

NOTAS EN TEORÍA DE INCERTIDUMBRE

Microeconomía Financiera
Octubre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe

Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo & Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
<https://marcelogallardob.github.io/>

En estas notas de clase nos proponemos demostrar el teorema de representación de la utilidad esperada. Nos basamos fundamentalmente en [Mas-Colell et al. \(1995\)](#).

1 Preliminares

Definición 1.1. Una lotería es una lista $L = (p_1, \dots, p_N)$ con $p_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^N p_n = 1$.¹

Denotamos por \mathcal{L} el espacio de todas las loterías $\Delta(\mathcal{X})$.

Definición 1.2. Una preferencia \succeq sobre \mathcal{L} es continua si y solamente si para cualesquiera $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \succeq L''\} &\subset [0, 1] \\ \{\alpha \in [0, 1] : L'' \succeq \alpha L + (1 - \alpha)L'\} &\subset [0, 1] \end{aligned}$$

son cerrados en $[0, 1]$ con la topología usual de \mathbb{R} inducida sobre el intervalo $[0, 1]$.

Las preferencias sobre \mathcal{L} son entonces continuas si alteraciones menores en las probabilidades no alteran el orden.

Definición 1.3. \succeq sobre \mathcal{L} cumple el axioma de independencia si $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in (0, 1)$ se tiene que

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

Definición 1.4. $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene forma de utilidad esperada si existe $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\forall L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$

$$U(L) = \sum_{n=1}^N p_n u_n.$$

A U^e se le conoce como función de utilidad esperada de von-Neumann-Morgenstern.

¹ $p_n = \mathbb{P}\{X = x_n\}$, donde x_n es uno de los outcomes y $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposición 1.1. Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una representación por utilidad esperada si y solamente si es lineal. Esto es,

$$U \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k \right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U^e(L_k),$$

para cualesquiera $L_1, \dots, L_K \in \mathcal{L}$ y $\alpha_k \geq 0$ tales que $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$.

Proof. Denotemos por $\delta^n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ a la lotería que le asigna probabilidad 1 al outcome x_n . Entonces, para cualquier $L \in \mathcal{L}$,

$$L = \sum_{n=1}^N p_n \delta^n.$$

Entonces, si U^e es lineal,

$$U(L) = U \left(\sum_{n=1}^N p_n \delta^n \right) = \sum_{n=1}^N U(\delta^n) = \sum_{n=1}^N p_n u_n.$$

Por el contrario, si U tiene la forma de una función de utilidad esperada, dadas las loterías L_1, \dots, L_K , $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ con $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ y $\alpha_k \geq 0$,

$$U \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k \right) = \sum_{n=1}^N u_n \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k p_n^k \right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{n=1}^N u_n p_n^k \right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U^e(L_k).$$

□

Proposición 1.2. Sea $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ una utilidad de von-Neumann-Morgenstern para \succeq definida sobre \mathcal{L} . Entonces, \tilde{U} es otra función de utilidad de von-Neumann-Morgenstern que representa \succeq si y solo si existen $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Proof. Sean $\bar{L}, \underline{L} \in \mathcal{L}$ tales que $\bar{L} \succeq L \succeq \underline{L}$ para toda $L \in \mathcal{L}$. La existencia de dichas loterías viene asegurada por el hecho que el simplex es un compacto y $U(\cdot)$ al ser lineal es continua. Si $\bar{L} \sim \underline{L}$, entonces toda función de utilidad es constante y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $\bar{L} \succ \underline{L}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{U} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k \right) &= \beta U \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k \right) + \gamma \\ &= \beta \left[\sum_{k=1}^K \alpha_k U(L_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\beta U(L_k) + \gamma] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \tilde{U}(L_k). \end{aligned}$$

