Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas

26 de octubre de 2024

Práctica Dirigida 6
FIN 203

Profesor: José Gallardo
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

Ejercicio 1. Considere el siguiente juego

	L	**C**	**R**
T	(2, 0)	(1, 1)	(4, 2)
M	(3, 4)	(1, 2)	(2, 3)
B	(1, 3)	(0, 2)	(3, 0)

Determine las estrategias que sobreviven al proceso iterativo de eliminación y los posibles equilibrios de Nash.

Solución: B queda estrictamente dominada por T y, luego de eliminar B como estrategia para el jugador 1, concluimos que C queda estrictamente dominada por R. Los equilibrios de Nash son (M, L) y (T, R).

Ejercicio 2. Efectué el mismo análisis del Ejercicio 1 considerando

	Izquierda	**Centro**	**Derecha**
Arriba	(1, 0)	(1, 2)	(0, 1)
Abajo	(0, 3)	(0, 1)	(2, 0)

Solución: El jugador 1 tiene como acciones arriba y abajo, mientras que el jugador 2 tiene como acciones izquierda, centro y derecha. Rápidamente notamos que jugar derecha para el jugador 2 es una estrategia estrictamente dominada por jugar centro. De este modo, si el jugador 1 sabe que 2 es racional, puede eliminar de la tabla la estrategia *derecha*. Así, la tabla queda

	Izquierda	**Centro**
Arriba	(1, 0)	(1, 2)
Abajo	(0, 3)	(0, 1)

Luego, bajo esta configuración, ahora resulta que para el jugador 1 jugar abajo queda estrictamente dominado por jugar arriba. Así, la tabla se reduce a

	Izquierda	**Centro**
Arriba	(1, 0)	(1, 2)

Finalmente, el jugador 2 solo va a jugar centro, y la única estrategia al final es $(1, 2)$. Recordemos que este procedimiento de eliminación se llama *eliminación iterativa de estrategias dominadas*.

Ejercicio 3. ¿Es siempre posible aplicar el procedimiento de eliminiación de estrategias dominadas?

Solución: lamentablemente, no siempre podemos aplicar el procedimiento de eliminación de estrategias dominadas. Por ejemplo, podemos considerar la siguiente situación (piedra, papel o tijera):

	Piedra	**Papel**	**Tijera**
Piedra	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Papel	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
Tijera	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Por ese motivo, se introdujo un nuevo concepto mucho más fino, poderoso y aplicable a más contextos: el Equilibrio de Nash.

Ejercicio 4. **El problema de los comunes.** Considere n granjeros en una villa. Cada verano, los granjeros llevan su ganado a pastar. Denotemos por g_i el número de animales que posee el granjero i. Así, el número total de animales es $G = \sum_{1 \leq i \leq n} g_i$. El costo de tener un animal es c y no depende de cuántos animales el granjero ya tenga. El valor de criar un animal cuando hay G animales pastando es $v(G)$[1]. Dado que los animales necesita un mínimo de comida, existe un número máximo de animales que pueden coexistir: $G_{\text{máx}}$. Así, $v(G) > 0$ para $G < G_{\text{máx}}$ y $v(G) = 0$ si $G \geq G_{\text{máx}}$. Además, como los animales compiten por comida, debemos tener $v'(G) < 0$ para $G < G_{\text{máx}}$ y $v''(G) < 0$ (agregar un animal al inicio genera poco impacto en los demás, pero conforme hay más animales, agregar uno tiene un impacto mayor negativo en el resto). Durante la primavera, los granjeros deciden cuántos animales adquirir. Por simplicidad, asumimos que este número es perfectamente divisible.

- Determine el espacio de estrategias para cada agente.
- Demuestre que en un equilibrio de Nash,

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0.$$

- Analice si la solución del equilibrio de Nash difiere con lo socialmente óptimo.

[1]Depende de cuánto come.

Solución: cada granjero escoge $g_i \in [0, \infty)$. Sin embargo, dadas las restricciones del problema, realmente escoge sobre $[0, G_{\text{máx}})$. El pago del granjero i viene dado por

$$g_i v\left(\sum_{j=1}^{n} g_j\right) - c_i g_i.$$

Entonces, si $(g_1^*, \cdots, g_n^*)$ es un equilibrio de Nash, denotando $g_{-i}^* = g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*$,

$$v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0. \tag{1}$$

De este modo, sustituyendo g_i^* en (1) y sumando y dividiendo por n

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0.$$

Esta solución difiere de la solución socialmente óptima:

$$\max_{0 \leq G} \; Gv(G) - Gc \implies v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0.$$

$$G^{**} < G^*.$$

Ejercicio 5. Suponga que en un oligopolio de Cournot hay n firmas. Sea q_i la cantidad producida por la firma i y $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Considere la siguiente función inversa de demanda $P(Q) = a - Q$ (para $Q < a$, 0 caso contrario). Suponga además que $C(q_i) = cq_i$ donde $0 < c < a$. Determine (el/un) equilibrio de Nash y analice qué sucede cuando $n \to \infty$.

