PC1 Funcional: Solucionario

Marcelo Gallardo

2024-1

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1. Sean

$$E = \{f \in C[0,1] : \ f(0) = 0\} \text{ y } \ F = \left\{ f \in E : \ \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

A continuación considere que $||\cdot|| \triangleq ||\cdot||_\infty$ (es decir, la norma sup).

a) Pruebe que E es un subespacio cerrado de $C[0,1]$.

b) Pruebe que F es un subespacio cerrado de E.

c) Muestre que no existe $\varphi \in E$ tal que $||\varphi|| = 1$ y $||\varphi - f|| \geq 1$, $\forall \ f \in F$.

a) Ya sabemos que $(C[0,1], ||\cdot||_\infty)$ es de Banach. Así, dadas $f_n \in E$, $f_n \to f \in C[0,1]$. Debemos probar que $f \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$:

$$\forall \ x : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = ||f_n - f||_\infty < \varepsilon.$$

Esto se cumple en particular en $x = 0$. Así,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0 = f(0).$$

Así, E es cerrado en $C[0,1]$. El hecho que sea un subespacio (así como en (b)) es directo.

b) Probemos ahora que F es cerrado en E. Tomemos $f_n \in F$: continuas y tales que $\int_0^1 f_n(t)dt = 0$. Luego, fijemos $\epsilon > 0$. Para n suficientemente grande

$$\left| \int_0^1 (f_n(t) - f(t))dt \right| \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_0^1 ||f_n - f||_\infty dt = ||f_n - f||_\infty < \epsilon.$$

Luego,

$$0 = \int_0^1 f_n(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt.$$

c) Sea $\varphi \in E$ tal que $||\varphi||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| = 1$. Tenemos que

$$\left|\int_0^1 \varphi(t)dt\right| \leq 1.$$

Sin embargo, como $\varphi(0) = 0$ y es continua,

$$\left|\int_0^1 \varphi(t)dt\right| = a < 1.$$

Consideremos ahora

$$\psi(t) = \text{mín}\left\{1, \frac{|t|}{\epsilon}\right\} \in E.$$

para ϵ lo suficientemente chico de forma que $\int_0^1 \psi(t)dt > a$. Entonces, haciendo

$$\phi(t) = \varphi(t) - \frac{a}{\int_0^1 \psi(t)dt}\psi(t) \in F$$

y

$$||\phi - \varphi|| < 1.$$

2.

a) Pruebe que todo subespacio propio de un espacio normado tiene interior vacío.

b) Sea $T \in \ell_2'$ definida como $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n}$. Pruebe que T es continuo.

a) Sea $F \subset E$ subespacio propio de E y supongamos que tiene interior no vacío. Sea entonces $u \in F$ de forma que existe U abierto $u \in U \subset F$. Entonces, el abierto

$$V = U - u = \{x \in E : x + u \in U\}$$

es una vecindad del $0 \in E$. Así, en particular, existe $\mathcal{B}(0;\epsilon) \subset F$ pues F es cerrado por adición. Si $x \in F$, no nulo, entonces

$$\frac{\epsilon}{2||x||}x \in \mathcal{B}(0;\epsilon).$$

Pero entonces, como F es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, $x \in F$. Esto significa que $F = E$, lo cual es una contradicción.

b) Simplemente

$$
\begin{aligned}
||T|| &= \sup\{||T(x_n)|| : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1\} \\
&= \sup\left\{ \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \frac{1}{n} \right| : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot \frac{1}{n} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup\left\{ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1 \right\} \\
&\leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} ||(x_n)||_2 \\
&\leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}.
\end{aligned}
$$

3.

a) Considere un funcional lineal $\varphi : E \to \mathbb{K}$ no nulo sobre un espacio normado E. Pruebe que si el núcleo de φ no es denso entonces φ es continuo.

b) Demuestre que $\{f_n(x) = e^{nx} : n \in \mathbb{N}\}$, es denso en $C([0, 1])$. Luego, pruebe que si $f \in C([0, 1])$ satisface $\int_0^1 f(x)e^{nx}dx = 0$ para todo n, entonces $f = 0$ en todo $[0, 1]$.

Si φ es discontinuo, entonces veremos que necesariamente $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es denso. En efecto, si probamos esto, obtenemos lo solicitado pues, si el núcleo de φ no es denso y φ no es continuo[1], entonces el núcleo de φ sería denso: contradicción. Sea entonces φ no continuo. Existe una sucesión x_n tal que $|\varphi(x_n)| \geq n||x_n||$. Tomando $||x_n|| = 1$, $|\varphi(x_n)| \geq n$. Ahora, sea $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ y sea

$$y_n = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)} x_n.$$

[1]No se cumple que $\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, ||x|| \leq 1\} < \infty$.

Ciertamente, $y_n \in \text{Ker}(\varphi)$ para todo n. Más aún,

$$||y_n - x|| = \left|\left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)}x_n\right|\right| = \left|\left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)}\right|\right| \to 0.$$

Así, $x \in \overline{\text{Ker}(f)}$. Como x fue arbitrario, $\overline{\text{Ker}(f)} = E$. O sea, el núcleo es denso.

b) Sea $f \in C[0,1]$. Definamos $g(t) = f(\ln t)$ sobre $[1, e]$. La función es continua por composición. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p(t)$ sobre $[1, e]$ tal que

$$|p(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Haciendo $t = e^x$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^{kn} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

O sea, $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $C[0,1]$. Ahora bien, supongamos que

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f^2(x)dx\right| &= \left|\int_0^1 f(x)(f(x) - P_n(x))dx\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| \cdot |f(x) - P_n(x)|dx \to 0. \end{aligned}$$

Por ende, $f(x) = 0$. Nunca importó el intervalo. Finalmente, haciendo $x = \ln y$,

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = \int_1^e f(\ln y)y^{n-1}dy = 0 \implies f = 0.$$

4. Sean E y F espacios de Banach y $T, T_1, T_2, ...$ operadores en $\mathcal{L}(E, F)$ tales que $T_n(x) \to T(x)$ para todo $x \in E$. Muestre que, para todo compacto $K \subset E$,

$$\sup_{x \in K} ||T_n(x) - T(x)|| \to 0.$$

Supongamos por contradicción que podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para alguna sub-sucesión $\{T_{n_k}\}$ y x_{n_k} se tiene que

$$||T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})|| \geq \varepsilon_0.$$

Tendremos, al ser K compacto, que $x_{n_k} \to x$ (por comodidad de notación no cambiamos la subsucesión)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leq ||T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})|| \\
&= ||T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k}) + (T - T_{n_k})(x) - (T - T_{n_k})(x)|| \\
&\leq ||(T_{n_k} - T)(x)|| + ||(T_{n_k} - T)(x - x_{n_k})|| \\
&\leq ||(T_{n_k} - T)(x)|| + ||T_{n_k} - T||||(x - x_{n_k})||.
\end{aligned}$$

Pero entonces, como $||(T_{n_k} - T)(x)|| \to 0$, $||(x - x_{n_k})|| \to 0$ y $||T_{n_k} - T|| \leq ||T|| + ||T_{n_k}|| < \infty$, obtenemos una contradicción. El hecho que $||T|| + ||T_{n_k}|| < \infty$ es consecuencia de Banach-Steinhaus. En efecto, $\forall\ x \in E$, como $T_n(x) \to T(x)$,

$$||T_n(x)|| < c_x = \delta + ||T(x)||,\ \forall\ n \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \{||T_n||\} < \infty.$$

Lo mismo para $||T||$ pues T es continuo por el Corolario de Banach-Steinhaus.