Práctica Dirigida 3 de Análisis Funciojnal

Marcelo Gallardo

Mayo 2024

Especialidad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1. Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ una secuencia de escalares de $p \geq 1$. Suponga que, para toda secuencia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente. Pruebe que $a \in \ell_\infty$ si $p = 1$ y que $a \in \ell_q$ si $p > 1$, con $1/q + 1/p = 1$.

Defina

$$\varphi_n : \ell_p \to \mathbb{K},\ \varphi_n((b_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Entonces, si $p = 1$

$$\begin{aligned} ||\varphi_n|| &= \sup_{||(b_j)||_1 \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| \\ &= \max_{1\leq j\leq n} |a_j|. \end{aligned}$$

En caso $p > 1$, usando la desigualdad de Holder:

$$||\varphi_n|| = \sup_{||(b_j)||_p \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}.$$

La convergencia de $\sum_n a_n b_n$ asegura que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente limitada. Luego, dado que ℓ_p es completo, por Banach-Steinhauss, es uniformemente limitada. Como

$$\begin{aligned} &\sup_n |a_n| = ||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty < \infty \\ &\sup_n \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q} \right\} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q \right)^{1/q} < \infty, \end{aligned}$$

concluimos que

$$(a_n) \in \ell_\infty \ \vee \ (a_n) \in \ell_q.$$

2. Sea F un subespacio cerrado de un espacio normado $(E, ||\cdot||_E)$.

a) Pruebe que $||[x]|| = \text{ínf}\{||x-y||_E : \ y \in F\}$ es una norma del espacio cociente E/F.

b) Pruebe que si $(E, ||\cdot||_E)$ es de Banach entonces $(E/F, ||\cdot||)$ también es de Banach.

c) ¿Si E es reflexivo en cociente E/F es reflexivo? Justifique.

d) ¿Si $||\cdot||_E$ proviene de un producto interno la norma $||\cdot||$ proviene de un producto interno? Justifique.

Veamos que $||\cdot||$ es una norma. Primero, notemos que está bien definida pues, si tomamos $x, y \in E$ tales que $[x] = [y]$, entonces $||[x]|| = ||[y]||$.

Demostración. Por un lado, como $[x] = [y]$, $x - y \in F$. Así,

$$\begin{aligned} \text{ínf}_{z\in F} ||x-z||_E &= \text{ínf}_{z\in(y-x)+F} ||x-(z-(y-x))||_E \\ &= \text{ínf}_{z\in(y-x)+F} ||y-z||_E \\ &= \text{ínf}_{z\in F} ||y-z||_E. \end{aligned}$$

Se ha usado que $x - y + F = F$. □

Ahora, para la **positividad**, ciertamente como $||\cdot||_E$ es norma, $||[x]|| \geq 0$. Luego, si $[x] = [0]$, $x \in M$. Así,

$$||[x]|| = \text{ínf}_{y\in F} ||x-y||_E = \text{ínf}_{z\in F} ||z|| = 0$$

pues $x - y \in F$ y $0 \in F$. Finalmente, si $||[x]|| = 0$, o sea $\text{ínf}_{y\in F} ||x-y|| = 0$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que

$$||x - y_n||_E < \frac{1}{n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pero entonces, $||x-y_n||_E \to 0$. Esto es, $y_n \to x$. Al ser F cerrado, $x \in F$. Así, $[x] = [0] = 0_{E/F}$.

