FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

INFORMACIÓN ASIMÉTRICA

Microeconomía Financiera
Semestre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo y Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

Estas notas están basadas en Tadelis and Segal (2005), Mas-Colell et al. (1995) y Wolfstetter (2002).

1 Selección Adversa

Considere un mercado con bienes de distinta calidad. Los vendedores pueden observar la calidad de lo que venden, pero los vendedores solo acceden a información relacionada con el valor promedio de la calidad en el mercado. Este fenómeno, que ocasiona la venta de tanto buenos como malos productos, introduce un sesgo de selección adversa que, por lo general, conlleva a un intercambio ineficiente en el mercado.

El desarrollo moderno de la selección adversa se debe al trabajo del premio Nobel George Akerlof, *Market for Lemons*. Como el título del artículo lo sugiere, Akerlof considere un mercado de autos usados. Suponga que la calidad de los carros x se distribuye uniformemente sobre $[0,\overline{x}]$ con $\overline{x}>0$. La valoración de los clientes es αx, con $\alpha>1$, mientras que la de los vendedores es x. Si lo vendedores pudiesen ver la calidad de los carros usados, el precio sería una función de la calidad $p(x)=\alpha x$. Dado un precio p, un vendedor solo va a ofertar su carro si $x\leq p$. Por ello, el valor esperado de la calidad es

$$\rho(p)=\mathbb{E}[x|x\leq p]=\frac{1}{\mathbb{P}\{x\leq p\}}\int_0^p xdx=\frac{1}{p}\frac{p^2}{2}=\frac{p}{2}.$$

Aquí hemos usado que

$$\mathbb{E}[Y|Y\in B]=\frac{1}{\mathbb{P}\{Y\in B\}}\int_B Xd\mathbb{P}.$$

Por otro lado, los vendedores compran el carro solo si

$$\alpha(\rho(p))=\frac{\alpha p}{2}\geq p\implies \alpha\geq 2.$$

Así, el mercado se cae si $\alpha\leq 2$.

Pasemos ahora a un modelo para el mercado del trabajo. Básicamente es adaptar el modelo de Akerlof para el mercado laboral. Considere un trabajador con productividad x cuando trabaja en una firma, e y si es auto-empleado. El trabajador conoce el par (x, y), mientras que el empleador solo conoce la distribución de (X, Y)[1] Un supuesto que se hace es que $y = y(x)$ con y creciente. La situación es entonces la siguiente:

1. La naturaleza escoge la productividad del trabajador según una distribución F con soporte compacto $[\underline{x}, \overline{x}]$. Solo el trabajador observa la realización x.
2. Las dos firmas, a y b, realizan simultáneamente ofertas de salario w_i.
3. El trabajador observa la ofertas y decide si se auto-emplea o acepta el trabajo en una de las firmas. Ante indiferencia, lanza una moneda balanceada.

Todos los individuos son neutrales al riesgo. Sus pagos son w (empleado), $y(x)$ (auto-empleado) y para la firma $x - w$ (si lo contrata) o 0 caso contrario. El trabajador va a aceptar el empleo solo si $y(x) \leq w$. Por ende,

$$\rho(w) = \mathbb{E}[X | y(X) \leq w].$$

Modelo general

1. Las firmas tienen la misma tecnología (retornos a escala constantes), produciendo el mismo bien (homogéneas) cuyo precio en el mercado es p[2], neutras al riesgo y usan únicamente el trabajo como insumo.
2. Los individuos difieren en el output que producen, tiene una productividad diferente dada por
$$\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}], \ 0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta} < \infty.$$
3. La proporción de trabajadores cuya productividad es menor o igual a θ está dada por la función de distribución $F(\theta)$.
4. Hay N trabajadores y $F(\cdot)$ es no degenerada (hay al menos 2 tipos de trabajadores).
5. Cada trabajador busca maximizar la cantidad que gana por trabajar. Su costo de oportunidad (trabajo remoto, en casa) por trabajar en la firma es $r(\theta)$. Así, acepta trabajar en la firma únicamente si $w \geq r(\theta)$.
6. Dado que las firmas son competitivas, en el equilibrio $w^*(\theta) = \theta$, y así, el conjunto de trabajadores que aceptan trabajar en la firma es
$$\{\theta : \ r(\theta) \leq \theta\}.$$
7. La solución Pareto eficiente resuelve[3]
$$\max \underbrace{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} N[I(\theta)\theta + (1 - I(\theta))r(\theta)]dF(\theta)}_{=\text{surplus agregado}}. \tag{1}$$

[1] Visto como vector aleatorio.

[2] Las firmas son precio-aceptantes.

