PD 3 - Microeconomía Financiera

Marcelo Gallardo

PUCP

Setiembre 2024

Index

Sobre la PC1

- Resultados globalmente correcto.
- Objetivos: $+8$ (dentro del rango).
- PC2: equilibrio general con producción e incertidumbre.
- PD4: tarea para la PC2.

Resolución de la PC1

2×2

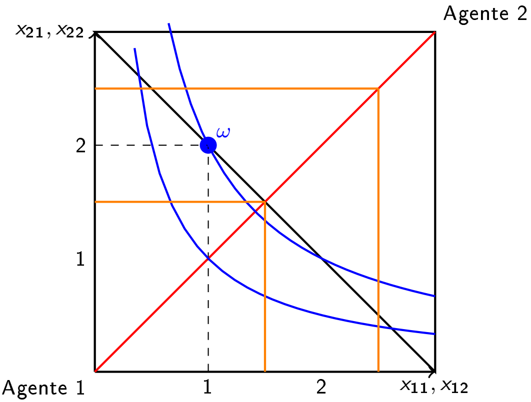
Considere una economia donde las preferencias y dotaciones de los consumidores son:

1. $u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}x_{21}$, $u_2(x_{12}, x_{22}) = \min\{x_{12}, x_{22}\}$, $\omega_1 = (1, 2)$ y $\omega_2 = (2, 1)$.

Se le pide que:

- Dibuje la caja de Edgeworth y situe la dotacion inicial.
- Dibuje algunas curvas de indiferencia para cada consumidor en la caja de Edgeworth (al menos 2 para cada uno).
- Determine el conjunto de asignaciones Pareto eficientes. **Tiene que expresarlo como conjunto.**
- Grafique el conjunto de asignaciones Pareto eficientes.
- Compute el ratio de precios en el (un) equilibrio Walrasiano. Puede dejar su respuesta aproximando a 1 decimal.

Caja de Edgeworth con Curvas de Indiferencia



Las asignaciones P.O. caen en la diagonal de la caja de Edgeworth. Esto es,

$$\mathcal{P} = \{(x_{11}, x_{21}) \in [0,3] \times [0,3] : \ x_{21} = x_{11}\}.$$

Luego, las demandas óptimas son

$$\begin{aligned} x_{11}^* &= \frac{p_1 + 2p_2}{2p_1} \\ x_{21}^* &= \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} \\ x_{12}^* &= \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2} \\ x_{22}^* &= \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Para encontrar el EW normalizamos p_1 y aplicamos la Ley de Walras que nos dice que basta equilibrar un mercado:

$$\frac{p_1 + 2p_2}{2p_1} + \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2} = 3.$$

Esto es, haciendo $p_1 = 1$

$$\frac{1 + 2p_2}{2} + \frac{2 + p_2}{1 + p_2} = 3.$$

$$1 + 2p_2 + \frac{4 + 2p_2}{1 + p_2} = 6$$

$$(1 + 2p_2)(1 + p_2) + 4 + 2p_2 = 6(1 + p_2)$$

$$1 + p_2 + 2p_2 + 2p_2^2 + 4 + 2p_2 = 6(1 + p_2)$$

$$2p_2^2 - p_2 - 1 = 0.$$

Resolviendo la cuadrática, obtenemos

$$p_2^* = 1.$$

Robinson Crusoe

Considere una economía Robinson Crusoe donde

$$u(\ell_o, C) = \ell_o^{1/4} c^{3/4}$$
$$f(\ell_t) = \sqrt{\ell_t}$$
$$\bar{\ell} = 24.$$

Recuerde que $\ell_t + \ell_o = \bar{\ell}$.

