Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas

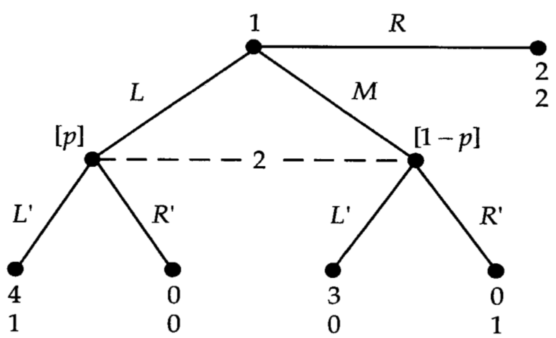
29 de noviembre de 2024

Práctica Dirigida 9
FIN 203

Profesor: José Gallardo
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

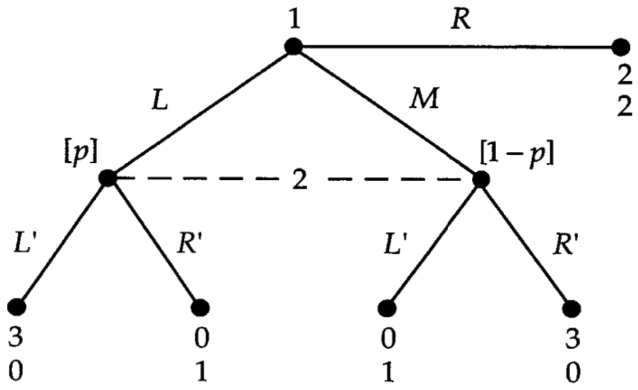
Juegos Dinámicos con Información Incompleta

Ejercicio 1. Considere el siguiente juego (Gibbons 1992):



Derive la forma normal, encuentre los equilibrios de Nash (del juego estático asociado) y los EBPS (Equilibrio Bayesiano Perfecto en Subjuegos), puras.

Ejercicio 2. Demuestre que en el siguiente juego (Gibbons 1992) no existe un equilibrio Bayesiano perfecto en estrategias puras. Encuentre un equilibrio Bayesiano perfecto en **estrategias mixtas**.



Signaling

Ejercicio 3. Suponga que hay dos tipos de individuos cuya productividad es independiente de su educación:

1. Grupo H con productividad 3.

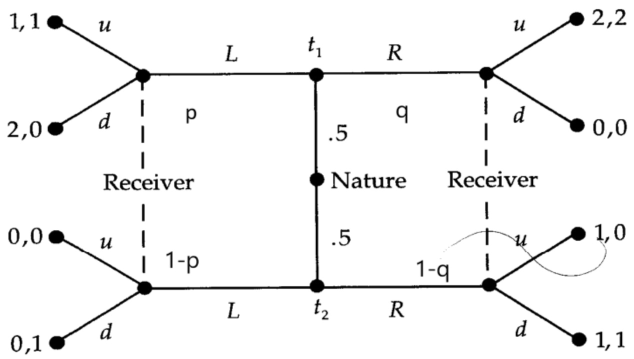
2. Grupo L con productividad 2.

Se sabe que el grupo H representa un tercio de la población. Los trabajadores de ambos grupos pueden continuar con sus estudios a cierto costo. La cantidad de educación y es una variable continua y completamente confiable (mediante diploma). Los individuos del tipo L se enfrentan a un costo mayor para continuar con sus estudios que los del tipo H, de forma que $C_L(y) = y$, $C_H(y) = y/2$. Los empleadores consideran que cualquier individuo con nivel de educación menor a $y^* \geq 0$ tiene productividad 2, por lo que les ofrecen un salario igual a 2, mientras que cualquier individuo con un nivel de educación mayor o igual a y^* tiene una productividad de 3, y por ende, se le ofrece un salario igual a 3. Responda lo siguiente:

1. ¿Qué valores de y^* dan lugar a un equilibrio separador?

2. Imagine que ya no es posible educarse, por lo que $y = 0$ para todo individuo. Suponga además que a todos se les ofrece el mismo salario, que será la productividad media de la población. ¿Habría una mejora en el sentido de Pareto?

Ejercicio 4. Encuentre todos los equilibrios separadores EBP y agrupadores en estrategias puras.