De este modo, \tilde{U} tiene una forma de utilidad esperada. Ahora bien, sean $\tilde{U}(\cdot)$ y $U(\cdot)$ con forma de utilidad esperada. Veamos que existen $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\tilde{U} = \beta U + \gamma$. Para ello, sea $L \in \mathcal{L}$ cualquiera y $\lambda_L \in [0, 1]$ tal que $U(L) = \lambda_L U(\bar{L}) + (1 - \lambda_L)U(\underline{L})$. De este modo,

$$\lambda_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})}.$$

Como $\lambda_L U(\bar{L}) + (1 - \lambda_L)U(\underline{L}) = U(\lambda_L \bar{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L})$ y $U(\cdot)$ representa a \succeq , $L \sim \lambda_L \bar{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}$. Ahora bien, como \tilde{U} también es lineal,

$$\tilde{U}(L) = \tilde{U}(\lambda_L \underline{L} + (1 - \lambda_L)\bar{L}) = \lambda_L(\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})) + \tilde{U}(\underline{L}).$$

Usando la expresión para λ_L , se deduce que

$$\beta = \frac{\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})}$$

$$\gamma = \tilde{U}(\underline{L}) - U(\underline{L}) \left[\frac{\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} \right].$$

□

Example 1.1. Considere el juego del ejemplo ??, donde los pagos estaban dados por:

	Nadal: A	Nadal: M
Federer: A	(0, 1)	(1, 0)
Federer: M	(1, 0)	(0, 1)

Aplicando invarianza lineal (proposición 1.2), el siguiente juego es equivalente al original

	Nadal: A	Nadal: M
Federer: A	(0, 0)	(500, -1)
Federer: M	(500, -1)	(0, -1)

Note que los pagos de Federer se multiplicaron por $\beta = 500$ y a los de Nadal se les sumó $\gamma = -11$.

2 Teorema de la utilidad esperada

El teorema que estamos a punto de demostrar, nos dice que si un agente de decisión tiene preferencias sobre el espacio de loterías que satisfacen la propiedad de continuidad y el axioma de independencia, entonces su preferencia puede ser representada por una función de utilidad esperada U .

Teorema 1. Suponga que una preferencia racional \succeq sobre \mathcal{L} satisface la propiedad de continuidad y el axioma de independencia. Entonces, \succeq admite una representación por función de utilidad esperada. Esto es, podemos asignar números reales u_1, \dots, u_N de manera que para cualesquiera dos loterías $L, L' \in \mathcal{L}$ con $L = (p_1, \dots, p_n)$ y $L' = (p'_1, \dots, p'_n)$,

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N p_n u_n \geq \sum_{n=1}^N p'_n u_n.$$

Proof. La prueba se divide en varias etapas. Primero, tomamos \bar{L} y \underline{L} tales que $\bar{L} \succeq L \succeq \underline{L}$ para toda $L \in \mathcal{L}$ (tal y como se hizo en la proposición anterior). Si $\bar{L} \sim \underline{L}$, el resultado es inmediato y trivial. Por ende, supongamos que $\bar{L} \succ \underline{L}$.

1. **Paso 1:** si $L \succ L'$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces $L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ L'$. Esto es consecuencia del axioma de independencia:

$$L = \alpha L + (1 - \alpha)L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ \alpha L' + (1 - \alpha)L' = L'.$$

2. **Paso 2:** sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Entonces $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$ si y solo si $\beta > \alpha$. Escribamos

$$\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} = \gamma\bar{L} + (1 - \gamma)[\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}],$$

con $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \in (0, 1]$. Sabemos que $\bar{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$ por el paso 1. Por ende,

$$\gamma\bar{L} + (1 - \gamma)(\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}) \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}.$$

y por ende $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$. Para la conversa, supongamos que $\beta \leq \alpha$. Si son iguales, $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \sim \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$. Supongamos entonces que $\beta < \alpha$. Se sigue, por los mismos argumentos, que $\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L} \succ \beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L}$.

3. **Paso 3:** para toda $L \in \mathcal{L}$, existe un único α_L tal que $[\alpha_L\bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}] \simeq L$. La existencia es consecuencia de la continuidad y la unicidad del paso 2.
4. La función $U^e : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que asigna a L el valor α_L es la que representa a \succeq . En efecto, por el paso 3, dadas $L, L' \in \mathcal{L}$

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha_L\bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \succeq \alpha_{L'}\bar{L} + (1 - \alpha_{L'})\underline{L}.$$

Así, $L \succeq L'$ si y solo si $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$.