1. Resuelva el problema de forma centralizada.
2. Resuelva el problema desde el enfoque de mercado.

Robinson Crusoe

El problema centralizado es

$$\max_{0\leq \ell_t \leq 24} (24-\ell_t)^{1/4}(\ell_t)^{3/8}.$$

Aplicando CPO

$$\frac{72-5\ell_t}{8\ell_t^{5/8}(24-\ell_t)^{3/4}} = 0.$$

De este modo, $\ell_t^* = 72/5$, $\ell_0^* = 24 - 72/5$ y $c^* = \sqrt{72/5}$.

b) Aplicamos ahora el enfoque de mercado:

$$\max \Pi = p\sqrt{\ell_t} - w\ell_t$$
$$\text{s.a } 0 \leq \ell_t \leq 24.$$

La solución es interior por lo que, aplicando CPO

$$\ell_t^d = \frac{p^2}{4w^2}.$$

Robinson Crusoe

Luego, el problema del consumidor es

$$
\begin{aligned}
\max \ & \ell_o^{1/4} c^{3/4} \\
\text{s. a. } & pc + w\ell_o \leq 24w + \Pi^* \\
& c, \ell_o \geq 0,
\end{aligned}
$$

donde $\Pi^* = \frac{p^2}{4w}$. Entonces, dado que la utilidad es tipo Cobb-Douglas, rápidamente concluimos que

$$
\begin{aligned}
\ell_o^d &= \frac{1}{4} \frac{24w + p^2/4w}{w} \\
c_o^d &= \frac{3}{4} \frac{24w + p^2/4w}{p}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, haciendo $\ell_o^d + \ell_t^d = 24$, y normalizando $w = 1$, obtenemos

$$
p^* = 12\sqrt{\frac{2}{5}}.
$$

Reemplazando en las demandas, obtenemos el mismo resultado que en el enfoque centralizado.

Pareto

Se tiene una economía con dos agentes, Alice y Bob, cuyas funciones de utilidad son las siguientes:

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = x_A^1,$$

$$u_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^2.$$

Se sabe que $\omega_A + \omega_B = (\omega_A^1, \omega_A^2) + (\omega_B^1, \omega_B^2) = (3, 3)$, es decir, la dotación total de la economía consta de 3 unidades de x^1 y 3 unidades de x^2.

1. ¿Es la asignación dada por $\omega_A = (1, 2)$ y $\omega_B = (2, 1)$ Pareto eficiente? ¿Por qué? Justifique su respuesta.
2. ¿Es la asignación dada por $\omega_A = (3, 3)$ y $\omega_B = (0, 0)$ Pareto eficiente? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

Pareto

a) La asignación no es Pareto eficientes pues es posible mejorar la situación de al menos un agente sin empeorar al otro. En particular, si Alice intercambia una unidad de x_2 con Bob, ambos mejoran.

b) Lo mismo que en (a). Alice puede darle todo del bien x_2 a Bob sin bajar su utilidad, mientras que la de Bob aumenta.

Cobb-Douglas generalizada

Encuentre las demandas óptimas en una economía de intercambio puro con L bienes de consumo y N consumidores, donde cada consumidor $k = 1, \ldots, N$ tiene preferencias representadas por

$$u_k(x_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}},$$

$\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} = 1,\ \alpha_{\ell k} \in (0,1)$, y dotaciones $\omega_k > 0$. **No busque encontrar el equilibrio Walrasiano solo encuentre las demandas óptimas.**

Cobb-Douglas generalizada

Dos formas:

1. Por analogía.
2. Lagrange.

$$x_{\ell k} = \frac{\alpha_{\ell k}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_k)}{p_\ell}.$$

Formlamente, esto se deriva de la siguiente manera. Como las Cobb-Douglas satisfacen Inada, la solución es interior (condiciones de Inada)

$$L(x_k, \lambda) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}} + \lambda \left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell(\omega_{\ell k} - x_{\ell k}) \right].$$

