FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

# NOTAS EN EQUILIBRIO GENERAL STOLPER-SAMUELSON

**Microeconomía Financiera**
**Semestre 2024-2**

**Profesor: José D. Gallardo Kú**
jgallardo@pucp.edu.pe
**Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo & Karen Montoya**
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

## 1 Introducción

En estas notas de clase presentamos uno de los resultados más notables en la teoría del equilibrio general: el Teorema de Stolper-Samuelson, llamado así en honor a los economistas Wolfgang Stolper y Paul Samuelson. Este teorema se extiende no solamente en la teoría del equilibrio general, pero también en Economía Internacional. En líneas generales, describe la relación entre los precios relativos de los bienes finales y los precios relativos de los factores de producción (salario y renta).

## 2 Preliminares

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Solper-Samuelson, requerimos de algunos preliminares del cálculo multivariado y teoría de la firma y del consumidor.

**Definición 2.1.** Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogéna de grado 1 si para todo $t > 0$,

$$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n).$$

**Example 2.1.** Las funciones Cobb-Douglas

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ somo homogéneas de grado 1. En efecto,

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = \prod_{i=1}^{n} (tx_i)^{\alpha_i} = \underbrace{t^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}_{=t} f(x_1, \cdots, x_n).$$

**Proposición 2.1.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado 1. Entonces,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

*Proof.* Por la homogeneidad de grado 1, para $t > 0$

$$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}).$$

Luego, derivando con respecto a $t$ y aplicando la regla de la cadena

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) x_i = f(\mathbf{x}).$$

Evaluando en $t = 1$, concluimos. $\square$

Recordemos ahora algunos resultados de cálculo diferencial.

**Proposición 2.2.** Dadas $f, g$ funciones reales diferenciables y $g \neq 0$ sobre $I \subset \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}(x)\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

**Definición 2.2.** Definimos la $i-$ésima derivada parcial de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto $x$ de su dominio de diferenciabilidad como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h}.$$

**Relaciones económicas relevantes.** Es importante también recordar un resultado de la teoría de la firma. En equilibrio, si $F(K, L)$ es una función de producción, el precio del bien producido es $p$ y $r, w$ son los precios de los insumos,

$$\frac{r}{p} = \frac{\partial F}{\partial K}, \ \frac{w}{p} = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

En el caso más general, si

$$F = F(x_1, \cdots, x_n)$$

y $w_1, \cdots, w_n$ son los precios de los insumos

$$w_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

# 3 Stolper-Samuelson

El Teorema de Stolper-Samuelson nos dice que, en el modelo $2 \times 2$, asumiendo intensidad en el uso de los factores, si $p_x$ aumenta, entonces el precio de equilibrio del factor que se usa con mayor intensidad en la producción del bien $x$ incrementa, mientras que el otro decrece (asumuendo soluciones interiores tanto antes como después del cambio de precios).

Considere entonces una economía donde se producen dos bienes, $X$ e $Y$. Las tecnologías de producción son homogéneas de grado 1[1] y los insumos son el capital y el trabajo[2]

$$\begin{aligned} X &= F_X(L_X, K_X) \\ Y &= F_Y(L_Y, K_Y) \end{aligned}$$

Supongamos que la industria que produce $x$ usa $L$ de forma intensiva[3]. Entonces, si definimos $\rho = \frac{p_x}{p_y}$ y $\omega = \frac{w}{r}$, debemos mostrar que:

$$\frac{d\rho}{d\omega} > 0.$$

Primero, definamos las siguientes variables[4]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{L_X} \\ y &= \frac{Y}{L_Y} \\ k_x &= \frac{K_X}{L_X} \\ k_y &= \frac{K_Y}{L_Y}. \end{aligned}$$

Nótese también que:

$$\frac{\partial F_X}{\partial K_X} = f_x'(k_x), \quad \frac{\partial F_Y}{\partial K_X} = f_y'(k_y).$$

En efecto, dado $L_X > 0$ fijo pero arbitrario, de acuerdo con la Definición 2.2 y usando la homogeneidad de grado 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_X}{\partial K_X} &= \lim_{h \to 0} \frac{F_X(K_X + h, L_x) - F_X(K_X, L_X)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{F_X(k_x + h/L_X, 1) - F_X(k_x, 1)}{L_X h} \\ &= F_X'(k_x) \\ &\triangleq f_x'(k_x). \end{aligned}$$

[1] $F_X(\alpha L_X, \alpha K_X) = \alpha F_X(L_X, K_X)$ y $F_Y(\alpha L_Y, \alpha K_Y) = \alpha F_X(L_Y, K_Y)$, $\forall\ \alpha > 0$.