[3] Formalmente, se resuelve $\max \int_\Omega \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [I(\theta)\theta + (1 - \theta)r(\theta)]dF(\theta)d\omega$ donde Ω es el universo de los trabajadores. No obstante. $\mu(\Omega) = N$ y el resultado es entonces consecuencia de Fubini.

Acá $I(\theta) \in \{0,1\}$ de forma que $I(\theta) = 1$ si el individuo con productividad θ trabaja en la firma y 0 caso contrario. En efecto, (1) es maximizado haciendo $I(\theta) = 1$ si $r(\theta) \leq \theta$, o haciendo $I(\theta) = 0$ si es que $\theta < r(\theta)$.

¿Qué sucede si los niveles de productividad no son observables? Esto es, si nos encontramos en un contexto de información asimétrica donde la empresa no conoce la verdadera productividad del trabajador. En este caso, w no es una función directa de θ. Para abordar el problema, primero, fijamos $w \in \mathbb{R}_+$. Luego, un trabajador i va a acceder trabajar en la firma si $r(\theta) \leq w$. Denotemos por

$$\Theta(w) = \{\theta : r(\theta) \leq w\}.$$

Luego, si una firma cree que la productividad promedio de los trabajadores que aceptan trabajar es $\mu = \mathbb{E}[\theta]$, su demanda de trabajo es

$$z(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu < w \\ [0,\infty] & \text{si } \mu = w \\ \infty & \text{si } w < \mu. \end{cases} \tag{2}$$

Ahora, si los trabajadores en Θ aceptan ofertas de trabajar en el mercado competitivo y si las creencias de la firma sobre la productividad de los trabajadores refleja correctamente la productividad promedio de los trabajadores contratados, en el equilibrio, tenemos que tener $\mu = \mathbb{E}[\theta|\theta \in \Theta^*]$. De este modo, de acuerdo a la Ecuación (2), la demanda y oferta de trabajo se igualan cuando $w = \mathbb{E}[\theta|\theta \in \Theta^*]$.

Definición 1.1. En el mercado de trabajo competitivo, donde la productividad no es observable, un equilibrio competitivo es un nivel de salarios w^* y un conjunto Θ^* de tipo de trabajadores que aceptan trabajar tal que

1. $\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\}$.
2. $w^* = \mathbb{E}[\theta|\theta \in \Theta^*]$.

Note que si $\Theta = \emptyset$, entonces $w^* = \mathbb{E}[\theta]$. Además, la solución $w^* = \mathbb{E}[\theta|\theta \in \Theta^*]$, $\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\}$ no es (usualmente) Pareto eficiente.

Proof. Supongamos que $r(\theta) = r$, $\forall\ \theta$. Esto significa que todos los trabajadores poseen las misma productividad en, digamos, el trabajo remoto). Asimismo, supongamos que $F(r) \in (0,1)$, i.e., existen $\theta < r$ y $\theta > r$. En el equilibrio competitivo,

$$\Theta^* = \begin{cases} [\underline{\theta}, \overline{\theta}], & \text{si } w \geq r \\ \emptyset, & \text{si } w < r. \end{cases}$$

Así, $w^* = \mathbb{E}[\theta|\theta \in \Theta^*] = \mathbb{E}[\theta]$. Si $\mathbb{E}[\theta] < r$, entonces $\Theta^* = \emptyset$. Esto es, que si la distribución es tal que hay una proporción mayor de trabajadores con baja productividad, (tales que hay muchos trabajadores con $\theta < r$), entonces la firma no contrata. Por otro lado, si la proporción de trabajadores con alta productividad es mayor (hay más trabajadores tales que $r \leq \theta$), $\Theta^* = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, i.e., contrata a todos. En ese sentido, contrata más de lo Pareto eficiente (mientras que en el otro caso, menos[4]). Finalmente, si $r < \underline{\theta}$ o $r > \overline{\theta}$, la asignación del equilibrio es P.O. □

[4] Lo Pareto eficiente es que, aquellos con $\theta < r$ no trabajen en la firma pues son menos productivos en la firma que en casa.

Ejercicio 1.1. El estado desea privatizar una empresa pública distribuidora de energía eléctrica. Sin embargo, los responsables de la privatización han determinado que existe un problema de exceso de personal, pero temen proponer un esquema de renuncias voluntarias (la empresa le paga un determinado monto a los trabajadores, a cambio de que estos renuncien) pues temen que se presente el problema de selección adversa si lo hacen. ¿En qué consistiría el problema de selección adversa en este caso?