Dado que las transformaciones estrictamente crecientes no afectan la utilidad (las funciones de utilidad representan una relación de preferencias, que al final de cuentas, es una relación de orden), poemos sacarle $\ln(\cdot)$ a $u(\cdot)$ para simplificar las operaciones. De este modo, nos queda

$$L(x_k, \lambda) = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} \ln(x_{\ell k}) + \lambda \left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell(\omega_{\ell k} - x_{\ell k}) \right].$$

Aplicando CPO

$$\frac{\alpha_{\ell k}}{x_{\ell k}} - \lambda p_\ell = 0, \ \forall \ \ell.$$

Luego,

$$\alpha_{\ell k} = \lambda p_\ell x_{\ell k}.$$

Sumando (aporovechanod que la suma de los coeficientes da 1)

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k}}_{=1} = \sum_{\ell=1}^{L} \lambda p_\ell x_{\ell k}.$$

De este modo, como

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_{\ell k} x_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{L} p_{\ell k} \omega_{\ell k}$$

se deduce que

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k}}$$

y por ende,

$$x_{\ell k} = \frac{\alpha_{\ell k} \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k}}{p_\ell}.$$

Resolución de la Tarea 1

Tarea 1

Considere una economía de Robinson Crusoe donde

$$
\begin{aligned}
u(\ell_o, c) &= \ell_o c \\
f(\ell_t) &= \ell_t, \ \bar{\ell} = 24.
\end{aligned}
$$

ℓ_t denota las horas trabajadas y ℓ_0 las horas de ocio.

1. Resuelva el problema de forma centralizada.
2. Resuelva el problema desde el enfoque de mercado.

Nota: va a tener que analizar 3 casos que vienen dados por la relación entre el salario w y el precio del bien de consumo p.

El problema centralizado es

$$\max_{0\leq \ell_o \leq 24} \{\ell_o(24-\ell_0)\}.$$

La CPO provee

$$24-\ell_o = 0 \implies \ell_o^* = 12.$$

De este modo, $\ell_t^* = 12 = c^*$.

El problema de mercado se resuelve empezando por el problema de la firma

$$\max_{0\leq \ell_t 24} \underbrace{pf(\ell_t) - w\ell_t}_{=(p-w)\ell_t}.$$

Si $p > w$, la firma demanda $\ell_t^* = 24$, pero esto no es definitivamente óptimo. En caso $w > p$, $\ell_t^* = 0$. Nuevamente, esto no es óptimo. De este modo, solo puede haber equilibrio si $p = w$. En dicho caso, $\Pi = 0$ y la demanda de la firma es $\ell_t^* \in (0, 24)$ - por determinar.
Finalmente, el problema del consumidor provee

$$\ell_o^d = \frac{24w}{2w} = 12$$
$$c^d = \frac{24w}{2p} = 12.$$

De este modo, $\ell_t^* = 12$.

Considere una economía con 2 sectores. El sector 1 produce x y el sector 2 produce y. Hay un factor de producción L (el empleo) y hay $\overline{L}$ unidades de este factor en la economía (la dotación). Se sabe que

$$\overline{L} = L_x + L_y$$
$$y = L_y^{1/2} x_y^{1/2}$$
$$x = L_x - x_y$$

donde L_x es la cantidad del insumo usada en la producción de x (en el mercado final), L_y es la cantidad del insumo usada en la producción de y (en el mercado final) y x_y es la cantidad de x que es usada en la producción de y (en el mercado final). Halle la frontera de producción.

