PD 4 - Microeconomía Financiera

Marcelo Gallardo & Karen Montoya

PUCP

Setiembre 2024

Index

Seguros: pregunta 1

Un individuo que trabaja en el sector de construcción recibe una paga de 500 soles. Sin embargo, está expuesto a caídas con probabilidad de $\frac{1}{2}$, lo que podría costarle 100 soles para su recuperación. Por ello, quiere asegurarse con una compañía a un monto M ante una posible caída. La función de utilidad del individuo es $v(x) = x^{1/2}$. El seguro le cubre el costo total de 100 soles.

- Halle el valor esperado y la utilidad esperada del individuo sin seguro.
- Calcule cuál es el valor máximo que puede cobrar el asegurador monopólico por el seguro (halle el monto M).

	Sufre caída	**No sufre caída**
Sin asegurarse	400	500
Con seguro	$500 - M$	$500 - M$
Probabilidades	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Table Pagos y probabilidades.

Valor esperado:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \times 400 + \frac{1}{2} \times 500 = 450$$

Utilidad esperada sin seguro:

$$U^e_{\text{sin seguro}} = \frac{1}{2} \times (400)^{1/2} + \frac{1}{2} \times (500)^{1/2} = 21.180$$

Igualando la utilidad esperada sin seguro a la utilidad esperada con seguro:

$$21.180 = \sqrt{500 - M}$$

Elevando ambos lados al cuadrado:

$$(21.180)^2 = 500 - M$$

$$M = 500 - (21.180)^2$$

$$M \approx 51.4076$$

Por lo tanto, el monto máximo que puede cobrar el asegurador monopólico por el seguro es aproximadamente 51.41 soles.

Seguros: pregunta 2

Considere un tomador de decisiones que tiene una riqueza inicial de w y puede perder 1 unidad de riqueza con probabilidad p. Este individuo puede comprar un seguro, que es un bien divisible. Una unidad de seguro cuesta q y cubre una unidad de pérdida en caso de que ocurra. Se desea entender su demanda de seguro. Sea θ la cantidad de seguro que compra.

1. Argumente por qué su utilidad esperada viene dada por

$$U^e(\theta) = v(w - q\theta)(1 - p) + v(w - q\theta - (1 - \theta))p,$$

   donde $v(\cdot)$ es la función de utilidad elemental.

2. Considere el caso de un precio actuarialmente injusto, donde $q > p$. Este escenario es común ya que la compañía de seguros necesita cubrir sus costos operativos. Bajo estas condiciones, demuestre que el tomador compra solo un seguro parcial, es decir, $\theta < 1$. Asuma a continuación v estrictamente creciente y estrictamente cóncava (supuestos razonables).

3. Ahora considere el caso de $q = p$, el precio actuarialmente justo. Este precio es significativo en la literatura ya que representa el precio competitivo, asumiendo que las compañías de seguros no tienen costos adicionales. En este escenario, demuestre que el tomador compra un seguro total ($\theta = 1$).

Solución: identificamos los 2 escenarios: con probabilidad p la riqueza es $w - q\theta - 1 + \theta$, y con probabilidad $1 - p$ la riqueza es $w - q\theta$.

La CPO provee

$$\frac{dU^e}{d\theta} = -qv'(w - q\theta)(1 - p) + (1 - q)pv'(w - q\theta - 1 + \theta).$$

Evaluando en $\theta = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{dU^e}{d\theta}(1) &= v'(w - q)((1 - q)p - q(1 - p)) \\ &= (p - q)v'(w - q) < 0. \end{aligned}$$

O sea, en $\theta = 1$, la derivada es negativa (la utilidad esperada decrece). Por ende, $\theta^* < 1$.

Si $p = q$, llegamos a

$$\frac{dU^e}{d\theta} = 0 \implies v'(w - q\theta - 1 + \theta) = v'(w - q\theta).$$

Como $v'(\cdot)$ es estrictamente creciente, $\theta^* = 1$.

