia ortonormal $(u_j)_{j \in J}$ que es base de $\ker T$ y una familia ortonormal $(v_n)_{n \in A}$ de autovectores con autovalores reales no nulos λ_n , tales que:*

1. *El conjunto A es vacío, finito o numerable. Los λ_n se cuentan con su multiplicidad y pueden ordenarse de modo que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Si A es infinito, $\lambda_n \rightarrow 0$.*
2. *La familia $\{u_j : j \in J\} \cup \{v_n : n \in A\}$ es una base ortonormal de H , y*

$$(\ker T)^\perp = \overline{\text{ran } T} = \overline{\text{span}\{v_n : n \in A\}}.$$

3. *Para todo $x \in H$,*

$$Tx = \sum_{n \in A} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n, \quad (8.3)$$

con convergencia en la norma de H .

4. *Si $A = \mathbb{N}$ y $T_N x = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$, entonces*

$$\|T - T_N\| = \sup_{n > N} |\lambda_n| = |\lambda_{N+1}| \rightarrow 0. \quad (8.4)$$

Si A es finito, la suma es exacta tras incluir todos sus términos.

La familia del núcleo puede ser no numerable; no se necesita que H sea separable.

Demostración. Por los resultados 7.19 y 7.24, cada autoespacio de autovalor no nulo tiene dimensión finita y, para cada $\varepsilon > 0$, hay sólo un número finito de autovalores con módulo al menos ε . En consecuencia, los autovalores no nulos y sus bases finitas aportan en total una familia a lo sumo numerable. Elegimos una base ortonormal en cada autoespacio. Por la proposición 8.8, su unión $(v_n)_{n \in A}$ es ortonormal. La finitud por encima de cada ε permite ordenar los módulos de manera no creciente y prueba que, en el caso infinito, tienden a cero.

Sea $M = \overline{\text{span}\{v_n : n \in A\}}$. Como $Tv_n = \lambda_n v_n$ y T es continuo, M es invariante bajo T . Su complemento ortogonal también lo es: si $x \in M^\perp$ y $y \in M$, entonces

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0.$$

La restricción $S = T|_{M^\perp} : M^\perp \rightarrow M^\perp$ es compacta y autoadjunta. Si $S \neq 0$, la proposición 8.12 daría un autovector no nulo de S con autovalor no nulo. Ese vector pertenecería a M por la elección de todas las bases de autoespacios y a $M^\perp$, contradicción. Por tanto, $S = 0$ y $M^\perp \subseteq \ker T$.

Recíprocamente, si $x \in \ker T$, su producto interno con cada v_n es cero por la ortogonalidad de autoespacios; por continuidad, $x \in M^\perp$. Así, $M^\perp = \ker T$ y $M = (\ker T)^\perp$. La igualdad con $\overline{\text{ran } T}$ se sigue de la proposición 8.3 y $T^\dagger = T$.

El núcleo es un subespacio cerrado, luego es un espacio de Hilbert. El teorema 5.30 proporciona una base ortonormal $(u_j)_{j \in J}$, con J arbitrario. La descomposición $H = \ker T \oplus M$ muestra que la unión de ambas familias es completa. Por el teorema 5.24,

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j + \sum_{n \in A} \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Cada vector tiene a lo sumo un número numerable de coeficientes no nulos, incluso si J es no numerable; las sumas convergen en norma. Aplicando el operador continuo T , que anula el primer sumando, obtenemos (8.3).

Finalmente, Bessel y la ortogonalidad dan, para $A = \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|(T - T_N)x\|^2 &= \sum_{n>N} |\lambda_n|^2 |\langle x, v_n \rangle|^2 \\ &\leq \left(\sup_{n>N} |\lambda_n| \right)^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Esto prueba una de las cotas de (8.4). La otra resulta de evaluar $T - T_N$ en v_n para cada $n > N$. El orden escogido identifica el supremo con $|\lambda_{N+1}|$. ■

Observación 8.15 (El papel del autovalor cero). La serie (8.3) sólo necesita los autovectores de autovalor no nulo: toda la componente de x en $\ker T$ desaparece. Si $H \neq \{0\}$, el espectro puede escribirse como

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in A\}} \cup Z_T, \quad Z_T = \begin{cases} \{0\}, & \ker T \neq \{0\}, \\ \emptyset, & \ker T = \{0\}. \end{cases}$$

En efecto, fuera de cero, el teorema 7.24 caracteriza el espectro por autovalores. Si la lista es infinita, cero es su límite y pertenece al espectro. Si la lista es finita y el núcleo es nulo, la base espectral muestra que H es finito-dimensional y T es invertible; en ese caso, cero no está en el espectro.

8.6 Ejemplos: diagonalización y sus límites

El operador positivo $D(x_n) = (x_n/n)$ del ejemplo 7.25 tiene espectro $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$. La Figura 8.1 distingue los autovalores del punto espectral cero, que en este ejemplo no es autovalor.