Consideremos el caso general $y = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha}$. Al final reemplazamos con $\alpha = 1/2$. Para encontrar la frontera de producción resolvemos

$$\max\ y$$
$$\text{s.a.} x = \overline{x},$$

sabiendo que $\overline{L} = L_x + L_y$. El Lagrangiano asociado es

$$\mathcal{L} = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha} + \lambda(\overline{x} - L_x + x_y).$$

Esto es, usando las restricciones sobre el trabajo

$$\mathcal{L} = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha} + \lambda(\overline{x} + x_y - (\overline{L} - L_y)).$$

Las CPO son (ahora las variable de control L_y, x_y)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \alpha L_y^{\alpha-1} x_y^{1-\alpha} + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_y} = (1-\alpha) L_y^\alpha x_y^{-\alpha} + \lambda = 0.$$

De este modo,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_y}{L_y} = 1.$$

Como $\alpha = 1 - \alpha = 1/2$,

$$x_y = L_y = y.$$

De este modo, la FP es

$$2y + x = \overline{L}.$$

Considere una economía llamada Courcsant, que consiste en dos consumidores, dos bienes y una empresa. Los agentes consumen dos bienes: cristales kyber (x) y sables de luz (y). Sin embargo, los agentes solo tienen dotaciones iniciales de cristales kyber, $\omega_1 = (3, 0)$ y $\omega_2 = (2, 0)$ respectivamente. Por otro lado, la única empresa produce sables de luz con la siguiente tecnología $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0,\ y \leq \sqrt{-x}\}$. Además, las preferencias de los consumidores están representadas por $u_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1 y_1}$ y $u_2(x_2, y_2) = 2 \ln x_2 + \ln y_2$, respectivamente.

1. Con la información proporcionada, ¿la economía alcanza un equilibrio de Walras, o se requiere una condición adicional sobre la distribución de los derechos de propiedad sobre la empresa? Si es así, proponga una distribución $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\sum_{i=1}^{2} \theta_i = 1$.
2. Encuentre la función de demanda de insumos de la empresa para los cristales kyber (x^d), la función de oferta de la empresa (y^s) y las ganancias π^*.
3. Encuentre la función de demanda de cada consumidor.

Proponemos por simplicidad $\theta_1 = \theta_2 = 0.5$. La función de demanda de la firma por el insumo será denotado x^d y la oferta de la firma es y^s. El problema de optimización es

$$\max_{(x,y)} \ \Pi = p_x x + p_y y, \quad \text{s.a}: \ y \leq \sqrt{-x}, \ x \leq 0.$$

O sea, el problema de la firma se reduce a (la solución cicertamente se da en la frontera)

$$\max_{(x,y)} \ \Pi = p_x x + p_y \sqrt{-x}, \ \text{s.a} \ x \leq 0.$$

El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y \sqrt{-x} - \lambda x.$$

Las CPO proveen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies p_x - \frac{p_y (-x)^{-1/2}}{2} - \lambda = 0$$

y

$$\lambda x = 0.$$

Si $\lambda = 0$, $x < 0$. Si $\lambda > 0, x = 0$. Nos interesa solo el primer caso.

$$x^d = -\left(\frac{p_y}{2p_x}\right)^2$$

$$y^s = -\sqrt{x^d} = \frac{p_y}{2p_x}$$

$$\Pi^* = \frac{p_y^2}{4p_x}.$$

Con respecto a los consumidores, debemos resolver

$$\max_{x_i, y_i} \; u(x_i, y_i), \quad \text{s.a } p_x x_i + p_y y_i = p_x \omega_x + \theta_i \Pi^*.$$

Dado que las funciones de utilidad son tipo Cobb-Douglas

$$\begin{aligned}
x_1^d &= \frac{1}{2}\left(\frac{3p_x + \pi^*/2}{p_x}\right) \\
y_1^d &= \frac{1}{2}\left(\frac{3p_x + \pi^*/2}{p_y}\right) \\
x_2^d &= \frac{2}{3}\left(\frac{2p_x + \pi^*/2}{p_x}\right) \\
y_2^d &= \frac{1}{3}\left(\frac{2p_x + \pi^*/2}{p_y}\right).
\end{aligned}$$