Actitudes frente al riesgo: pregunta 3

La utilidad del dinero de Lucio es $v_L(m) = \sqrt{m}$. Lucio posee una firma y está pensando en contratar a Carolina para dirigirla. La utilidad del dinero de ella está dada por $v_C(m) = 2m$. Se sabe que 2 de cada 3 veces le va bien a la firma y obtienen 4000 soles, mientras que el resto de las veces obtenían 1600 soles como beneficio. Lucio le ofrece un contrato A a Carolina, el cual indica que le pagará 1000 soles anualmente sin importar si fue un buen o mal año.

1. ¿Cuál es la actitud al riesgo de Lucio?
2. ¿Cuál es la actitud al riesgo de Carolina?
3. Sea B un contrato que paga 1500 soles a Carolina si es un buen año y nada si es malo. Muestre que B es mejor para Lucio y que Carolina es indiferente entre los contratos A y B.

Aversión al Riesgo: pregunta 4

En relación a la Aversión Absoluta al Riesgo (AAR) y la Aversión Relativa al Riesgo (ARR):

(a) Explique la diferencia entre la Aversión Absoluta al Riesgo (AAR) y la Aversión Relativa al Riesgo (ARR). ¿Cómo se definen matemáticamente y qué interpretación económica tienen?

(b) Considere dos individuos con funciones de utilidad $v_1(c)$ y $v_2(c)$. El primero muestra aversión absoluta al riesgo constante, mientras que el segundo muestra aversión relativa al riesgo constante. Derive las expresiones para $A(c)$ y $R(c)$ para cada uno.

(c) Suponga que un inversor tiene una función de utilidad $v(c;\theta) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$, donde $\theta \in (0,1)$ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo. Derive las expresiones de AAR y ARR para esta función de utilidad y explique cómo se relacionan entre sí. ¿Qué sucede con estas medidas a medida que la riqueza c aumenta?

(d) Calcule $\lim_{\theta \to 1} v(c;\theta)$.

Solución: recordemos que

$$AAR(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} \quad , \quad ARR(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)}.$$

v es la utilidad, v' es la utilidad marginal, y v'' mide que tan cóncava es la utilidad.

La aversión al riesgo está altamente ligada a la concavidad de la función de utilidad elemental v. Ante aversión al riesgo (concavidad), una pérdida de $\epsilon > 0$ no se compensa por una ganancia de ϵ.

Ahora bien, no usamos directamente $-v''(x)$, pues esta medida no es invariante por transformaciones lineales afines $av(x) + b$: si bien $10\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}$ guardan la misma esencia en cuanto a la aversión al riesgo, la primera tendrían un coeficiente $-v''$ mayor. Por ende, se introduce el coeficiente de Arrow-Pratt $AAR(x)$. En cuanto a la $ARR(x)$, el factor x sirve para ponderar por el nivel de riqueza.

Simplemente resolvemos la EDO (**primer orden, variables separables**)

$$-\frac{v_1''(x)}{v_1'(x)} = \gamma.$$

Obtenemos

$$v_1(x) = Ae^{-\gamma x} + C,$$

con A, B, γ constantes. En cuanto al segundo caso,

$$-x\frac{v_2''(x)}{v_2'(x)} = \rho.$$

Luego,

$$v(x) = \frac{Ax^{1-\rho}}{1-\rho} + B, \ \ \rho \neq 1.$$

Si $\rho = 1$, $v(x) = A \ln x + B$.

Un cálculo directo conlleva a $AAR = \frac{\theta}{c}$, $ARR = \theta$. Finalmente,

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} = \lim_{\theta \to 1} \frac{e^{(1-\theta)\ln c} - 1}{1 - \theta}.$$

Aplicando la **regla del Hospital** obtenemos lo deseado:

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{e^{(1-\theta)\ln c} - 1}{1 - \theta} = \ln c.$$

Aversión al riesgo: pregunta 5

Un individuo tiene una función de utilidad de Bernoulli $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $v(x) = x^a$. Analice en términos de $a > 0$ cuándo el individuo es adverso al riesgo.

