PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Primera práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)
Sean

$$E = \{f \in C[0,1] : \ f(0) = 0\} \text{ y } \ F = \left\{ f \in E : \ \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

A continuación considere que $||\cdot|| \triangleq ||\cdot||_\infty$ (es decir, la norma sup).

a) Pruebe que E es un subespacio cerrado de $C[0,1]$.

b) Pruebe que F es un subespacio cerrado de E.

c) Muestre que no existe $\varphi \in E$ tal que $||\varphi|| = 1$ y $||\varphi - f|| \geq 1, \forall \ f \in F$.

Pregunta 2 (6 puntos)

a) Pruebe que todo subespacio propio de un espacio normado tiene interior vacío.

b) Sea $T \in \ell_2'$ definida como $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$. Pruebe que T es continuo.

Pregunta 3 (6 puntos)

a) Considere un funcional lineal $\varphi : E \to \mathbb{K}$ no nulo sobre un espacio normado E. Pruebe que si el núcleo de φ no es denso entonces φ es continuo.

b) Demuestre que $\{f_n(x) = e^{nx} : n \in \mathbb{N}\}$, es denso en $C([0,1])$. Luego, pruebe que si $f \in C([0,1])$ satisface $\int_0^1 f(x)e^{nx}dx = 0$ para todo n, entonces $f = 0$ en todo $[0,1]$.

Pregunta 4 (4 puntos)

Sean E y F espacios de Banach y $T, T_1, T_2, ...$ operadores en $\mathcal{L}(E,F)$ tales que $T_n(x) \to T(x)$ para todo $x \in E$. Muestre que, para todo compacto $K \subset E$,

$$\sup_{x\in K} ||T_n(x) - T(x)|| \to 0.$$

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 12 de abril de 2024.