Solución: el problema de maximización de cada firma es

$$\pi_i = (p - c) q_i = (a - Q - c) q_i = \left(a - \sum_{j \neq i} q_j^* - q_i - c\right) q_i.$$

Luego, la CPO provee

$$\frac{d\pi_i}{dq_i} = \left(a - \sum_{j \neq i} q_j^* - c\right) - 2q_i^* = 0$$
$$a - c = q_1^* + \cdots + 2q_i^* + \cdots + q_n^*.$$

Aplicando la regla de Cramer, o simplemente por simetría, deducimos que

$$q_1^* = \cdots = q_n^*.$$

Así,

$$q_i^* = \frac{a - c}{n + 1}.$$

Cuando $n \to \infty$, $q_i^* \to 0$.

Ejercicio 6. Considere un duopolio de Cournot donde la función inversa de demanda es $P(Q) = a - Q$ y considere esta vez que las firmas tienen costos marginales distintos: c_1, c_2. Encuentre el equilibrio de Nash si $0 < c_i < a/2$. Analice qué sucede si $c_1 < c_2 < a$ pero $2c_2 > a + c_1$.

Solución: La firma 1 resuelve

$$\text{máx } \pi_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1.$$

La CPO provee

$$q_1 = \frac{a - c_1 - q_2}{2}.$$

Un argumento similar provee

$$q_2 = \frac{a - c_2 - q_1}{2}.$$

Así,

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}.$$

Si $0 < 2c_i < a$, las cantidades son positivas y resuelven el problema. Por otro lado, si $2c_2 > a + c_1$, $q_2^* = 0$: la firma 2 deja de operar.

Ejercicio 7. Encuentre el equilibrio con estrategias mixtas de Nash para el siguiente juego en forma normal:

	L	**R**
T	(2, 1)	(0, 2)
B	(1, 2)	(3, 0)

Solución:

	L(q)	**R**$(1-q)$
T(p)	(2, 1)	(0, 2)
B$(1-p)$	(1, 2)	(3, 0)

Si J_1 escoge T, le pagan en valor esperado $2q$, y debemos igualar esto al caso cuando elige B, o sea, $q = 3/4$. Análogamente para J_2, se deduce que $p = 2/3$.

Ejercicio 8. Dos firmas tienen una única vacante. Las firmas ofrecen salarios distintos w_1, w_2 tales que $w_1/2 < w_2 < 2w_1$. Imagine que hay dos trabajadores y cada uno puede postular a solo una firma. Esto es, si aplican a diferentes firmas, reciben el salario completo. Si aplican a la misma firma, la firma escoge uno al azar. Encuentre el/los equilibrios de Nash de este juego.

Sea q la probabilidad de que el Jugador 2 aplique a la Empresa 1 y $(1-q)$ la probabilidad de que aplique a la Empresa 2. Análogamente, p es la probabilidad de que el Jugador 1 aplique a la Empresa 1 y $(1-p)$ la probabilidad de que aplique a la Empresa 2.

	Empresa 1	**Empresa 2**
Empresa 1	$\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_1$	w_1, w_2
Empresa 2	w_2, w_1	$\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_2$

Solución: existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$(\text{Aplicar a Empresa 1}, \text{Aplicar a Empresa 2})$$

y

$$(\text{Aplicar a Empresa 2}, \text{Aplicar a Empresa 1}).$$

En un equilibrio de estrategias mixtas, el Jugador 1 establece p tal que el Jugador 2 es indiferente entre aplicar a la Empresa 1 o a la Empresa 2.

$$\mathbb{E}_2(\text{Empresa 1}) = \mathbb{E}_2(\text{Empresa 2})$$

$$\Rightarrow p \cdot \frac{1}{2}w_1 + (1-p) \cdot w_1 = p \cdot w_2 + (1-p) \cdot \frac{1}{2}w_2$$

$$\Rightarrow p = \frac{2w_1 - w_2}{w_1 + w_2}$$

Dado que $2w_1 > w_2$, $2w_1 - w_2$ es positivo y $p > 0$. Para que $p < 1$ sea verdadero, debe cumplirse que

$$\frac{2w_1 - w_2}{w_1 + w_2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}w_1 < w_2$$

Lo cual es verdadero. Además, dado que los pagos son simétricos, un análisis similar revela que

$$q = \frac{2w_1 - w_2}{w_1 + w_2}$$

Ejercicio 9. Provea un juego donde no existe un equilibrio de Nash con estrategias puras. ¿Y si son mixtas?

Solución:

	Cara	**Sello**
Cara	(-1, 1)	(1, -1)
Sello	(1, -1)	(-1, 1)

Si son mixtas, el teorema de existencia garantiza que siempre vamos a poder encontrar un equilibrio de Nash.