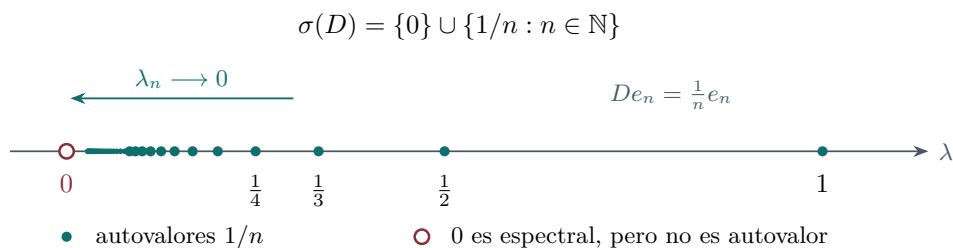


Figura 8.1. Espectro del operador compacto autoadjunto e inyectivo $D(x_n) = (x_n/n)$ en ℓ^2 . Los autovalores no nulos se acumulan únicamente en 0. Como $\ker D = \{0\}$, el punto 0 pertenece al espectro sin ser autovalor.

El siguiente ejemplo cambia los signos de la diagonal y permite ver cómo la misma descomposición representa operadores que no son positivos.

Ejemplo 8.16 (Una diagonal compacta con signos alternantes). En ℓ^2 , definamos

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, -\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, -\frac{x_4}{4}, \dots \right).$$

Sus coeficientes diagonales son reales y tienden a cero, por lo que T es autoadjunto y compacto; véase el ejemplo 7.14. La base canónica (e_n) es una base ortonormal de autovectores y

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \|T\| = 1.$$

El operador es inyectivo, pero

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} : n \geq 1 \right\}.$$

Cero está en el espectro sin ser autovalor: $\|Te_n\| = 1/n$ impide la cota inferior de la proposición 8.9. La aproximación por los primeros N modos tiene error exacto

$$\|T - T_N\| = \frac{1}{N+1}.$$

Ejemplo 8.17 (Un núcleo no separable). Sea I un conjunto no numerable y $H = \ell^2(I)$, con producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \overline{y_i}$. Cada elemento tiene soporte a lo sumo numerable. Fijado $i_0 \in I$, el operador

$$Px = \langle x, e_{i_0} \rangle e_{i_0}$$

es una proyección ortogonal de rango uno, por tanto compacta y autoadjunta. El único autovalor no nulo es 1, con autovector e_{i_0} , mientras que $\ker P$ tiene la base ortonormal no numerable $\{e_i : i \neq i_0\}$. La representación de P utiliza un solo término; una base ortonormal de todo H no puede enumerarse como una sucesión.

Ejemplo 8.18 (Multiplicación: autoadjunto sin autovectores). En $H = L^2((0, 1))$, con medida de Lebesgue, consideremos

$$(Mf)(t) = tf(t).$$

Es autoadjunto porque $\langle Mf, g \rangle = \int_0^1 tf(t) \overline{g(t)} dt = \langle f, Mg \rangle$. Además, $\|M\| = 1$: la cota superior es inmediata y las funciones unitarias soportadas cada vez más cerca de 1 dan la cota inferior.

Este operador no tiene autovalores. Si $Mf = \lambda f$, entonces $(t - \lambda)f(t) = 0$ casi en todas partes. El conjunto $\{t : t = \lambda\}$ es vacío o un conjunto de medida cero, de modo que $f = 0$ como elemento de L^2 .

Sin embargo, $\sigma(M) = [0, 1]$. Si $\lambda \notin [0, 1]$, la distancia de λ a ese intervalo es positiva, y

$$((\lambda I - M)^{-1}g)(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$$

define un operador acotado. Si $\lambda \in [0, 1]$, para $\varepsilon > 0$ tomemos $A_\varepsilon = (0, 1) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ y

$$f_\varepsilon = \frac{\mathbf{1}_{A_\varepsilon}}{\sqrt{\mu(A_\varepsilon)}}.$$

Entonces $\|f_\varepsilon\|_2 = 1$ y $\|(\lambda I - M)f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$. La proposición 8.9 excluye a λ del resolvente.

Para ver directamente que M no es compacto, elijamos intervalos disjuntos $I_n \subset (1/2, 1)$ de medida positiva y $h_n = \mathbf{1}_{I_n} / \sqrt{\mu(I_n)}$. La sucesión (h_n) es unitaria. Los vectores Mh_n son ortogonales y tienen norma al menos $1/2$, luego

$$\|Mh_n - Mh_m\|^2 = \|Mh_n\|^2 + \|Mh_m\|^2 \geq \frac{1}{2} \quad (n \neq m).$$

No hay subsucesión convergente. También falla la existencia de un vector que alcance el extremo de la forma cuadrática: para todo $\|f\|_2 = 1$,

$$\langle Mf, f \rangle = \int_0^1 t|f(t)|^2 dt < 1 = \|M\|.$$

Así, la compacidad es la hipótesis que permite pasar de aproximaciones espectrales a una base de autovectores en el teorema [8.14](#).