Solución: el problema de selección adversa podría darse debido a que los nuevos empleadores no saben de qué tipo serán los empleados que apliquen a la renuncia voluntaria. Note que al ofrecer un monto por renunciar al empleo, es probable que quieran permanecer en el trabajo aquellos que se saben menos productivos y que consideran que no conseguirán un mejor empleo. Por el contrario, aquellos trabajadores eficientes y productivos aceptarán renunciar y buscar otro trabajo, pues saben que es muy probable que consigan un nuevo empleo con rapidez.

Ejercicio 1.2. Considere el siguiente mercado para autos usados, similar al de Ackerlof, donde las calidades de dichos autos son $x \in [0,1]$. Un auto de calidad x es valuado en x por el comprador y $v(x)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua, estrictamente creciente y tal que $v(x) \leq x$ para todo x. Si la densidad de las calidades es $f(x)$, se determina el equilibrio cuando

1. Los compradores y vendedores conocen la calidad de cada auto.
2. Ni los compradores ni vendedores conocen la calidad de cada auto.
3. Si f es una distribución uniforme en $[0,1]$ y $v(x) = x^2$ y sólo los vendedores conocen la calidad del auto.
4. Determinar la pérdida be bienestar que se ocasiona por asimetría de información.

Solución:

1. Si $v(x) < x$, entonces cada uno de los autos se vende a $p = x$.
2. Si $v(x) \leq x$, si no es posible verificar la calidad de los autos por ninguno de los agentes,
$$p = \mathbb{E}[X] = \int_0^1 xf(x)dx \geq \int_0^1 v(x)f(x)dx = \mathbb{E}[v(x)].$$
3. En el equilibrio
$$p^* = \mathbb{E}[x|x \in \Theta^*],\ \Theta^* = \{x : v(x) \leq p\}.$$
Luego,
$$p^* = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{p}} \frac{x}{\sqrt{p}} dx = \left[\frac{x^2}{2\sqrt{p}}\right]_0^{\sqrt{p}}.$$
Así, $p^* = 1/4$ y se venden autos tales que $x > 1/2$. Otro equilibrio es $p = 0$.
4. Para el equilibrio competitivo con $p = 1/4$ definimos la pérdida de bienestar como
$$L = \int_{1/2}^1 (x - x^2)dx = 1/12.$$
Esto representa lo que dejaron de ganar los vendedores por la información asimétrica.

Modelo del principal agente

A continuación presentamos otro problema de información asimétrica, el modelo del principal agente, usualmente asociado al problema de la acción oculta.

1. Dos jugadores: el principal (propietario de una firma), el agente o manager (trabajador de la firma).

2. El principal contrata al agente para realizar un trabajo.

3. El agente escoge una acción $a \in A$.

4. Cada $a \in A$ conlleva a una distribución de pagos para la firma, $q = f(a, \epsilon)$, donde ϵ es una v.a. con distribución conocida.

5. a no es observable y q sí.

Algunos ejemplos de esta situación son

	Principal	Agente	Acción
1	Propietario	Manager	Escoger proyecto riesgoso
2	Manager	Trabajador	Esfuerzo
3	Regulador	Firma regulada	Reducción del costo
4	Aseguradora	Asegurado	Esfuerzo por cuidarse

Se asume a continuación que el principal es neutral al riesgo y que el agente es adverso al riesgo.

1. El agente tiene una utilidad vNM

$$U(a, I) = v(I) - g(a).$$

Otra notación frecuente es $u(e, w) = v(w) - g(e)$ donde e es el esfuerzo y w el salario. Se asume que $v' > 0, v'' < 0$, y que $g'' > 0$.

2. La utilidad o beneficios del principal son simplemente $\pi = q - I$.

Se asume también lo siguiente:

1. $\tilde{q}$ es una variable aleatoria con soporte discreto finito $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, donde, s.p.d.g. $q_1 < q_2 < \cdots < q_n$.

2. $A \subset \mathbb{R}^k$ es compacto y no vacío.

3. Dado $a \in A$, la aplicación $\pi : A \to S$ donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, mapea acciones en distribuciones de probabilidad sobre Q.

4. $v(\cdot)$ es clase C^2 sobre $(-\overline{I}, \infty)$ y tal que $\lim_{I \to \underline{I}} v)(I) = -\infty$ (no nos preocupamos por soluciones de esquina). Por ejemplo, $v(x) = \ln x$ e $\underline{I} = 0$.

