# Práctica Dirigida 4

Marcelo Gallardo

Junio 2024

**Pontificia Universidad Católica del Perú**

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

## 1. Ejercicios Topología Débil y Débil Estrella

**1.** Considere el funcional lineal $\varphi : \ell_1 \to \mathbb{K}$, $\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Muestre que $\varphi$ es continuo con la norma pero no es continuo con la topología débil estrella de $\ell_1 = (c_0)'$.

**2.** Considere el funcional lineal $C[-2,2]$ que satisface las propiedades

a) $f_n(t) = 0$ para $|t| > 1/n$

b) $f_n(t) \geq 0$ para $|t| \leq 1/n$

c) $\int_{-2}^{2} f_n(t) = 1$.

Defina los funcionales

$$\varphi_n(x) = \int_{-2}^{2} f_n(t)x(t)dt,\ x \in C[-2,2].$$

Pruebe:

a) que los funcionales $\varphi_n$ son continuos con la topología de la norma de $C[-2,2]$

b) la convergencia $\varphi_n \underbrace{\to}_{w^*} \delta$ con la topología débil estrella.

**3.** Pruebe que, para $1 < p < \infty$, el espacio $\ell_p$ no contiene una copia isomorfa de ninguno de los siguientes espacios: $c_0, \ell_\infty$ y $\ell_1$.

**4.** Pruebe que $\ell_1$ no tiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.

**5.** Pruebe que si $x_n \underbrace{\to}_{w} x$ y $y_n \to y$ en un espacio con producto interno, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

## 2. Operadores compactos

**1.** Muestre que el operador $T : \ell_2 \to \ell_2$ dado por $T((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \left(\frac{a_j}{j}\right)_{j=1}^{\infty}$ es compacto más no de rango finito.

**2.** Pruebe que el operador

$$T_1 : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$$

definido por $T_1(f) = xf(x)$ es continuo, autoadjunto y no tiene autovalores.

**3.** Considere el espacio $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_{\infty}$. Pruebe que el operador

$$T_2 : C[0,1] \to C[0,1],\ T_2(f)(x) = \int_0^x f(s)ds$$

es compacto y no tiene autovalores.