PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Tercera práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (5 puntos)

a) Verifique, considerando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que las funciones $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ forman un sistema ortonormal en $L_2[-\pi, \pi]$.

a) Notar que $\langle f_n, f_m \rangle = 1$ si $m = n$ y 0 si $m \neq n$. Para esto, notar que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$$

y $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$.

b) ¿Es cierto que el sistema ortonormal formado por las funciones $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ es completo? Justifique.

Usar la representación por series de Fourier y densidad (S. Weierstrass).

Pregunta 2 (5 puntos)

2.1) Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$, para todo $x, y \in H$. Pruebe que T es continuo. Sugerencia: use el Teorema del Gráfico Cerrado.

Usamos el Teorema del Gráfico Cerrado. Si probamos que el gráfico de T es cerrado, al ser H de Banach, T es automáticamente continuo. Tenemos entonces $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Queremos probar que $Tx = y$. Esto es lo mismo que probar que $\langle z, Tx \rangle = \langle z, y \rangle$ para cualquier z. Veamos

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \lim_n \langle z, Tx_n \rangle \\ &= \lim_n \langle Tz, x_n \rangle \\ &= \langle Tz, x \rangle \\ &= \langle z, Tx \rangle. \end{aligned}$$

Así pues, concluimos lo solicitado.

2.2) Sea E un espacio vectorial con producto interno y $T : E \to E$. Pruebe, considerando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que si $\langle T(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in E$, entonces $T = 0$.

Tenemos

$$\begin{aligned}\langle T(ax+by), ax+by\rangle &= |a|^2\langle Tx,x\rangle + a\bar{b}\langle Tx,y\rangle + \overline{a}b\langle Ty,x\rangle + |b|^2\langle Ty,y\rangle \\ &= a\bar{b}\langle Tx,y\rangle + \overline{a}b\langle Ty,x\rangle = 0.\end{aligned}$$

Usando $a=1, b=i$ y luego $a=i$, $b=1$, se concluye. El asunto no vale en el caso real, basta considerar la rotación por $\theta=\pi/2$ grados.

Pregunta 3 (4 puntos)

Sea $M \subset E$ cerrado. Pruebe que $M \subset (M^\perp)^\perp$, y que si E es reflexivo, $M=(M^\perp)^\perp$.

Tenemos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}M^\perp &= \{\varphi \in E' : \ \varphi(x)=0, \ \forall\ x\in M\} \\ (M^\perp)^\perp &= \{\psi \in E'' : \ \psi(\varphi)=0, \ \forall\ \varphi \in M^\perp\}.\end{aligned}$$

Entonces, si $x \in M$, tomando $J_E(x)=\psi$, $\psi(\varphi)=\varphi(x)=0$ para todo $\varphi \in M^\perp$. Si E es reflexivo, para todo $\psi \in E''$, existe x tal que $J_E(x)=\psi$, con $\psi(\varphi)=\varphi(x)=0$.

Pregunta 4 (6 puntos)

4.1) Sea E un espacio con producto interno. Sean $S_1=\{x_n : \ n\in\mathbb{N}\}$ y $S_2=\{y_n : \ n\in\mathbb{N}\}$ conjuntos ortonormales en E tales que $[x_1,\cdots,x_n]=[y_1,\cdots,y_n]$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Muestre que existe una sucesión (a_n) de escalares con módulo 1 tales que $y_n=a_nx_n$.

Procedemos por inducción. Primero, si $[x_1]=[y_1]$, $x_1=ay_1$. Luego, como $||x_1||=||y_1||=1$, $|a|=1$. Ahora, supongamos el resultado válido para $n=k$: $[x_1,\cdots,x_k]=[y_1,\cdots,y_k]$ y $x_n=a_ny_n$ con $|a_n|=1$. Entonces, si $[x_1,...,x_{k+1}]=[y_1,...,y_{k+1}]$

$$y_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_ix_i.$$

Como los vectores son ortogonales entre sí,

$$0=\langle y_{k+1},y_j\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k+1}\lambda_ix_i, a_jx_j\right\rangle = \lambda_j\overline{a}_j.$$

Como $\overline{a}_j\neq 0$, $\lambda_j=0$ para $j=1,...,k$. Por ende, $y_{k+1}=\lambda_{k+1}x_{k+1}$ y $|\lambda_{k+1}|=1$.

4.2) Analice si el cerrado $E=\{f\in C[0,1] : \ f(0)=0\}\subset C[0,1]$ es o no reflexivo. Considere la norma $||\cdot||_\infty$.

Usar que en un espacio reflexivo, todo funcional lineal alcanza su norma.

4.3) Sea E un espacio normado. Pruebe que, dados $\varphi_1,\varphi_2\in E'$, $\varphi_1\neq\varphi_2$, existe $f\in J_E(E)$ tal que $f(\varphi_1)\neq f(\varphi_2)$.

Tenemos

$$\begin{aligned}J_E &: E\to E'' \\ &x\to J_E(x) : \ \varphi\to\varphi(x).\end{aligned}$$

Entonces, como $\varphi_1\neq\varphi_2$, existe $x\in E$ tal que $\varphi_1(x)\neq\varphi_2(x)$, tomando $f\in J_E(E)$, $f=J_E(x)$, concluimos lo solicitado.

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 14 de junio del 2024.