Acción verificable

Supongamos primero que $a \in A$ es verificable, de forma que el principal puede escoger la mejor acción $a \in A$, efectuando así un contrato que le permite alcanzar el objetivo en cuestión. El principal resuelve

$$\begin{cases} \max_{a\in A, I\in\mathbb{R}} & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a)q_i - I \\ \text{s.a} & v(I) - g(a) \geq \overline{u} \quad (IR). \end{cases}$$

Ciertamente, la IR se da con igualdad. Por ende,

$$C_{PM}(a) = I(a) = v^{-1}(\overline{u} + g(a)),$$

donde PM denota primer mejor (first best). Así, el problema del principal consiste simplemente en resolver

$$\max_{a\in A} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a)q_i - v^{-1}(\overline{u} + g(a)).$$

Acción no verificable

Cuando la acción no es verificable, el principal debe ofrecer un esquema de incentivos que recompense al agente en función del nivel de producción. En concreto, dado que nos situamos en el caso discreto, el esquema es de la forma $\{I_1, \cdots, I_n\}$. El principal va a escoger a^*_{SM}[5] junto a un esquema de incentivos que implementa esta acción.

1. Primero, para todo $a \in A$, se busca el menor costo, i.e. $(I_1^*(a), \cdots, I_n^*(a))$ con $a \in A$.
2. Dado $(I_1^*(a), \cdots, I_n^*(a))$, escoger a^*_{SM} que maximice los beneficios.

Entonces, si el principal ha decidido implementar a^*, se resuelve

$$\begin{cases} \min_{I_1,\cdots,I_n} & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)I_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)v(I_i) - g(a^*) \geq \overline{u} \\ & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)v(I_i) - g(a^*) \geq \pi_i(a)v(I_i) - g(a), \ \forall\ a \in A. \end{cases}$$

Este es un problema con función objetivo lineal y restricciones cóncavas. Podemos reescribirlo como un problema de optimización convexa con restricciones lineales usando $h(\cdot) = v^{-1}(\cdot)$, de forma que $I_i = h(v_i)$,

$$\begin{cases} \min_{v_1,\cdots,v_n} & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)h(v_i) \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)v_i - g(a^*) \geq \overline{u} \quad (IR) \\ & \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)v_i - g(a^*) \geq \pi_i(a)v_i - g(a), \ \forall\ a \in A, \quad (IC). \end{cases}$$

No es difícil demostrar que, debido al Teorema de Weierstrass, este problema siempre tiene solución. Para encontrarla, podemos utilizar las condiciones KKT.

[5] SM de segundo mejor (second best).

Observación 1. Algunas observaciones importantes:

1. La función objetivo $C_{SM}(a^*)$ es semi-continua por debajo.
2. Si $v'' < 0$, la solución es única.
3. La restricción IR es con igualdad.

Luego de escoger $C_{SM}(a)$, el principal resuelve

$$\max_{a \in A} \; B(a) - C_{SM}(a),$$

donde $B(a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a) q_i$. Como B es continua y $-C_{SM}$ es semi-continua por arriba. Bajo la compacidad de A, se asegura la solución.

Observación 2. Una pregunta de interés es cuando la solución con información completa coincide con la de información asimétrica:

1. $v'' = 0$.
2. A es finito y existe i tal que $\pi_i(a^*_{PM}) = 0$.

Proposición 1. Si $\pi_i(a) \geq 0$ para todo i y para todo $a \in A$, y $v'' < 0$ y si $g(a^*_{PM}) > \min_{a \in A} g(a)$ para todo a^*_{PM}, entonces los beneficios del principal en el segundo mejor es inferior al primer mejor.

La forma del esquema de incentivos

Supongamos que $|A| = m$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) h(v_i) \\
&- \sum_{a_j \neq a^*} \mu_j \left[\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) v_i - g(a^*) - \sum_{i} \pi_i(a_j) v_i + g(a_j) \right] \\
&- \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) v_i - g(a^*) - \overline{u} \right].
\end{aligned}$$

Las CPO proveen

$$\pi_i(a^*) h'(v_i) - \sum_{a_j \neq a^*} \mu_j [\pi_i(a^*) - \pi_i(a_j)] - \lambda \pi_i(a^*) = 0, \; \forall \; i = 1, ..., n,$$

donde $\mu_j \geq 0$, $\forall \; a_j \neq a^*$ y $\lambda \geq 0$. Dividiendo $\pi_i(a^*) > 0$,

$$h'(v_i) = \lambda + \sum_{a_j \neq a^*} \mu_j - \sum_{a_j \neq a^*} \mu_j \left(\frac{\pi_i(a_j)}{\pi_i(a^*)} \right), \; \forall \; i = 1, ..., n.$$

Definición 1.2. Suponga que $\pi_i(a) > 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ y para todo $a \in A$. Decimos que la condición del ratio de verosimilitud monótono se cumple si para todo $a, a' \in A$ con $g(a') \leq g(a)$, $\frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a')}$ es no-decreciente en i.

