Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas

21 de noviembre de 2024

Práctica Dirigida 8
FIN 203

Profesor: José Gallardo
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

Juegos Estáticos con Información Incompleta

Definition 1. La representación de un juego Bayesiano con n jugadores es:

$$G = \{A_1, \cdots, A_n, \Theta_1, \cdots, \Theta_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_n\}. \tag{1}$$

Luego, decimos que las estrategias $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ conforman un equilibrio de Nash bayesiano en estrategias puras si, para cada jugador i y para cada tipo de i, $\theta_i \in \Theta_i$, $s_i^*(\theta_i)$ resuelve

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} u_i(s_1^*(\theta_1), \cdots, s_{i-1}^*(\theta_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(\theta_{i+1}), \cdots, s_n^*(\theta_n); \theta) p_i(\theta_{-i}|\theta_i).$$

Ejercicio 1. *Gibbons 1992.* Considere un duopolio de Cournot operando en un mercado donde la función inversa de demanda es $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. Ambas firmas tienen un costo total[1] $c_i(q_i) = cq_i$, pero la demanda es incierta: es alta $(a = a_H)$ con probabilidad θ y baja $(a = a_L)$ con probabilidad $1 - \theta$. Más aún, la información es asimétrica: la firma 1 conoce si es que la demanda es alta o baja, pero la firma 2 no. Todo esto es de conocimiento público. Las dos firman escogen simultáneamente las cantidades que venden. Responda lo siguiente:

1. ¿Cuál es el espacio de estrategias de las firmas?

2. Proponga supuestos sobre los parámetros a_H, a_L, θ y c, de forma que las cantidades de equilibrio sean positivas.

[1] El parámetro c es estrictamente positivo.

3. ¿Cuál es el equilibrio Nash Bayesiano de este juego?

Solución: la firma 1 busca maximizar

$$\pi_1 = (p-c)q_1 = (a_i - c - q_1 - q_2)q_1.$$

La CPO provee

$$q_1 = \frac{a_i - c - q_2}{2} = \begin{cases} \frac{a_H - c - q_2}{2} & \text{si } a_i = a_H \\ \frac{a_L - c - q_2}{2} & \text{si } a_i = a_L. \end{cases}$$

Con respecto a la firma 2, dado que solo conoce la distribución de probabilidades,

$$q_2 = \frac{\theta a_H + (1-\theta)a_L - c - q_1}{2}.$$

Reemplazando en esta expresión con $\mathbb{E}[q_1] = \frac{\theta a_H + (1-\theta)a_L - c - q_2}{2}$, obtenemos

$$q_2 = \frac{\theta a_H + (1-\theta)a_L - c}{3}.$$

Así, la firma 1 produce, para cada escenario,

$$\begin{aligned} q_1^H &= \frac{(3-\theta)a_H - (1-\theta)a_L - 2c}{6} \\ q_1^L &= \frac{(2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6}. \end{aligned}$$

Para asegurar las positividad de las cantidades ofertadas, debe tenerse que

$$\begin{aligned} q_2 &\geq 0 \\ \theta a_H + (1-\theta)a_L - c &\geq 0 \\ \theta &\geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L}. \end{aligned}$$

Como $\theta \leq 1$, $a_H \geq c$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} q_1^L &\geq 0 \\ (2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c &\geq 0 \\ \theta &\leq 2\frac{a_L - c}{a_H - a_L}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} q_1^H &\geq 0 \\ \theta &\leq \frac{3a_H - a_L - 2c}{a_H - a_L}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Gibbons 1992.* Considere el siguiente modelo del duopolio de Bertrand bajo asimetría de la información. La demanda de la firma i es $q_i(p_i, p_j) = a - p_i - b_i p_j$. Los costos son iguales a cero para las dos firmas. El coeficiente b_i es una variable aleatoria con soporte $\{b_L, b_H\}$, $b_L < b_H$ y distribución de probabilidades $(\theta, 1-\theta)$. Cada firma conoce su coeficiente de sensibilidad b_i pero no el del otro.

1. Determine el espacio de acciones, tipos creencias y pagos de este juego.
2. Encuentre un equilibrio simétrico Nash Bayesiano en estrategias puras.