Analicemos ahora la **homogeneidad**. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. En particular, consideremos $\lambda \neq 0$ (en dicho caso, trivialmente $\lambda x = 0$ y $[0] = 0_{E/F}$):

$$\begin{aligned} ||[\lambda x]|| &= \text{ínf}_{y\in F} ||\lambda x - y||_E \\ &= \text{ínf}_{y\in F} ||\lambda(x - y/\lambda)||_E \\ &= \text{ínf}_{y/\lambda\in F} |\lambda| \cdot ||(x-y/\lambda)||_E \\ &= \text{ínf}_{z\in F} |\lambda| \cdot ||(x-z)||_E \\ &= |\lambda| \cdot \text{ínf}_{z\in E} ||(x-z)||_E \\ &= |\lambda| \cdot ||[x]||. \end{aligned}$$

Notemos que se ha usado la homogeneidad de $||\cdot||_E$ y el hecho que F es subespacio ($y/\lambda \in F$ para todo λ no nulo).

Queda únicamente por verse la **desigualdad triangular**. Sean $x, y \in X$. Queremos probar que

$$|||[x]+[y]||| \leq |||[x]||| + |||[y]|||.$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}
|||[x]+[y]||| &= |||[x+y]||| \\
&= \inf_{z\in F} ||(x+y)-z||_E \\
&= \inf_{z,w\in F} ||(x+y)-z-w||_E \\
&\leq \inf_{z,w\in F} (||x-z||_E + ||y-w||_E) \\
&= \inf_{z,w\in F} ||x-z||_E + \inf_{z,w\in F} ||y-w||_E \\
&= |||[x]||| + |||[y]|||.
\end{aligned}$$

Observación. Se está usando el siguiente hecho. Dados $z, v, w \in F$

$$\inf_{z\in F} ||x-z|| = \inf_{v,w\in F} ||x-(v+w)||.$$

En efecto, como $v+w \in F$

$$\inf_{z\in F} ||x-z|| \leq \inf_{v,w\in F} ||x-(v+w)||.$$

Luego, $z = z+0$. Tomando $w = z$ y $v = 0 \in F$ se tiene la otra desigualdad.

b) Si $(E, ||\cdot||_E)$ es de Banach, entonces $(E/F, ||\cdot||)$ es de Banach. En efecto, consideremos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en E/F. Entonces, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de forma que

$$|||[x_{n_{k+1}}]-[x_{n_k}]||| < 2^{-k}.$$

Vamos a construir $z_k \in F$ de forma que $x_{n_k} - z_k$ sea de Cauchy en E. Al ser E de Banach, tendremos que $x_{n_k} - z_k \to z \in E$ y podremos concluir con lo solicitado. Veamos. Sea $z_1 = 0$:

$$\inf_{y\in F} ||(x_{n_1}-z_1)-x_{n_2}-y||_E = \inf_{y\in F} ||x_{n_1}-x_{n_2}-y||_E = |||[x_{n_1}]-[x_{n_2}]||| < \frac{1}{2}.$$

Entonces, existe $z_2 \in F$ de forma que

$$||(x_{n_1}-z_1)-(x_{n_2}-z_2)||_E < \frac{1}{2}.$$

Ahora, como $z_2 \in M$

$$\inf_{y\in F} ||(x_{n_2}-z_2)-x_{n_3}-y||_E = \inf_{y\in F} ||x_{n_2}-x_{n_3}-y||_E = |||[x_{n_2}]-[x_{n_3}]||| < \frac{1}{2^2}.$$

Entonces, existe $z_2 \in F$ de forma que

$$||(x_{n_2} - z_2) - (x_{n_3} - z_3)||_E < \frac{1}{2^2}.$$

Así, sucesivamente, $w_k = x_{n_k} - z_k$ es tal que

$$||w_k - w_{k+1}||_E < \frac{1}{2^k}.$$

Sabemos del Análisis Real que esto implica que w_k es de Cauchy pues

$$\begin{aligned} ||w_m - w_n|| &= ||w_m - w_{m+\ell}|| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} ||w_m - w_{m+1}|| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^{m+k}} \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} \to 0. \end{aligned}$$