Solución: $v'(x) = ax^{a-1}$, $v''(x) = a(a-1)x^{a-2}$.

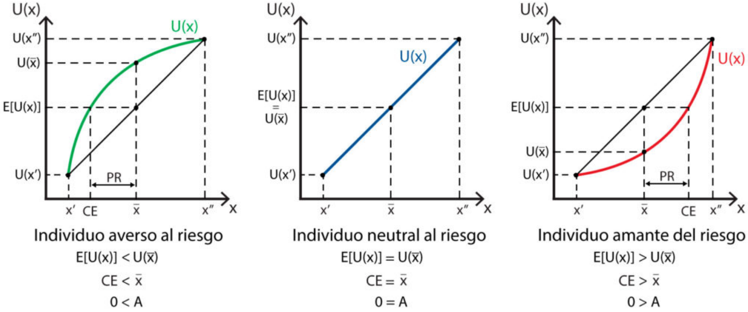

Figura Sacado de: aquí.

Lotería

Probar que, si M es una lotería (esto es, $M = \alpha L + (1-\alpha)L'$) entonces

$$U^e(M) = \alpha U^e(L) + (1-\alpha)U^e(L').$$

Sean $L = (p_1, \cdots, p_n)$, $L' = (p'_1, \cdots, p'_n)$:

$$\begin{aligned} U^e(M) &= \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha p_\ell + (1-\alpha) p'_\ell) u(x_\ell) \\ &= \alpha \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell u(x_\ell) + (1-\alpha) \sum_{\ell=1}^{n} p'_\ell u(x_\ell) \\ &= \alpha U^e(L) + (1-\alpha) U^e(L'). \end{aligned}$$

Ejercicio basado en la Clase 10

Riesgo múltiple

Un consumidor enfrenta dos riesgos y únicamente puede eliminar uno de ellos. Esto es: sea $\tilde{w} = w_1$ con probabilidad $p > 0$ y $\tilde{w} = w_2$ con probabilidad $1 - p$. Sea $\tilde{\epsilon} = 0$ si $\tilde{w} = w_2$, y, si $\tilde{w} = w_1$, entonces $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ con probabilidad $1/2$ y $\tilde{\epsilon} = -\epsilon$ con probabilidad $1/2$. Defina la prima por el riesgo π_v asociada a $\tilde{\epsilon}$ como el número tal que

$$\mathbb{E}[v(\tilde{w} - \pi_v)] = \mathbb{E}[v(\tilde{w} + \tilde{\epsilon})].$$

1. Demuestre que si $\epsilon \to 0$,
$$\pi_v = \frac{-\frac{1}{2} p v''(\tilde{w}_1)\epsilon^2}{p v'(w_1) + (1-p)v'(w_2)}. \tag{1}$$
Sugerencia: considere una expansión de Taylor de orden 1 para el término del lado izquierdo en (1), y de orden 2 para el término del lado derecho.
2. Sea $v_1(w) = e^{-aw}$ y $v_2(w) = e^{-bw}$. Calcule el coeficiente de Arrow-Pratt (AAR) de v_1 y v_2.
3. Suponga que $a > b$. Demuestre que si $p < 1$, existe un valor de $w_1 - w_2$ suficientemente grande para que $\pi_{v_2} > \pi_{v_1}$.