Normalizando $p_x = 1$ y reemplazando la expresión de π,

$$
\begin{aligned}
x_1^d &= \frac{1}{2}(3/p_y + p_y/8) \\
y_1^d & \frac{1}{2}(3/p_y + p_y/8) \\
x_2^d &= \frac{2}{3}(2 + p_y^2/8) \\
y_2^d &= \frac{1}{3}(2/p_y + p_y/8).
\end{aligned}
$$

Finalmente, por motivos de conclusión, permítanos calcular el EW. Aplicando la ley de Walras para este contexto:

$$x_1^d + x_2^d + x^d - 5 = 0.$$

Esto conlleva a $p_y = 2.3$. De este modo,

$$(x_1^*, y_1^*) = (1.8, 0.8), \; (x_2^*, y_2^*) = (1.8, 0.4), \; x^d = 1.4, \; \text{y } y^s = 1.2.$$

PD3

En la economía de Tatooine hay dos mellizos, Gonzalo y Ana, cuyas funciones de utilidad, que dependen de su consumo de hamburguesas x y chompas y, son

$$u_G(x_G, y_G) = \frac{3}{4}\ln(x_G) + \frac{1}{4}\ln(y_G)$$
$$u_S(x_S, y_S) = \frac{1}{4}\ln(x_A) + \frac{3}{4}\ln(y_A).$$

Por otro lado, la producción de hamburguesas y chompas depende del capital K y el trabajo L. Las tecnología en cuestión son

$$x(L_x, K_x) = L_x^{0.5}K_x^{0.5}$$
$$y(L_y, K_y) = L_y^{0.5}K_y^{0.5}.$$

Se sabe que Gonzalo oferta $\overline{L}_G = 10$ y $\overline{K}_G = 60$, mientras que $\overline{L}_A = 15$ y $\overline{K}_A = 40$. O sea, $\overline{L} = 25$ y $\overline{K} = 100$.

1. Encuentre el equilibrio Paretiano de la producción y con ello, determine la frontera de posibilidades de producción.
2. Determine, en valor absoluto, la pendiente de la FPP. Interprete.
3. Gonzalo y Ana se pusieron de acuerdo de forma que produzcan $X = Y$. Luego, llegaron a la conclusión de que lo justo es que

$$x^G = 3x^S, \; y^G = y^A/3.$$

   Encuentre, dadas estas condiciones, el consumo los mellizos. Luego, provea la curva de contrato en el plano del consumo.

Igualamos las TMST

$$\frac{K_x}{L_x} = \frac{K_y}{L_y}.$$

Usando las dotaciones de los factores,

$$\frac{K_x}{L_x} = \frac{100 - K_x}{25 - L_x}$$
$$K_x = 4L_x.$$

Reemplazando en la función de producción,

$$X = L_x^{1/2} K_x^{1/2} = L_x^{1/2}(4L_x)^{1/2} \implies L_x = X/2.$$

Luego, respecto a la producción del bien y, como $L_x = 25 - L_y$ y $K_x = 100 - K_y$

$$K_y = 4L_y.$$

Reemplazando en la tecnología del bien y,

$$L_y = Y/2.$$

De este modo,

$$L_x + L_y = 25$$
$$\frac{X}{2} + \frac{Y}{2} = 25$$
$$Y = 50 - X.$$

El costo de oportunidad de producir una unidad adicional de Y es reducir la de X en 1. Luego, si $X = Y$, reemplazando en la FPP, $Y = 25$ y $X = 25$. Luego,

$$L_y = Y/2$$
$$L_x = X/2$$
$$L_y^* = 12.5 = L_x^*$$

Reemplazando e las curvas de contrato, encontramos que $K_x^* = K_y^* = 50$. Finalmente, determinamos el consumo de Gonzalo y Ana. Para ello, empleamos las hipótesis sobre los consumos

$$x^G + x^A = 25$$
$$y^G + y^A = 25$$
$$3x^A + x^A = 25 \implies x^A = 6.25$$
$$\frac{y^A}{3} + y^A = 25 \implies y^A = 18.75.$$