De esta forma, al ser E completo, $w_k \to w \in E$. Luego,

$$\begin{aligned} ||[x_{n_k}] - [w]|| &= ||[x_{n_k} - z_k] - [w]|| \\ &= ||[w_k] - [w]|| \\ &= \inf_{y \in F} ||w_k - w - y||_E \\ &\leq \inf_{y \in F} ||w_k - w|| + \inf_{y \in F} ||y||_E \\ &\leq ||w_k - w|| \to 0. \end{aligned}$$

Así, $[x_{n_k}]$ es una subsucesión convergente en E/F de $[x_n]$. Finalmente, como $[x_n]$ es de Cauchy, $[x_n]$ es convergente, y así, E/F es de Banach.

c) Ahora, veamos que si E es reflexivo, E/F también lo es. Primero, necesitamos establecer algunos resultados que son probados a continuación.

Lema 1. *La proyección $\pi : E \to E/F$ es tal que $\pi^{'} : (E/F)' \to E'$ es una isometría.*

Lema 2. *Todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo a su vez.*

Lema 3. *Un espacio de Banach E es reflexivo si y solamente si E' es reflexivo (curso).*

Lema 4. *Todo espacio normado reflexivo es de Banach.*

Tenemos entonces que E es de Banach por el Lema (4). Luego, E/F es también de Banach por el Ejercicio (b). Por otro lado, $\pi^{'} : (E/F)' \to E'$ es una isometría.

Proposición 5. *El espacio $(E/F)'$ puede entonces verse como subespacio cerrado de E'.*

Demostración. Sea $\{\pi'(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\pi'((E/F)')$ que converge a $\psi \in E'$. Como la sucesión es convergente, en particular es de Cauchy. Dado que se tiene que π' es una isometría, φ_n es de Cauchy en $(E/F)'$. Como $(E/F)'$ es completo $\varphi_n \to \varphi$. Finalmente, por la continuidad de π', $\pi'(\varphi_n) \to \pi'(\varphi) \in \pi'((E/F)')$. □

Luego, como E es reflexivo, por el Lema (3) E' es reflexivo. Usando el Lema (2), por la Proposición (5), tendremos que $(E/F)'$ es reflexivo. Finalmente, nuevamente por el Lema (3), concluimos que E/F es reflexivo.

Queda probar los resultados que se han usado para concluir que E/F es reflexivo. El Lema (1) es consecuencia de la definición (asignación)

$$\pi^{'}(\varphi) \to \psi$$
$$\pi^{'}(\varphi)([x]) = \varphi(\pi(x)) = \varphi([x]).$$

Luego, (3) y (4) son resultados del curso. Queda únicamente por probar entonces el Lema (2).

Demostración. Tenemos $F \subset E$ cerrado y queremos probar que si E es reflexivo, F también. Veamos. Definamos, como de costumbre

$$\begin{aligned} J_F &: F \to F'' \\ J_E &: E \to E''. \end{aligned}$$

Sea $y_0'' \in F''$. Definimos $\varphi \in E''$ de forma que

$$\varphi(\phi') = y_0''(\phi'|_F), \ \phi' \in E'.$$

Como E es reflexivo, existe $x_0 \in E$ tal que $J_E(x_0) = \varphi$. Si x_0 no perteneciera a F, por los corolarios de Hahn-Banach, al ser F cerrado, existe $\psi \in E'$ tal que $\psi(x_0) \neq 0$ y $\psi(F) = 0$. Luego,

$$\psi(x_0) = J_E(x_0)(\psi) = \varphi(\psi) = y_0''(\psi|_F) = 0$$

lo cual es una contradicción. Así, $x_0 \in F$. Afirmamos ahora que $J_F(x_0) = y_0''$. Al haber tomado y_0'' arbitrario en F'', concluiremos que J_F, el encaje canónico, es sobreyectivo, y así, F es reflexivo. Por Hahn-Banach, para todo $\psi \in F'$, podemos extenderlo a $\tilde{\psi} \in E'$ (continuo) de forma que

$$J_F(x_0)(\psi) = \psi(x_0) = \tilde{\psi}(x_0) = J_E(x_0)(\tilde{\psi}) = \varphi(\tilde{\psi}) = y_0''(\tilde{\psi}|_F) = y_0''(\tilde{\psi}).$$