Seguimos la sugerencia:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[v(\tilde{w}-\pi_v)] &= pv(w_1-\pi_v)+(1-p)\pi(w_2-\pi_v) \\
&\simeq p(v(w_1)-v_1'(w_1)\pi_v)+(1-p)(v(w_2)-v'(w_2)\pi_v) \\
\mathbb{E}[v(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] &= p\cdot\frac{1}{2}[v(w_1-\epsilon)+v(w_1+\epsilon)]+(1-p)v(w_2) \\
&= p\left(v(w_1)+\frac{v''(w_1)\epsilon^2}{2}\right)+(1-p)v(w_2).
\end{aligned}
$$

Igualando las expresiones:

$$
\begin{aligned}
-(pv'(w_1) + (1-p)v'(w_2))\pi_v &\simeq \frac{1}{2}pv''(w_1)\epsilon^2 \\
\pi_v &\simeq \frac{-\frac{1}{2}pv''(w_1)\epsilon^2}{pv'(w_1) + (1-p)v'(w_2)}.
\end{aligned}
$$

Tenemos que los coeficientes de Arrow-Pratt son,

$$-\frac{v_1''}{v_1} = a, \quad -\frac{v_2''}{v_2} = b.$$

Dados $a > b$, queremos probar que para un valor de $w_1 - w_2$ suficientemente grande, $\pi_{v_2} > \pi_{v_1}$:

$$\underbrace{\frac{ae^{-aw_1}}{pe^{-aw_1} + (1-p)e^{-aw_2}} < \frac{be^{-bw_1}}{pe^{-bw_1} + (1-p)e^{-bw_2}}}\ \pi_{v_2} > \pi_{v_1}.$$

$$ape^{-w_1(a+b)} + a(1-p)e^{-(aw_1+bw_2)} < bpe^{-w_1(a+b)} + b(1-p)e^{-(aw_1+bw_2)}$$

lo cual implica que

$$(a-b)\frac{p}{1-p} < be^{a(w_1-w_2)} - ae^{b(w_1-w_2)}.$$

La derivada de $be^{a(w_1-w_2)} - ae^{b(w_1-w_2)}$ con respecto a $w_1 - w_2$ es

$$ab(e^{a(w_1-w_2)} - e^{b(w_1-w_2)}) > 0.$$

Así, para algún $w_1 - w_2$ suficientemente grande $\pi_{v_2} > \pi_{v_1}$.

Ejercicios avanzados no obligatorios

Considere una preferencia por el riesgo $\succeq$ que tiene una representación de utilidad esperada con una función de utilidad de Bernoulli continua y creciente v. Se pide probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $CE_{\succeq}(X) \leq \mathbb{E}[X]$ para cualquier variable aleatoria X, donde $CE_{\succeq}(X)$ es el equivalente de certeza, es decir, el valor seguro tal que el agente es indiferente entre recibir este valor o enfrentar la lotería X.
2. $RP_{\succeq}(X) \geq 0$ para cualquier variable aleatoria X, donde $RP_{\succeq}(X)$ es la prima de riesgo, es decir, la cantidad máxima que un individuo estaría dispuesto a pagar para eliminar el riesgo asociado a la lotería X.
3. $\displaystyle\int v(x)dF(x) \leq v\left(\int xdF(x)\right)$ para cualquier distribución F.
4. La función v es cóncava.

- $4 \rightarrow 3$ por la desigualdad de Jensen.
- $3 \rightarrow 2$ por la monotonía de $v(\cdot)$.
- $2 \rightarrow 1$ pues $v(\mathbb{E}[X] - RP) = v(CE)$.
- $1 \rightarrow 4$ por la monotonía de $v(\cdot)$ nuevamente y la definición de concavidad generalizada.

