PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (6 puntos)

Sea E un espacio normado y $F \subset E$ subespacio cerrado. Entonces, demuestre que:

a) Dado $x \in E$,
$$||[x]||_{E/F} = \inf_{v\in F} ||x - v||_E$$
define una norma en E/F (el espacio cociente).

b) Si E es de Banach, E/F también es de Banach (seguimos usando la misma norma).

c) Si $\pi : E \to E/F$ es tal que $\pi(x) = [x]$, entonces $||\pi(x)||_{E/F} \leq ||x||_E$.

a) Primero, dados $x, y \in E$ y $u, v \in F$
$$||[x + y]|| \leq ||x + y + u + v|| \leq ||x + u|| + ||y + v||$$
así pues,
$$||[x + y]|| \leq \inf_{u\in F} ||x + u|| + \inf_{v\in F} ||y + v|| = ||[x]|| + ||[y]||.$$
Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, usando que F es subespacios ($u \in F \Leftrightarrow \lambda u \in F$)
$$||[\alpha x]|| = \inf_{u\in F} ||\alpha x + u|| = \inf_{u\in F} |\alpha|||x + u|| = |\alpha| \cdot ||[x]||.$$
Queda probar que $||[x]|| = 0$ implica $[x] = 0$.
$$\inf_{u\in F} ||x + u|| = 0$$

implica que existe $u_n \in F$ tal que $u_n \to x$. Como F es cerrado, $x \in F$, por lo que $[x] = 0$.

b) Veamos que E/F es completo. Probaremos que dada $([x_n]) \in E/F$, con $\sum_n ||[x_n]||_{E/F} < \infty$, entonces $\sum_n [x_n] \to [y] \in E/F$. Para cada n, escojamos $\theta_n \in [x_n]$ tal que

$$||\theta_n||_E \leq ||[x_n]||_{E/F} + 2^{-n}.$$

Entonces, $\sum_n ||\theta_n||_E < \infty$. Al ser E completo, $\sum_n \theta_n \to \theta \in E$. Notando que

$$\sum_n [x_n] - [\theta] = \sum_n \theta_n - \theta + F,$$

$$\left|\left|\sum_n [x_n] - [\theta]\right|\right| \leq \left|\left|\sum_n \theta_n - \theta\right|\right|_E,$$

por lo que $\sum_n [x_n] \to [\theta]$ y así, E/F es completo.

Note que estamos usando: si la convergencia absoluta implica convergencia, entonces el espacio es de Banach.

c) Simplemente

$$\begin{aligned} ||\pi(x)|| &= ||[x]||_{E/F} \\ &= \inf_{u \in F} ||x + u||_E \leq ||x - 0||_E = ||x||_E. \end{aligned}$$

Pregunta 2 (4 puntos)

Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un espacio normado real. Pruebe que el funcional de Minkowski de la bola abierta $B(0,1)$ coincide con $||\cdot||_E$).

Sea $C = B(0,1)$. Si $a > 0$ es tal que $x/a \in C$, entonces $||x|| \leq a$. Luego, $||x||_E \leq p_C(x)$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{p_C(x)}{||x|| + \varepsilon} = p_C\left(\frac{x}{||x|| + \varepsilon}\right) < 1.$$

Así, $p_C(x) \leq ||x|| + \varepsilon$. Haciendo $\varepsilon \to 0$, concluimos.

Pregunta 3 (6 puntos)

a) Sean E_1 y E_2 espacios normado y $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Pruebe que

$$||T|| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{E_2'},\ x \in B_{E_1}\}.$$

Acá B_X es la bola unitaria.

b) Sea E un espacio normado y $F \subset E$ subespacio de E. El anulador de F está definido por

$$F^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0,\ \forall\ x \in F\}.$$

Pruebe que F' es isomorfo a $E'/F^\perp$.

a) Por un lado,

$$||\varphi(T(x))|| \leq ||\varphi|| \cdot ||T(x)|| \leq ||\varphi|| \cdot ||T|| \cdot ||x||.$$

Tomando sup,

$$\sup_{\varphi \in B_{E_2'}, x \in B_{E_1}} ||\varphi(T(x))|| \leq ||T||.$$

Ahora bien, por otro lado,

$$||T|| = \sup_{x \in B_{E_1}} ||T(x)||$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_n \in B_{E_1}$ tal que $||T(x_n)|| + \varepsilon \geq ||T||$. Luego, por HB (Corolario), encontramos funcional ψ con $\psi(T(x_n)) = ||T(x_n)||$ y $||\psi|| = 1$. Para $\theta \in (0, 1)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{E_2'},\ x \in B_{E_1}\} &\geq |\theta\psi(T(x_n))| \\ &= \theta||T(x_n)|| \\ &\geq \theta(||T|| - \varepsilon). \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ y $\theta \to 1$ (o sea vale para todo $\theta \in (0, 1)$), se sigue que

$$\sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{E_2'},\ x \in B_{E_1}\} \geq ||T||.$$

b) Defina $T : E'/F^{\perp} \to F'$ con $T([\varphi])(x) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$ y $x \in F$. Se cumple que está bien definido, es lineal, isometría y sobreyectivo. Ahora bien, $F^{\perp}$ es de Banach (PC2), usando el Ejercicio 1 de la PC y el TFA (ya tenemos que T es sobreyectivo), concluimos que T es un isomorfismo.

Pregunta 4 (4 puntos)

a) De un ejemplo de una función que no sea continua pero que su gráfico sea cerrado.

b) Sea $T : E \to E'$, E espacio Banach, tal que $T(x)(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Pruebe que T es acotado.

a) Hay muchos ejemplos, puede considerar $f(x) = 1/x$, $x > 0$ y $f(0) = 0$.

b) Sea $x_n \to 0$ y $T(x_n) \to \psi \neq 0$. Ha de existir $y \in E$ tal que $\psi(y) > 0$.

$$0 \leq T(\lambda y - x_n)(\lambda y - x_n) = \lambda^2 T(y)(y) - \lambda T(x_n)(y) + T(\lambda y - x_))(x_n).$$

Tomando límite,

$$\lambda^2 T(y)(y) - \lambda\psi(y) \geq 0.$$

Pero, para λ arbitrariamente chico, esto no es asegurado. Por ende, T es acotado (continuidad).

Por TGC: $x_n \to x$, $T(x_n) \to \varphi \in E'$,

$$(Tx_n - Ty)(x_n - y) \geq 0 \to (\varphi - Ty)(x - y).$$

Hagamos $y = x + tz$. Entonces,

$$0 \leq (\varphi - Tx - tTz)(tz) = t(\varphi(z) - T(x)(z)) - t^2 T(z)(z).$$

Para todo $t \in \mathbb{R} \implies \varphi(z) = T(x)(z)$. O sea $T(x) = \varphi$. Con el TGC concluimos (acá se usa la propiedad de E).

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 10 de mayo del 2024.