Automáticamente, deducimos que $x^G = 18.75$ y $y^G = 6.25$. Finalmente, la curva de contrato es (haciendo $TMS_G = TMS_A$)

$$y^G = \frac{25x^G}{225 - 8x^G}$$

Considere el siguiente modelos $2 \times 2 \times 2$

$$
\begin{aligned}
x &= L_x^{\theta} K_x^{\gamma}, \ \theta + \gamma < 1 \\
y &= L_y^{\alpha} K_x^{\beta}, \ \alpha + \beta < 1 \\
u_A(x_A, y_A) &= x_A^{\delta} y_A^{\mathbf{1}-\delta}, \ \delta \in (0,1) \\
u_B(x_B, y_B) &= x_B^{\epsilon} y_B^{\mathbf{1}-\epsilon} \\
\boldsymbol{\theta}_A &= (\theta_{Ax}, \theta_{Ay}) \\
\boldsymbol{\theta}_B &= (\theta_{Bx}, \theta_{By}) \\
\boldsymbol{\omega}_A &= (L_A, K_A) \\
\boldsymbol{\omega}_B &= (L_B, K_B).
\end{aligned}
$$

Dado que los rendimientos a escala son decrecientes, el procedimiento es el siguiente:

1. Minimizar el costo.
2. Usar la función de costo para maximizar el beneficio.
3. Derivar aplicando Hotelling la demandas por factores no condicionadas.
4. Limpiar los mercados de factores usando las dotaciones $\overline{L} = L_A + L_B$ y $\overline{K} = K_A + K_B$.
5. Obtener las demandas de los consumidores.
6. Despejar los precios usando las demandas y la oferta de las firmas.

Empecemos entonces por la minimziación del costo. El problema es

$$\min_{(L_x, K_x)} \quad wL_x + rK_x, \quad \text{s. a}: \; L_x^\theta K_x^\gamma = \overline{x}.$$

El Lagrangiano asociado es

$$\mathcal{L} = wL_x + rK_x + \lambda(\overline{x} - L_x^\theta K_x^\gamma).$$

Las CPO proveen

$$\frac{w}{r} = \frac{\theta}{\gamma}\frac{K_x}{L_x}.$$

Esto implica que

$$K_x = \frac{w\gamma}{r\theta}L_x.$$

De este modo, reemplazando en la restricción

$$K_x^\gamma L_x^\theta = \left(\frac{w\gamma}{r\theta}\right)^\gamma L_x^\gamma = \overline{x}.$$

Despejando para L_x,

$$L_x^d = \overline{x}^{\frac{1}{\gamma+\theta}} \left(\frac{r\theta}{w\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}}.$$

Así

$$
\begin{aligned}
K_x^d &= \left(\frac{w\gamma}{r\theta}\right)\left(\frac{r\theta}{w\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} x^{\frac{1}{\gamma+\theta}} \\
&= \left(\frac{w\gamma}{r\theta}\right)^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}} \overline{x}^{\frac{1}{\gamma+\theta}}.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la función de costos:

$$
\begin{aligned}
C(w,r,\theta,\gamma,\overline{x}) &= wL_x^d + rK_x^d \\
&= \left(w\left[\frac{r\theta}{w\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + r\left[\frac{w\gamma}{r\theta}\right]^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}}\right)\overline{x}^{\frac{1}{\gamma+\theta}} \\
&= \left(w^{1-\frac{\gamma}{\gamma+\theta}}\left[\frac{r\theta}{\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + r^{1-\frac{\theta}{\gamma+\theta}}\left[\frac{\gamma w}{\theta}\right]^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}}\right)\overline{x}^{\frac{1}{\gamma+\theta}} \\
&= \left[w^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}}\left(\frac{r\theta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + r^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}}\left(\frac{\gamma w}{\theta}\right)^{\frac{\theta}{\theta+\gamma}}\right]\overline{x}^{\frac{1}{\gamma+\theta}}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, para la segunda firma,