Proposición 2. Si se cumple al condición del ratio de verosimilitud monótono y $A = \{a_L, a_H\}$, entonces $I_{i+1} \geq I_i$.

Modelo continuo

Asumamos ahora que $a \in [\underline{a}, \overline{a}]$ y q tiene densidad continua $f(q|a)$. El problema que afronta el principal es entonces

$$\begin{aligned} \max_{a, I(\cdot)} & \int [q - I(q)] f(q|a) dq \\ \text{s.a} & \int v(I(q)) f(q,a) dq - g(a) \geq \overline{u} \\ & a \in \operatorname{argmax} \left\{ \int v(I(q)) f(q,a') dq - g(a'),\ a' \in A \right\}. \end{aligned}$$

El Lagrangiano asociado al problema es

$$\mathcal{L} = \int [q - I(q) + \lambda v(I(q))] f(q|a) dq - \lambda g(a) - \lambda \overline{u}.$$

Si asumimos soluciones interiores, la CPO (punto por punto), con respecto a $I(\cdot)$, conlleva a

$$\frac{1}{v'(I(q))} = \lambda,\ \forall\ q.$$

Denotemos $f_a = \partial f(q|a)/\partial a$. Entonces, la CPO con respecto a a provee

$$\int [q - I(q) + \lambda v(I(q))] f_a(q|a) dq = \lambda g'(a).$$

Observación 3. Respecto al programa de optimización que se traduce por la condición

$$a \in \operatorname{argmax} \left\{ \int v(I(q)) f(q,a') dq - g(a'),\ a' \in A \right\},$$

la CPO es

$$\int v(I(q)) f_a(q|a) dq = g'(a)$$

mientras que la CSO es

$$\int v(I(q)) f_{aa}(q|a) dq - g''(a) \leq 0.$$

Observación 4. Si maximizamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int (q - I(q)) f(q|a) dq + \lambda \left[\int v(I(q)) f(q|a) dq - g(a) - \overline{u} \right] \\ & + \mu \left[\int v(I(q)) f_a(q|a) dq - g'(a) \right] \end{aligned}$$

con respecto a $I(\cdot)$, punto por punto, obtenemos que casi seguramente

$$\frac{1}{v'(I(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

Modelo de riesgo moral alternativo

1. El dueño de una firma (el principal) desea contratar un gerente (el agente) para realizar un proyecto.
2. Las ganancias del proyecto son, en parte, afectadas por el esfuerzo (acciones) del gerente.
3. Si las acciones/esfuerzo fueran perfectamente observables el problema seria sencillo. Los contratos especificarían ambos, niveles de esfuerzo y compensación correspondiente para cada tipo de esfuerzo. El problema surge cuando los niveles de esfuerzo/acciones no son observables y por ende no es posible especificarlo en los contratos.
4. En esta situación, el dueño diseñará un esquema de pagos de tal manera que indirectamente dé incentivos al gerente para que tome la acción mas conveniente para él.
5. π son los beneficios observables del proyecto.
6. e es la acción ejecutada por el gerente, su esfuerzo. Se tiene que $e \in E \subset \mathbb{R}$[6].
7. Un nivel de esfuerzo e no determinará automáticamente los niveles de beneficios π (sino seria fácil escribir contratos).
8. Asumimos que el beneficio puede tomar valores en $[\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ y que se relaciona estocásticamente con e via la función de densidad condicional $f(\pi|e)$
$$f(\pi|e) > 0,\ \forall e \in E,\ \forall\ \pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}].$$
9. En particular, suponemos que $e \in \{e_H, e_L\}$, donde la H es de high (*esfuerzo alto*) y L de low (*esfuerzo bajo*).
10. Por otro lado, suponemos que la distribución de π condicional a e_H domina estocásticamente en primer orden a la de π condicional a e_L,
$$F(\pi|e_H) \leq F(\pi|e_L).$$
Esto significa que, bajo el nivel de esfuerzo e_L es más probable tener beneficios en la cola inferior. Esto es ciertamente coherente con la definición de e_L.
11. La dominancia estocástica de primer orden implica que
$$\mathbb{E}[\pi|e_L] = \int \pi f(\pi|e_L) d\pi < \int \pi f(\pi|e_H) d\pi = \mathbb{E}[\pi|e_H].$$
12. El gerente posee una función de utilidad de Bernouilli $u(w, e)$ que cumple con las siguiente propiedades; $\frac{\partial u(w,e)}{\partial w} > 0$, $\frac{\partial^2 u(w,e)}{\partial w^2} \leq 0$ y
$$u(w, e_H) < u(w, e_L).$$

[6]De manera más general, e podría tener varias dimensiones: esfuerzo en reducir costos, tiempo destinado a la atención de clientes etc. por lo cual, tendríamos $e \in E^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$

Usualmente se considera

$$u(w,e) = v(w) - g(e),$$

con $v'(w) > 0$, $v''(w) \leq 0$ $g(e_H) > g(e_L)$. Los supuestos sobre v implican que el gerente es débilmente adverso al riesgo sobre las loterías del salario y prefiere menor esfuerzo a mayor.