[2] Por ejemplo, podríamos tener

$$\begin{aligned} X &= L_X^{\theta} K_X^{1-\theta} \\ Y &= L_Y^{\gamma} K_Y^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

[3] $\theta > \gamma$, $\theta, \gamma \in (0, 1)$ en el caso de las Cobb-Douglas.

[4] Una práctica usual en teoría del crecimiento: considerar todo como fracción del trabajo.

Por ejemplo, si $X = L_X^{\theta} K_X^{1-\theta}$,

$$\frac{X}{L_X} = x = \frac{X^{\theta} K_X^{1-\theta}}{L_X} = \left(\frac{K_X}{L_X}\right)^{1-\theta} = k_x^{1-\theta} = f_x(k_x).$$

Luego,

$$f_x'(k_x) = (1-\theta)k_x^{-\theta} = (1-\theta)\left(\frac{K_X}{L_X}\right)^{-\theta} = \frac{\partial F_X}{\partial K_X}.$$

Con estas definiciones y sabiendo que la productividad marginal del capital es igual a $f_x'(k_x)$, entonces, retomando la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\partial F_X}{\partial L_X} L_X + \frac{\partial F_X}{\partial K_X} K_X \\
\frac{X}{L_X} &= \frac{\partial F_X}{\partial L_X} + \frac{\partial F_X}{\partial K_X}\frac{K_X}{L_X} \\
x &= \underbrace{\frac{\partial F_X}{\partial L_X}}_{=w/p_x} + f_x'(k_x)k_x \\
x &= \frac{w}{p_x} + f_x'(k_x)k_x \\
w &= (x - f_x'(k_x)k_x) \underbrace{p_x}_{\frac{\partial F_X}{\partial K_X} = \frac{r}{p_x}} \\
w &= (x - f_x'(k_x)k_x)\frac{r}{f_x'(k_x)} \\
\frac{w}{r} \triangleq \omega &= \frac{x}{f_x'(k_x)} - k_x \\
k_x &= \frac{f_x(k_x)}{f_x'(k_x)} - \omega.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{k_x + \omega = \frac{f_x(k_x)}{f_x'(k_x)}}. \tag{1}$$

El resultado, por simetría, es ciertamente análogo para $Y$:

$$\boxed{k_y + \omega = \frac{f_y(k_y)}{f_y'(k_y)}}. \tag{2}$$

Ahora, diferenciando $k_x + \omega = \frac{f_x(k_x)}{f_x'(k_x)}$,

$$\begin{aligned}
dk_x &= \frac{f_x'(k_x)f_x'(k_x)dk_x - f_x''(k_x)f_x(k_x)dk_x}{[f_x'(k_x)]^2} - d\omega \\
dk_x(f_x'(k_x))^2 &= (f_x'(k_x))^2 dk_x - f_x''(k_x)f_x(k_x)dk_x - d\omega(f_x'(k_x))^2 = 0
\end{aligned}$$

Así, otro resultado importante es que el ratio capital-trabajo (intensidad en el uso el capital), en ambas industrias aumenta si se incrementa el precio relativo del salario:

$$\boxed{\frac{dk_x}{d\omega} = k_x'(\omega) - \frac{(f_x'(k_x))^2}{f_x''(k_x)f_x(k_x)} > 0.} \tag{3}$$

Análogamente, para la industria $Y$

$$\boxed{\frac{dk_y}{d\omega} = k_y'(\omega) = -\frac{(f_y'(k_y)^2}{f_y''(k_y)f_y(k_y)} > 0.} \tag{4}$$

Estas últimas expresiónes serán cruciales a continuación. Ahora bien, sabemos que

$$r = p_x \frac{\partial F_X}{\partial K_X} = p_y \frac{\partial F_Y}{\partial K_Y}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} p_x f_x'(k_x) &= p_y f_y'(k_y) \\ \frac{p_x}{p_y} &= \rho = \frac{f_y'(k_y)}{f_x'(k_x)}. \end{aligned}$$