$$C(w, r, \alpha, \beta, \overline{y}) = \left[w^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}} \left(\frac{r\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} + r^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} \left(\frac{\beta w}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \overline{y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Continuamos la exposición con el mercado del factor x. La situación para y es anĺoga. La firma maximiza su beneficio

$$\pi_x = p_x x - \tilde{C} x^{\frac{1}{\theta+\gamma}},$$

donde

$$\tilde{C} = \left[w^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}} \left(\frac{r\theta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + r^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} \left(\frac{\gamma w}{\theta} \right)^{\frac{\theta}{\theta+\gamma}} \right].$$

Dado que

$$\frac{\partial^2 \pi_x}{\partial x^2} = -\left(\frac{1-\gamma-\theta}{\gamma+\theta}\right) x^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{\gamma+\theta}} < 0,$$

la CPO es suficiente. Esta última provee

$$x^s = \left(\frac{\gamma+\theta}{\tilde{C} p_x}\right)^{\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}}.$$

De este modo,

$$\pi_x(w, r, p_x, p_y, \gamma, \theta) = \left[\frac{\gamma+\theta}{\tilde{C}}\right]^{\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}} p_x^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{1-\gamma-\theta}} - \tilde{C}\left(\frac{\gamma+\theta}{\tilde{C} p_x}\right)^{\frac{1}{1-\gamma-\theta}}.$$

Por la simetría del problema,

$$\pi_y(w, r, p_x, p_y, \alpha, \beta) = \left[\frac{\beta+\alpha}{\tilde{D}}\right]^{\frac{\beta+\alpha}{1-\beta-\alpha}} p_x^{\frac{1-2(\beta+\alpha)}{1-\beta-\alpha}} - \tilde{D}\left(\frac{\alpha+\beta}{\tilde{D} p_x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}},$$

con

$$D = \left[w^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}\left(\frac{r\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} + r^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right].$$

hora sí, aplicamos el Lema de Hotelling para determinar L_x^{nc} y K_x^{nc}. Tenemos

$$L_x^{nc} = -\frac{\partial \pi_x}{\partial w}$$
$$K_x^{nc} = -\frac{\partial \pi_x}{\partial r}.$$

El único término en π que depende de w y r es $\tilde{C}$. Por ende, lo que debemos determinar es

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}, \frac{\partial \tilde{C}}{\partial r}.$$

Derivando obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} = \frac{\theta}{\theta+\gamma} w^{-\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} \left[\left(\frac{r\theta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + r^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} \left(\frac{\gamma}{\theta}\right)^{\frac{\theta}{\theta+\gamma}} \right]$$
$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial r} = \frac{\gamma}{\gamma+\theta} r^{-\frac{\theta}{\gamma+\theta}} \left[w^{\frac{\theta}{\theta+\gamma}} \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\theta}} + \left(\frac{\gamma w}{\theta}\right)^{\frac{\theta}{\theta+\gamma}} \right].$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial w} = -\left(\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}\right)\tilde{C}^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{1-\gamma-\theta}}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(\gamma+\theta)^{\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}}p_x^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{1-\gamma-\theta}} + \frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}\tilde{C}^{-\frac{1}{1-\gamma-\theta}}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}\left(\frac{\gamma+\theta}{p_x}\right)$$

Factorizando,

$$L_x^{nc} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}\left(\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}\right)\left[\tilde{C}^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{1-\gamma-\theta}}(\gamma+\theta)^{\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}}p_x^{\frac{1-2(\gamma+\theta)}{1-\gamma-\theta}} - \tilde{C}^{-\frac{1}{1-\gamma-\theta}}p_x^{-\frac{1}{1-\gamma-\theta}}(\gamma+\theta)^{\frac{1}{1-\gamma-\theta}}\right]$$