5. **Paso 5:** la función de utilidad $U(\cdot)$ que le asigna α_L a $L \in \mathcal{L}$ es lineal, y por ende, tiene la forma de utilidad esperada. Lo que queremos es probar que

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, \beta \in [0, 1] : U(\beta L + (1 - \beta)L') = \beta U(L) + (1 - \beta)U(L').$$

Por definición, $L \sim U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}$ y $L' \sim U(L')\bar{L} + (1 - U(L'))\underline{L}$. Por ende, aplicando dos veces el axioma de independencia,

$$\begin{aligned} \beta L + (1 - \beta)L' &\sim \beta[U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}] + (1 - \beta)L' \\ &\sim \beta[U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}] + (1 - \beta)[U(L')\bar{L} + (1 - U(L'))\underline{L}]. \end{aligned}$$

Re-agrupando términos,

$$\beta L + (1 - \beta)L' \sim [\beta U(L) + (1 - \beta)U(L')]\bar{L} + (1 - \beta U(L) - (1 - \beta)U(L'))\underline{L}.$$

De este modo, concluimos que

$$U(\beta L + (1 - \beta)L') = \beta U(L) + (1 - \beta)U(L').$$

□

El teorema 1 nos permite concluir que las curvas de indiferencia en el simplex son hiperplanos, rectas paralelas si nos situamos en $N = 3$. Sin pérdida de generalidad, si tomamos 1 como \bar{L} y 2 como \underline{L} , dado $L \in \Delta$, con $3 \not\sim 1$ o 2 ,

$$\exists \alpha_L \in [0, 1] : \alpha_L\bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \simeq L, \forall L \in \mathcal{L}.$$

3 Argumento de Separación

Estas notas quedarían incompletas sin presentar una prueba alternativa al Teorema 1, basada en uno de los resultados más notables del Análisis Convexo: el Teorema de Separación. Seguimos a Gilboa (2009).

Nuevamente vamos a considerar que \mathcal{X} es un conjunto finito. Sin embargo, la extensión al caso infinito pasa por elementos de análisis funcional. Sean $L, L' \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^N$. Por lo tanto, $L - L' \in \mathbb{R}^N$. Considere los conjuntos

$$A = \{L - L' \in \mathbb{R}^N : L \succeq L'\}$$

y

$$B = \{L - L' \in \mathbb{R}^N : L' \succ L\}.$$

Ciertamente, se cumple que $L'' \succeq L'''$ si y solo si $L'' - L''' \in A$. Del mismo modo, $L''' \succ L''$ si y solo si $L'' - L''' \in B$. Esto para cualesquiera $L'', L''' \in \mathcal{L}$. Ahora bien, el objetivo es probar que tanto A como B son convexos. Esto es consecuencia del axioma de independencia. Supongamos que $L - L', L'' - L''' \in A$ y consideremos para $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha(L - L') + (1 - \alpha)(L'' - L''') = (\alpha L + (1 - \alpha)L'') - (\alpha L' + (1 - \alpha)L''').$$

Entonces, como $L \succeq L'$ y $L'' \succeq L'''$, por el axioma de independencia, aplicados 2 veces,

$$\alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L'''.$$

Así $\alpha(L - L') + (1 - \alpha)(L'' - L''') = (\alpha L + (1 - \alpha)L'') - (\alpha L' + (1 - \alpha)L''') \in A$. Por un mismo procedimiento, concluimos que B es convexo. Ahora bien, es claro que A es cerrado y B abierto usando la topología que se usa en la definición de continuidad de las preferencias sobre el espacio de loterías. Esto es, una vecindad de $L \in \mathcal{L}$ se define como

$$\bigcup_{L' \in \mathcal{L}} \{\alpha L + (1 - \alpha)L' : \alpha \in (0, \epsilon_{L'})\},$$

para $\epsilon_{L'} > 0$. Así, por el teorema de separación, existe un funcional lineal que separa los conjuntos. Este funcional lineal es justamente U^e y es tal que

$$U^e(\alpha L + (1 - \alpha)L') = \alpha U^e(L) + (1 - \alpha)U^e(L').$$

Lima, 4 de Octubre, 2024.

References

Gilboa, I. (2009). *Theory of Decision under Uncertainty*. Cambridge University Press, Cambridge.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.