Esfuerzo observable

Un contrato especifica un nivel de esfuerzo $e \in \{e_H, e_L\}$ y una función de pagos $w(\pi)$. El gerente puede aceptar o rechazar el contrato propuesto por el propietario. Suponemos además, que el propietario debe proveer al gerente con una utilidad esperada por lo menos mayor o igual a un nivel $\overline{u}$. Si el gerente rechaza el contrato, recibe un pago nulo. De este modo, el propietario resuelve

$$\begin{aligned} \max_{e \in \{e_H, e_L\}, w(\pi)} & \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} (\pi - w(\pi)) f(\pi|e) d\pi \\ s.a. & \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} v(w(\pi)) f(\pi|e) d\pi - g(e) \geq \overline{u}. \end{aligned}$$

El principal es neutro al riesgo pues su utilidad viene dada directamente por sus beneficios netos. Es conveniente pensar el problema en 2 etapas.

1. Primero, para cada elección de e que fuese especificada en el contrato, ¿cuál es el mejor esquema de pagos $w(\pi)$ para ofrece al agente
2. En segundo lugar, ¿cuál es la mejor elección para e?

La estrategia es entonces la siguiente,

- Tomamos un valor dado para e y hallamos el esquema de compensación óptimo. Se hace lo mismo para los 2 valores de e.
- Se escoge e tal que los beneficios sean maximizados.

Dado e, escoger $w(\pi)$ tal que se maximice

$$\int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} (\pi - w(\pi)) f(\pi|e) d\pi = \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} \pi f(\pi|e) d\pi - \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} w(\pi) f(\pi|e) d\pi$$

es equivalente a minimizar el esperado de los costos $\int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} w(\pi) f(\pi|e) d\pi$. De este modo, es lo mismo que resolver

$$\begin{aligned} \min_{w(\pi)} & \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} w(\pi) f(\pi|e) d\pi \\ s.a. & \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} v(w(\pi)) f(\pi|e) d\pi - g(e) \geq \overline{u}. \end{aligned}$$

En el caso discreto, aplicando condiciones de primer orden a

$$\mathscr{L}(\{w(\pi_j)\}_{j=1}^{n}, \gamma) = \sum_{j=1}^{N} w(\pi_j) f(\pi_j|e) + \gamma \left[-\overline{u} - \sum_{j=1}^{N} v(w(\pi_j)) f(\pi_j|e) + g(e) \right]$$

se llega a

$$-f(\pi_j|e) + \gamma v'(w(\pi_j))\underbrace{f(\pi_j|e)}_{p_{je}} = 0$$
$$\frac{1}{v'(w(\pi_j))} = \gamma, \ \forall\ j.$$

Dado que $v'(w)$ es estrictamente decreciente en w, $\exists\ w^* = w^*(\pi) = c$ (constante). Luego,

$$\int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} v(w_e^*)f(\pi|e)d\pi - g(e) = \overline{u}$$
$$v(w_e^*)\int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} f(\pi|e)d\pi - g(e) = \overline{u}$$
$$v(w_e^*) - g(e) = \overline{u}.$$

Hacemos esto para cada uno de los niveles de esfuerzos dados de tal modo que cada uno de los dos esfuerzos fijos vendrán dados por:

$$w_{e_L}^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e_L))$$
$$w_{e_H}^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e_H)).$$

Dado que $g(e_H) > g(e_L)$, y v es creciente, $w_{e_H}^* > w_{e_L}^*$. Finalmente, se escoge e de forma que se maximice

$$\int \pi f(\pi|e)d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e)).$$

De este modo, la elección de e dependerá del incremento del valor esperado de los beneficios comparado al costo monetario de incrementar la desutilidad del agente, causado por $e_L \to e_H$.

Proposición 3. En el modelo de agente-principal, cuando el esfuerzo del gente es observable, un contrato óptimo especifica que el gerente escoge un esfuerzo e^* que maximiza $\int \pi f(\pi|e)d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e_H))$ y le paga el salario fijo $w^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e^*))$. Este contrato es único si $v''(w) < 0$, $\forall\ w$. En ese sentido, cuando el principal observa el esfuerzo, evita el riesgo que podría efrenta el agente dada la relación estocástica y no determinística entre e y π.