El precio relativo de los bienes es proporcional a las productividades marginales. Luego, recordando que en las Ecuaciones 3 y 4, los ratios capital-trabajo dependen del salario relativo a la renta, diferenciamos respecto a $\omega$:

$$d\rho = \frac{f_y''(k_y)k_y'(\omega)d\omega f_x'(k_x) - f_x''(k_x)k_x'(\omega)d\omega f_y'(k_y)}{[f_x'(k_x)]^2}.$$

Usando (3), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\omega} &= \frac{f_y''(k_y)f_x'(k_x)}{(f_x'(k_x))^2}\left[(-1)\frac{(f_y'(k_y))^2}{f_y''(k_y)f_y(k_y)}\right] - \frac{f_x''(k_x)f_y'(k_y)}{[f_x'(k_x)]^2}\left[(-1)\frac{f_x'(k_x)^2}{f_x''(k_x)f_x(k_x)}\right] \\ \frac{d\rho}{d\omega} &= \frac{f_y'(k_y)}{f_x'(k_x)}\left[\frac{f_x'(k_x)}{f_x(k_x)} - \frac{f_y'(k_y)}{f_y(k_y)}\right]. \end{aligned}$$

Utilizando (1) y (2)

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{f_y'(k_y)}{f_x'(k_x)}\left[\frac{1}{\omega + k_x} - \frac{1}{\omega + k_y}\right].$$

Factorizando,

$$\boxed{\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{f_y'(k_y)}{f_x'(k_x)} \frac{1}{(\omega + k_x)(\omega + k_y)}[k_y - k_x].} \tag{5}$$

En (5), todos los términos son positivos con excepción de la diferencia en el corchete. Esta, se refiere a la diferencia en la intensidad del uso del capital entre la industrias. En estas notas, se asume que $k_y > k_x$, es decir, que la industria $Y$ es más capital intensiva que la industria $X$. De este modo, bajo el supuesto de no reversión en la intensidad del uso de los factores, es decir, que siempre $k_y > k_x$, se cumple que:

$$\boxed{\frac{d\rho}{d\omega} > 0.} \tag{6}$$

La no reversión en el uso de los factores se representa como una curva de contrato siempre por debajo de la diagonal en la caja de Edgeworth. Esto es, los puntos de eficiencia social donde las tasas marginales de sustitución técnica son tangentes entre sí, se dan en el área donde $K_Y > K_X$. Véase Figura 1.

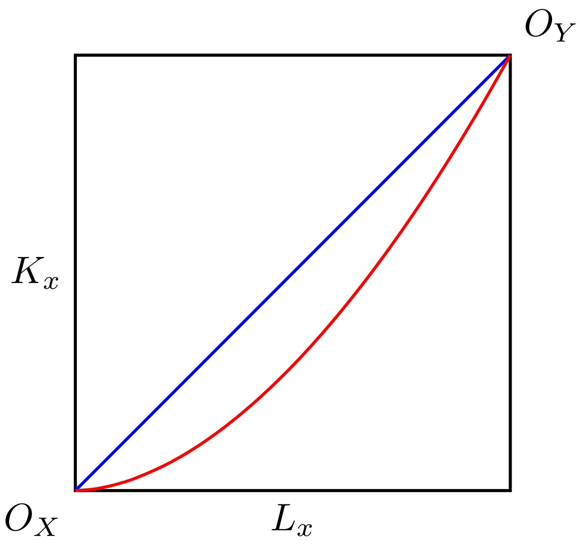


Figure 1: Conjunto de Pareto.

- La expresión $\frac{d\rho}{d\omega} > 0$ indica que un aumento en la relación de precios de los bienes $\rho$ está asociado con un aumento en la relación de precios de los factores $\omega$.
- Un aumento en el precio relativo de un bien intensivo (en este caso $L$) en un factor incrementa la remuneración relativa de ese factor. En este caso, si el bien $x$ es intensivo en trabajo y el bien $y$ es intensivo en capital, un aumento en $\frac{p_x}{p_y}$ implica un aumento en la relación salarial $\frac{w}{r}$.
- La intuición económica es que, al aumentar el precio del bien que usa más intensamente el trabajo (bien $x$), el trabajo se vuelve más valioso en relación con el capital. Esto provoca un incremento en los salarios relativos en comparación con la tasa de retorno del capital.
- En resumen, un aumento en $\frac{p_x}{p_y}$ beneficia al factor trabajo en términos reales, mientras que el capital puede perder poder adquisitivo relativo.
- Las siguientes figuras resumen el desarrollo analítico hecho en estas notas.