Dado que ψ y por ende $\tilde{\psi}$ fue arbitrario, se obtiene lo solicitado. □

Observación. Se ha usado $|_F$ para denotar la restricción.

d) Si $||\cdot||_E$ proviene de un producto interno, y suponemos que E es de Banach, entonces $||\cdot||$ proviene de un producto interno. Dicho de otra forma, si E es de Hilbert, entonces E/F es de Hilbert también.

Observación. Si E no fuese de Banach, entonces la situación pasa por el espacio $C^0([0,1])$. Este espacio no es de Banach con la norma inducida por el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. En efecto, basta considerar

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ \frac{n}{2}x - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ 1, & \text{si } \ x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

Esta sucesión es de Cauchy pero converge a $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1, & \text{si } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$. Obteniendo un cerrado $F \subset (C([0,1]), ||\cdot||_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$, como las funciones que se anulan en un cierto punto, el objetivo es ver si la igualdad del paralelogramo se cumple o no.

Pasemos al caso E de Banach y por ende de Hilbert. Ya sabemos que E/F sería de Banach. Solo basta probar que $||\cdot||$ proviene de un producto interno.

Lema 6. *E/F es isométricamente isomorfo a $F^\perp$ vía la aplicación $\psi : E/F \to F^\perp$, $\psi([x]) = Q(x)$, donde $Q : E \to F^\perp$ es la proyección ortogonal.*

Demostración. Como F es cerrado en E (caso completo), F es completo. Luego, podemos aplicar el Teorema 5.2.2 y Teorema 5.2.5 (curso):

$$||[x]|| = \inf_{y\in F} ||x-y||_E = ||x-p||_E = ||q||_E = ||Q(x)||_E, \tag{1}$$

donde $x = p + q$, con $p \in F$ y $q \in F^\perp$, E suma directa de estos dos subespacios previos. $\square$

Finalmente, para comprobar que $||\cdot||$ proviene de un producto interno, hay que probar que cumple con la Ley del Paralelogramo:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Esto es consecuencia de que ϕ es una isometría y que $||\cdot||_E$ satisface la Ley del Paralelogramo. En efecto,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= (\inf_{z\in F} ||(x+y)-z||_E)^2 + (\inf_{z\in F} ||(x-y)-z||_E) \\ &= ||(x+y)-p_1||_E^2 + ||(x+y)-p_2||_E^2 \\ &= ||q_1||_E^2 + ||q_2||_E^2 \end{aligned}$$

donde $p_1, p_2 \in F$ y su existencia queda asegurada por (6), y $q_1, q_2 \in F^\perp$ de forma que $Q(x+y) = q_1$ y $Q(x-y) = q_2$. Luego, como $||\cdot||_E$ cumple la igualdad del paralelogramo.

$$||q_1||_E^2 + ||q_2||_E^2 = \frac{||Q(x+y) - Q(x-y)||_E^2}{2} + \frac{||Q(x+y) + Q(x-y)||_E^2}{2}.$$

Como la proyecciones son lineales, en particular Q lo es. Así,

$$\frac{||Q(x+y)-Q(x-y)||_E^2}{2}+\frac{||Q(x+y)+Q(x-y)||_E^2}{2}=2||Q(y)||_E^2+2||Q(x)||_E^2.$$

Finalmente, de (1)

$$2||Q(y)||_E^2+2||Q(x)||_E^2=2||x||^2+2||y||^2=2(||x||^2+||y||^2),$$

tal y como se quería.