Esfuerzo no observable

El contrato óptimo especificado en la Proposición (3) cumple con dos objetivos:

1. Especifica una elección eficiente del nivel de esfuerzo.
2. Asegura al agente contra el riesgo del salario.

Sin embargo, cuando el esfuerzo e es no observable, estos dos objetivos entran en conflicto pues, la única forma de hacer que el trabajador se esfuerce es ligando sus pagos a los beneficios, que son aleatorios. Cuando estos objetivos entran en conflicto, la no observabilidad del esfuerzo conduce a ineficiencias.

Proposición 4. En el modelo principal-agente con el esfuerzo no observable del manager y el manager es neutral al riesgo, un contrato óptimo genera la misma elección de esfuerzo y utilidades esperadas para el manager y el dueño que cuando el esfuerzo es observable.

Proof. La prueba consiste en mostrar que existe un esquema de pagos que provea el mismo pago al principal que en el caso e observable. Supongamos que el esquema de pagos es el siguiente

$$w(\pi) = \pi - \alpha, \ \alpha > 0.$$

En ese sentido, el principal *le vende* el proyecto al agente. Si el agente acepta el contrato, escoge e tal que se maximice

$$\int w(\pi) f(\pi|e) d\pi - g(e) = \int \pi f(\pi|e) d\pi - \alpha - g(e). \tag{3}$$

Ahora, recordemos que, cuando el esfuerzo es observable, en caso $v(w) = w$, e^* resuelve

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} \int \pi f(\pi|e) d\pi - g(e) - \overline{u}.$$

Este mismo e permite maximizar (3). Así, el contrato induce el mejor nivel de esfuerzo (primer mejor - completa observabilidad). Luego, El agente acepta el contrato si

$$\int \pi f(\pi|e^*) d\pi - \alpha - g(e^*) \geq \overline{u}. \tag{4}$$

Sea α^* tal que la restricción en (4) se cumple. Pero entonces, haciendo

$$\alpha^* = \int \pi f(\pi|e^*) d\pi - g(e^*) - \overline{u},$$

por un lado, el agente acepta participar, y por otro lado, el principal obtiene el mismo nivel de utilidad que en el caso e observable:

$$\int \pi f(\pi|e^*) d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e^*)).$$

□

Cuando el agente es adverso al riesgo, la situación se complica pues ahora los incentivos para alcanzar niveles de esfuerzo más alto implican hacer al agente enfrentar riesgo. Para caracterizar el contrato óptimo bajo estas circunstancias, consideramos nuevamente el diseño del contrato en dos etapas: primero caracterizamos el esquema óptimo de incentivos para cada nivel de esfuerzo, y luego, seleccionamos dicho nivel.

El esquema de incentivos óptimo para implementar cualquier esfuerzo, minimiza el esperado de los pagos del principal, sujeto a dos restricciones. La primera, que corresponde a los incentivos de participación, consiste en asegurar que el agente reciba una utilidad $\overline{u}$ mayor o igual al valor esperado de sus pagos en caso acepte el contrato. Sin embargo, cuando el esfuerzo del agente es no observable, se enfrenta a una segunda restricción, el agente debe desear escoger el esfuerzo e. Formalmente, el principal debe resolver

$$\begin{cases} \max_{w(\pi)} & \int w(\pi) f(\pi|e) d\pi \\ s.a. & \int (w(\pi)) f(\pi|e) d\pi - g(e) \geq \overline{u} \\ & e \text{ resuelve } \max_{\tilde{e}} \int v(w(\pi)) f(\pi|\tilde{e}) d\pi - g(\tilde{e}). \end{cases} \tag{5}$$

1. En caso $e = e_L$, $w_e^* = v^{-1}(\overline{u}+g(e_L))$. Esto corresponde al pago del caso e observable. Bajo esta compensación, el manager escoge e_L pues su salario no se ve afectado por su esfuerzo. En dicho caso, gana exactamente $\overline{u}$.

2. En caso se implemente $e = e_H$, la restricción
$$e \text{ resuelve } \max_{\tilde{e}} \int v(w(\pi))f(\pi|\tilde{e})d\pi - g(\tilde{e})$$
se puede reescribir de la manera siguiente:
$$\int v(\pi(w))f(\pi|e_H)d\pi - g(e_H) \geq \int v(\pi(w))f(\pi|e_L)d\pi - g(e_L).$$
Sean los multiplicadores asociados a las restricciones $\gamma, \mu \geq 0$. Entonces, por KKT, debemos tener, para cada $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$
$$-f(\pi|e_H) + \gamma v'(w(\pi))f(\pi|e_H) + \mu[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)]v'(w(\pi)) = 0.$$
Esto es,
$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \gamma + \mu \left[1 - \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)}\right]. \tag{6}$$

Establezcamos ahora que ambos $\gamma, \mu > 0$.