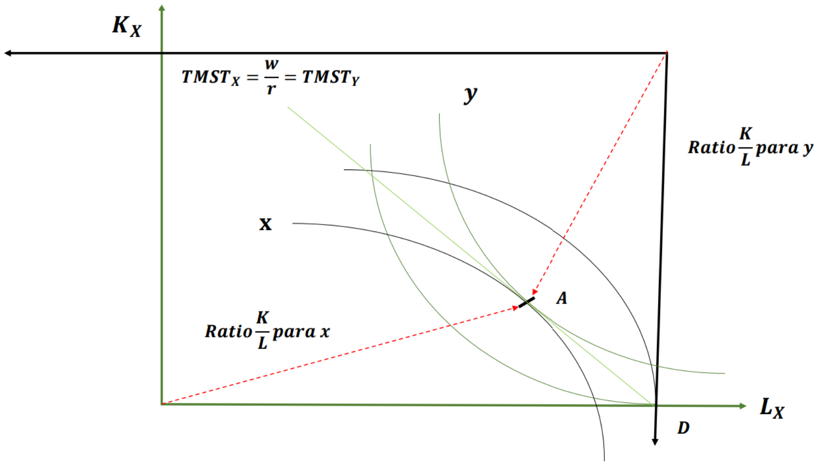


Figure 2: Stolper-Samuelson - 1.

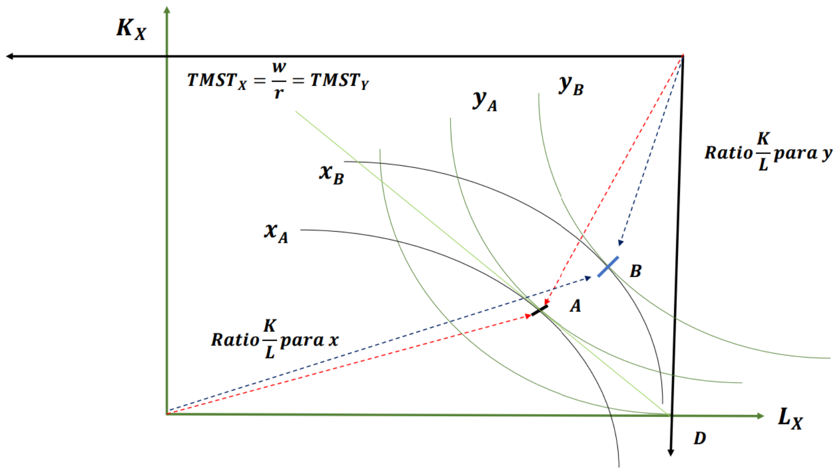


Figure 3: Stolper-Samuelson - 2.

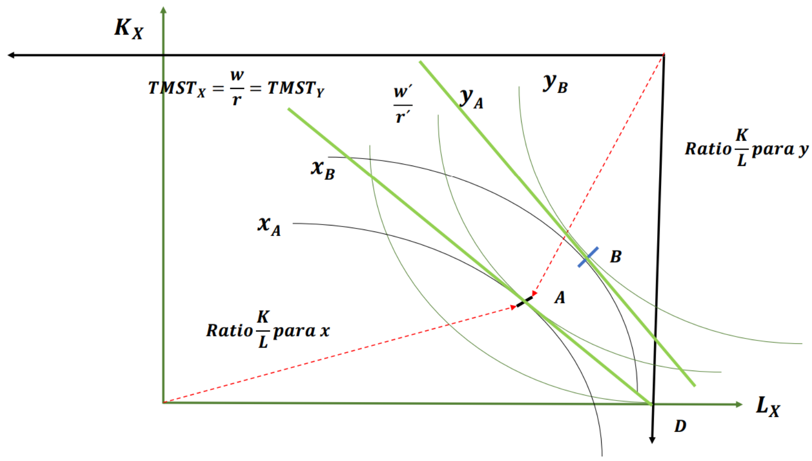


Figure 4: Stolper-Samuelson - 3.