Selección adversa

Ejercicio 5. Considere el siguiente mercado de autos usados, similar al de Akerlof, donde la calidad de los autos está dada por $x \in [0,1]$. Un auto de calidad x es valorado en x por el comprador y en $v(x)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua, estrictamente creciente, tal que $v(x) \leq x$ para todo x. Si la densidad de las calidades es $f(x)$, determine el equilibrio bajo las siguientes condiciones:

a) Los compradores y vendedores conocen la calidad de cada auto.

b) Ni los compradores ni los vendedores conocen la calidad de cada auto.

c) Si f es una distribución uniforme en $[0,1]$ y $v(x) = x^2$, y solo los vendedores conocen la calidad del auto.

Ejercicio 6. Considere un mercado de autos donde la calidad máxima disponible es $Q = 1{,}9$, y la distribución de q es uniforme con $a = 0$ y $b = Q$. Un auto de calidad q es valorado por el comprador como máximo en q, y por el vendedor en q/Q. Se asume que existen suficientes compradores para que las ganancias del intercambio se concentren del lado del vendedor. Dado que $q/Q < q$, el comprador asigna un mayor valor al auto que el vendedor, lo que permite a ambas partes comerciar el auto a un precio p entre q/Q y q, generando un beneficio para el vendedor y un excedente para el comprador. En particular, si un auto de calidad q se intercambia a un precio p, el comprador obtiene una utilidad:

$$u(p,q) = q - p,$$

mientras que el vendedor obtiene un beneficio de:

$$\pi(p,q,Q) = p - \frac{q}{Q}.$$

a) Calcule el valor esperado para el comprador, suponiendo que existe información asimétrica.

b) Basándose en la parte anterior, calcule el punto de corte para los autos ofrecidos por el vendedor, el precio asociado y sus beneficios.

c) Calcule la valoración de los autos por parte del comprador y del vendedor bajo condiciones de información perfecta.

d) Si un comprador anticipa el intervalo donde no se ofrecerán autos, determine el nuevo valor esperado de los autos ofrecidos y la decisión del vendedor. ¿Qué ocurre con los nuevos precios y los beneficios del vendedor?

Riesgo moral

Ejercicio 7. Suponga una relación principal-agente donde hay dos posibles resultados, valorados en $50,000$ y $25,000$ dólares. El agente debe elegir entre dos niveles posibles de esfuerzo. La distribución de probabilidades sobre los resultados como función de los niveles de esfuerzo se da en la siguiente tabla:

	25,000	50,000
e_1	$1/4$	$3/4$
e_2	$1/2$	$1/2$

Suponga que el principal es neutral al riesgo y que el agente es adverso al riesgo, con preferencias descritas por las siguientes funciones:

$$B(x, w) = x - w,$$

$$U(w, e) = 2\sqrt{w} - g(e),$$

donde $g(e_1) = 40$ y $g(e_2) = 20$. El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u} = 120$.

a) Escriba los contratos óptimos bajo información simétrica para cada nivel de esfuerzo y los beneficios obtenidos por el principal en cada caso. ¿Qué nivel de esfuerzo prefiere el principal?

b) Escriba los contratos óptimos cuando existe un problema de riesgo moral. ¿Cuál es el nivel de esfuerzo y el contrato elegido por el principal?

Ejercicio 8 (I. Segal and S. Tadelis, ECON 206 UCB). Considere un problema estándar de riesgo moral con las siguientes características:

- El principal (p) y el agente (a) son ambos neutrales al riesgo. Sea x el resultado verificable, e el esfuerzo no observado del agente, y $w(x)$ el pago al agente. Los niveles finales de utilidad de las dos partes están dados por:

  $$u_p = x - w(x), \quad u_a = w(x) - v(e),$$

  donde $v(\cdot)$ es una función estrictamente creciente del esfuerzo.

- El agente tiene una riqueza limitada, lo que restringe al principal a ofrecer esquemas de incentivos tales que $w(x) > 0$ para todo x. Esta restricción garantiza que el agente esté dispuesto a trabajar para el principal (no se necesita una restricción adicional de participación).

- El resultado x puede tomar tres valores: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y $x_3 = 3$. El esfuerzo puede tomar dos valores: $e_0 = 0$ y $e_1 = 1$. Normalice $v(0) = 0$.
- La probabilidad de x dado e, denotada $\pi(x \mid e)$, satisface la Propiedad de Razón de Verosimilitud Monótona:

$$\frac{\pi(x_j \mid e=1)}{\pi(x_j \mid e=0)} > \frac{\pi(x_{j-1} \mid e=1)}{\pi(x_{j-1} \mid e=0)} \quad \text{para } j = 2, 3.$$

Suponga que una solución de segundo mejor para este problema induce al agente a elegir e_1. Demuestre que en tal solución $w(x_1) = w(x_2) = 0$, y $w(x_3) > 0$.