Lema 1. En cualquier solución al problema (5), con $e = e_H$, ambos γ y μ son positivos.

Proof. Supongamos que $\gamma = 0$. Como $F(\pi|e_H)$ domina estocásticamente en primer orden a $F(\pi|e_L)$, existe un conjunto $\tilde{\Pi} \subset [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ tal que
$$\frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} > 1, \ \forall\, \pi \in \tilde{\Pi}.$$
Pero entonces, si $\gamma = 0$, de la Ecuación (7), $v'(w(\pi)) \geq 0$ para todo $\pi \in \tilde{\Pi}$ (pues $\mu \geq 0$). Por otro lado, si $\mu = 0$, entonces, nuevamente de la Ecuación (7), se concluiría que el pago debe ser constante. Sin embargo, en dicho caso, el manager escogería e_L (contradicción). $\square$

Caso discreto. En caso los outcomes sean discretos, el principal resuelve (a de alto y b de bajo)
$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n p_{ia}(x_i - w_i) \\ s.a. & \sum_{i=1}^n p_{ia}(v(w_i) - g(a)) \geq \overline{u} \\ & \sum_{i=1}^n p_{ia}(v(w_i) - g(a)) \geq \sum_{i=1}^n p_{ib}(v(w_i) - g(b)). \end{cases}$$
Ya hemos probados que las restricciones se cumple con igualdad. Por ende, basta aplicar condiciones de primer orden al Lagrangiano
$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\{w_i\}_{i=1}^n, \gamma, \mu) = &\sum_{i=1}^n p_{ai}(x_i - w_i) \\ &+ \gamma \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n p_{ai}(v(w_i) - g(a))}_{=\sum_{i=1}^n p_{ai}v(w_i) - g(a)} - \overline{u} \right) \\ &+ \mu \left(\sum_{i=1}^n p_{ia}(v(w_i) - g(a)) - \sum_{i=1}^n p_{ib}(v(w_i) - g(b)) \right). \end{aligned}$$

Luego,
$$\frac{\partial \mathscr{L}(\{w_i\}_{i=1}^n, \gamma, \mu)}{\partial w_i} = -p_{ai} + \gamma p_{ai} v'(w_i) + \mu(p_{ai} - p_{bi}) v'(w_i) = 0.$$
Por lo tanto,
$$v'(w_i) = \frac{p_{ai}}{\gamma p_{ai} + \mu(p_{ai} - p_{bi})} = \frac{1}{\gamma + \mu\left(1 - \frac{p_{bi}}{p_{ai}}\right)}.$$

Observación 5. Fijemos $\hat{w}$ tal que $v'(\hat{w}) = 1/\gamma$. De acuerdo con la condición (7)
$$w(\pi) > \hat{w} \text{ si } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} < 1$$
$$w(\pi) < \hat{w} \text{ si } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} > 1.$$

El ratio de probabilidades $\frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)}$ (o π_{bi}/π_{ai} en el caso discreto) indica la verosimilitud de un bajo esfuerzo y por ello debe estar asociado a mayores utilidades marginales y menores pagos.

Observación 6. Cuando el ratio de verosimilitud es bajo indica que un resultado en producción es poco probable con un esfuerzo bajo. En este caso, la utilidad marginal disminuye y el pago es mayor. Es decir, el principal ofrece un mayor pago por los resultados que son poco probables con un esfuerzo bajo (lo que es cierto para los niveles de mayor producción).

Proposición 5. Para que el esquema de compensaciones sea monótonamente creciente, también debe ocurrir que el ratio de verosimilitud sea monótonamente decreciente.

Proof. En el caso discreto,
$$v'(w_i) = \frac{1}{\lambda + \mu\left(1 - \frac{p_{bi}}{p_{ai}}\right)}.$$

Si w crece, v' decrece, por lo que π_{bi}/π_{ai} debe decrecer. En el caso continuo, es análogo pues
$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \gamma + \mu\left[1 - \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)}\right]. \tag{7}$$
□

Lima, Noviembre 14, 2024.

References

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.

Tadelis, S. and Segal, I. (2005). Lecture notes on contract theory. Lecture notes. Course ECO206, University of California, Berkeley, and 282-291, Stanford University.

Wolfstetter, E. (2002). *Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auctions, and Incentives*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.