3. Pruebe que el cerrado $E=\{f\in C[0,1]: \ f(0)=0\}\subset C[0,1]$ no es reflexivo.

Lema 7. *Sea E reflexivo. Pruebe que todo funcional lineal continuo alcanza su norma. Esto es, para todo $\varphi'\in E'$, existe $x\in E$, $||x||=1$ tal que $||\varphi||=|\varphi(x)|$.*

Usamos el Lema: sea $\varphi\in E'$ dado por

$$\varphi(f)=\int_0^1 f(t)dt.$$

Si $f(0)=0$,

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right|<1,\forall\ f.$$

Así, φ nunca alcanza su norma.

4. Pruebe que el espacio ℓ_p para $p\neq 2$ no es de Hilbert.

Supongamos que ℓ_p es un espacio de Hilbert. Entonces debe satisfacer para todos u,v:

$$2\|u\|_p^2+2\|v\|_p^2=\|u+v\|_p^2+\|u-v\|_p^2.$$

Tomemos $u=e_1=(1,0,\ldots,0,\ldots)$ y $v=e_2=(0,1,0,\ldots,0,\ldots)$. Por lo tanto, por la última igualdad, tenemos

$$4=2^{2/p}+2^{2/p}$$

Necesariamente $p=2$. Por otro lado, si $p=2$, es fácil verificar que ℓ_2 es un espacio de Hilbert.

5. Sea E un espacio vectorial real con producto interno. Pruebe que el operador

$$T:E\to E',\ T(x)(y)=\langle x,y\rangle,\ \forall\ x,y\in E$$

está bien definido. Esto es, $T(x)\in E'$ para todo $x\in E$, es lineal continuo e isometría.

Claramente T es lineal pues

$$T(x)(\lambda y_1+y_2)=\langle x,\lambda y_1+y_2\rangle=\langle x,\lambda y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle=\lambda T(x)(y_1)+T(x)(y_2).$$

Luego, es continuo pues, dado $\epsilon > 0$, si tomamos $||y - y_0|| < \delta = \frac{\varepsilon}{||x||}$

$$||T(x)(y) - T(x)(y_0)|| = ||\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle|| = |\langle x, y - y_0\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y - y_0|| < \varepsilon.$$

Más aún, se trata de una isometría pues

$$||T(x)|| = \sup_{||y||\leq 1} \{|\langle x, y\rangle|\} = \left\langle x, \frac{x}{||x||} \right\rangle = ||x||.$$

6. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en la bola unitaria cerrada de un espacio de Hilbert. Pruebe que si $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$, entonces $||x_n - y_n|| \to 0$.

Tenemos

$$\langle x_n - y_n, x_n - y_n\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle - \langle y_n, x_n\rangle + \langle y_n, y_n\rangle.$$

Ahora bien, $\langle x_n, x_n\rangle = \langle y_n, y_n\rangle = 1$. Pero, como $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ y $\langle y_n, x_n\rangle = \overline{\langle x_n, y_n\rangle}$, concluimos.

7. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en la bola unitaria cerrada de un espacio de Hilbert. Pruebe que si $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$, entonces $||x_n - y_n|| \to 0$.

Procedemos por inducción. Primero, si $[x_1] = [y_1]$, $x_1 = ay_1$. Luego, como $||x_1|| = ||y_1|| = 1$, $|a| = 1$. Ahora, supongamos el resultado válido para $n = k$: $[x_1, \cdots, x_k] = [y_1, \cdots, y_k]$ y $x_n = a_n y_n$ con $|a_n| = 1$. Entonces, si $[x_1, ..., x_{k+1}] = [y_1, ..., y_{k+1}]$

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_i x_i.$$

Como los vectores son ortogonales entre sí,

$$0 = \langle y_{k+1}, y_j\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_i x_i, a_j x_j \right\rangle = \lambda_j \overline{a}_j.$$

Como $\overline{a}_j \neq 0$, $\lambda_j = 0$ para $j = 1, ..., k$. Por ende, $y_{k+1} = \lambda_{k+1} x_{k+1}$ y $|\lambda_{k+1}| = 1$.