Los cálculos son análogos para K_x^{nc}. Con respecto a L_y, K_y, basta reemplazar θ por α y γ por β. Finalmente, se resuelve

$$L_x^{nc} + L_y^{nc} = L_A + L_B$$
$$K_x^{nc} + K_y^{nc} = K_A + K_B.$$

Con esto, obtenemos w (normalizamos $r = 1$). Finalmente,

$$x_A^d = \frac{\delta}{p_x}[\theta_{Ax}\pi_x + \theta_{Ay}\pi_y + wL_A + K_A]$$
$$y_A^d = \frac{1-\delta}{p_y}[\theta_{Ax}\pi_x + \theta_{Ay}\pi_y + wL_A + K_A]$$
$$x_B^d = \frac{\epsilon}{p_x}[\theta_{Bx}\pi_x + \theta_{By}\pi_y + wL_B + K_B]$$
$$y_B^d = \frac{1-\epsilon}{p_y}[\theta_{Bx}\pi_x + \theta_{By}\pi_y + wL_B + K_B].$$

Finalmente, resolvemos para p_x y p_y haciendo

$$x_A^d + x_B^d = \left(\frac{\gamma+\theta}{\tilde{C}p_x}\right)^{\frac{\gamma+\theta}{1-\gamma-\theta}}$$
$$y_A^d + y_B^d = \left(\frac{\beta+\alpha}{\tilde{D}p_y}\right)^{\frac{\beta+\alpha}{1-\beta-\alpha}}.$$

Analíticamente, no es para nada trivial resolver el sistema. Sin embargo, numéricamente es viable. Invitamos reemplazar con:

$$\theta_{ij} = \delta = \epsilon = 1/2, \quad \theta = 1/3, \gamma = 1/4, \;\alpha = 1/4, \;\beta = 1/3$$

y usar métodos numéricos (biesección, Newton) para resolver las ecuaciones. Sin embargo, con tecnologías CES para coeficientes dados, es más sencillo: ver separata $2 \times 2 \times 2$.

Incertidumbre (introducción)

Alejandro visita a su enamorada en un barrio con alto índice de inseguridad. Tras ver Avengers Endgame, debido a la duración de la película, se da cuenta de que ya son la 1:00 a.m. y decide pedir un taxi para regresar a casa. Alejandro tiene dos opciones: pedir un Uber, cuyo costo es de 50 soles, o tomar un taxi de la calle, que cuesta 20 soles. Alejandro estima que existe una probabilidad de 50% de ser asaltado si toma un taxi de la calle, mientras que esta probabilidad se reduce al 5% si utiliza un Uber. En caso de ser asaltado, Alejandro perdería los 200 soles que lleva consigo.

1. ¿Cuáles son las loterías entre las cuales Alejandro debe elegir?
2. Calcule el valor esperado de cada lotería.
3. Discusión: ¿qué opción escogerían ustedes y por qué?

1) Las loterías son

$$L_1 = (1/2, 1/2)$$

asociada a los pagos $(-20, -220)$. La otra es

$$L_1 = (0.95, 0.05)$$

asociada a los pagos $(-50, -250)$.

2) Los valores esperados son -120 y -60.

Considere las siguientes funciones[1]:

1. $u_1(x) = \ln(\ln x)$
2. $u_2(x) = \ln x$
3. $u_3(x) = \sqrt{x}$
4. $u_4(x) = x$
5. $u_5(x) = x^2$
6. $u_6(x) = e^x$
7. $u_7(x) = e^{x^2}$
8. $u_8(x) = e^{e^x}$.

Calcula la primera y segunda derivada de cada función.

[1] Como veremos más adelante, estas corresponden a funciones de utilidad tipo Bernouilli y juegan un rol crucial en la teoría de la incertidumbre.

Aplicar:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = g'(x)f'(g(x)),$$

con $f, g \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$. Puede computarse todo fácilmente en Wolfram Alpha.

Gracias