Problema del inversionista

Considere un inversionista con una riqueza inicial w. Existe un activo riesgoso que proporciona un retorno de z por cada dólar invertido. Sea F la función de distribución acumulativa (CDF) de z. Sea α la cantidad invertida en el activo riesgoso. Sea $v(\cdot)$ la utilidad elemental del inversionistas. Se le pide que:

1. Determine la utilidad esperada del inversionista.

$$U^e(\alpha) = \int v(w + \alpha(z-1))\, dF(z).$$

2. Derive la condición de primer orden para el nivel óptimo de inversión α^*.
3. Considere el caso en que el retorno neto esperado es no positivo, es decir, $\mathbb{E}[z] - 1 \leq 0$. Pruebe que, en este caso, la inversión óptima es $\alpha^* = 0$.
4. Considerar el caso en que el retorno neto esperado es positivo, es decir, $\mathbb{E}[z] - 1 > 0$. Pruebe que, en este caso, la inversión $\alpha = 0$ no es óptima.
5. Demostrar que si el inversionista tiene mayor aversión al riesgo, invertirá menos en el activo riesgoso. Para esto, considere dos inversionistas con funciones de utilidad Bernouilli v_1 y v_2, donde $v_1 = g \circ v_2$ con g cóncava y creciente. Muestre que el nivel óptimo de inversión α_1^* de v_1 es menor o igual al nivel óptimo de inversión α_2^* de v_2.

Solución: bajo supuestos razonables[1]

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

[1] $f(x,t)$, $f_x(x,t)$ continuas y $a(x)$, $b(x)$ continuamente diferenciables.

De este modo,

$$\frac{dU^e}{d\alpha} = \int v'(w + \alpha(z-1))(z-1)dz.$$

Luego,

$$\frac{dU^e}{d\alpha}(\alpha^*) = \int v'(w + \alpha(z-1))(z-1)dF(z) = 0.$$

Nota: U^e es cóncava en α pues $v(\cdot)$ lo es.

Si $\mathbb{E}[z] \leq 1$,

$$\int z dF(z) \leq 1.$$

O sea,

$$\frac{dU^e}{d\alpha} = \int v'(w+\alpha^*(z-1))(z-1)dF(z) = \int zv'(w+\alpha(z-1))dz - \int v'(w+\alpha(z-1))dF(z) = 0.$$

En $\alpha = 0$

$$\left.\frac{dU^e}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = v'(w)\left[\int zdF(z) - \int dF(z)\right] = v'(w)(\mathbb{E}[z]-1) \leq 0.$$

Si $\mathbb{E}[z] > 1$,

$$\left.\frac{dU^e}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = v'(w)\left[\int zdF(z) - \int dF(z)\right] = v'(w)(\mathbb{E}[z]-1) > 0.$$

Si $f'(x_0) \leq 0$, $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \leq x_0$. Por el contrario, si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \geq x_0$. De ahí se concluye, identificando $f(x) = U^e(\alpha)$ y $x_0 = \alpha^*$.

- Mientras más adverso al riesgo el individuo, menos invierte en el activo riesgoso.
- Vamos a probar esta intuición.
- Considere v_1 y v_2 de forma que $v_1 = g \circ v_2$, siendo g una transformación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente, diferenciable y cóncava. Además, sin pérdida de generalidad, supongamos que $g'(x = w) = 1$.[2]
- Entonces,

$$(z-1)u_1'(w + \alpha(z-1)) = (z-1)g'(w + \alpha(z-1))u_2'(w + \alpha(z-1)).$$

[2] Siempre se puede hacer esto pues $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Así,

$$u_1'(w+\alpha(z-1)) \geq u_2'(w+\alpha(z-1)) \Leftrightarrow z \leq 1.$$

$$[u_1'(w+\alpha(z-1)) - u_2'(w+\alpha(z-1))](z-1).$$

Por ende, usando la monotonía de la integral[3]

$$U_1'(\alpha) - U_2'(\alpha) = \int [u_1'(w+\alpha(z-1)) - u_2'(w+\alpha(z-1))](z-1)dF(z) \leq 0.$$

De este modo,

$$U_1'(\alpha_2^*) \leq \underbrace{U_2'(\alpha_2^*) = 0}_{=\text{por la condición de primer orden}}.$$

Como U_1 es decreciente en α_2^*, se debe tener que $\alpha_1^* \leq \alpha_2^*$.

[3] $f \leq g \implies \int f \leq \int g$

Gracias