Solución: las estrategias son los precios que ofertan. Las dos firmas tiene el mismo tipo de información. Luego, los beneficios (pagos) de la firma 1 están dados por

$$\pi_1 = (p_1 - c_1)q_1 = (p_1 - c)(a - p_1 - b_1 p_2)$$

La CPO provee

$$p_1 = \frac{a - b_1 p_2}{2} = \frac{a - b_1[\theta p_H + (1-\theta)p_L]}{2}.$$

Si $b_1 = b_H$,

$$p_H = \frac{a - b_H[\theta p_H + (1-\theta)p_L]}{2} \implies p_H = \frac{a - (1-\theta)b_H p_L}{2 + \theta b_H}.$$

Si $b_1 = b_L$,

$$p_L = \frac{a - b_L[\theta p_H + (1-\theta)p_L]}{2} = \frac{a - \theta b_L p_H}{2 + b_L(1-\theta)}.$$

De este modo,

$$p_H = \frac{a - (1-\theta)\left[\frac{a - \theta b_L p_H}{2 + (1-\theta)b_L}\right]}{2 + \theta b_H}$$

$$p_H = \frac{a + a(1-\theta)b_L + \theta a}{4 + 2\theta b_H + 2(1-\theta)b_L + \theta(1-\theta)b_H b_L - (1-\theta)\theta b_L}$$

De forma análoga se computa p_L. Por simetría, terminamos.

Ejercicio 3. Dos participantes hacen apuestas en una subasta de primer precio (FPA). El participante $i = 1, 2$ tiene una valoración $\tilde{v}_i$ por el objeto a subastarse. En este caso, $\tilde{v}_i$ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[c, d]$, donde $0 < c < d$. Compruebe que es un equilibrio Bayesiano de Nash que ambos participantes utilicen la estrategia dada por

$$\beta^*(v) = \frac{c + v}{2},$$

para todo $v \in [c, d]$.

Solución: queremos comprobar que la estrategia

$$\beta^*(v) = \frac{c + v}{2}$$

es un equilibrio Bayesiano de Nash en una subasta de primer precio con dos participantes. El participante i gana si su oferta b_i supera la del oponente j:

$$b_i \geq \beta^*(v_j).$$

Dado que $v_j \sim U[c,d]$ y $\beta^*(v_j) = \frac{c+v_j}{2}$, entonces $\beta^*(v_j)$ se distribuye uniformemente en $[c, \frac{c+d}{2}]$. La probabilidad de ganar es:

$$\Pr(b_i \geq \beta^*(v_j)) = \Pr(v_j \leq 2b_i - c).$$

La probabilidad acumulada de v_j es:

$$\Pr(v_j \leq 2b_i - c) = \frac{2b_i - c - c}{d - c} = \frac{2b_i - 2c}{d - c}.$$

La utilidad esperada del participante i es:

$$U_i(b_i; v_i) = \Pr(b_i \geq \beta^*(v_j)) \cdot (v_i - b_i).$$

Sustituyendo la probabilidad:

$$U_i(b_i; v_i) = \frac{2b_i - 2c}{d - c} \cdot (v_i - b_i).$$

Derivamos $U_i(b_i; v_i)$ respecto a b_i:

$$\frac{\partial U_i}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i} \left[\frac{2b_i - 2c}{d - c} \cdot (v_i - b_i) \right].$$

Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial U_i}{\partial b_i} = \frac{1}{d - c} \left[2(v_i - b_i) + (2b_i - 2c)(-1) \right].$$

Simplificando:

$$\frac{\partial U_i}{\partial b_i} = \frac{1}{d - c} \left[2v_i - 2b_i - 2b_i + 2c \right].$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial b_i} = \frac{1}{d - c} \left[2v_i - 4b_i + 2c \right].$$

Igualamos a cero:

$$2v_i - 4b_i + 2c = 0.$$

Resolviendo para b_i:

$$4b_i = 2v_i + 2c,$$

$$b_i = \frac{c + v_i}{2}.$$

Ejercicio 4. Considere una subasta de primer precio, sobre cerrado, en el cual las valoraciones de los individuos son iid $U[0,1]$. Muestre que si hay n apostadores, entonces $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$ es un equilibrio Nash Bayesiano simétrico.

Solución: el postor i realiza una oferta b. Gana si y solo si las valoraciones de todos los rivales están por debajo de $[b^*]^{-1}(b)$[2]. Dado que V es una variable aleatoria continua y b^* es estrictamente creciente, los empates tienen probabilidad cero. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}\rho(b) &= \mathbb{P}\{b^*(V_j) < b, \ \forall\, j \neq i\} \\ &= \mathbb{P}\{V_j < \sigma(b), \ \forall\, j \neq i\}, \ \ \sigma(\cdot) = [b^*]^{-1}(\cdot) \\ &= F(\sigma(b))^{n-1}.\end{aligned}$$

En el equilibrio, b debe ser la mejor respuesta a las estrategias de oferta de los rivales, es decir, b resuelve:

$$\max_{b \geq 0} \underbrace{\rho(b)(v-b)}_{\text{probabilidad de ganar por ganancia neta}}.$$

Por lo tanto, la condición de primer orden (FOC) lleva a:

$$\rho'(b)(v-b) - \rho(b) = 0. \tag{2}$$

Dado que $\sigma(0) = 0$ (una valoración de 0 oferta 0) y $v = \sigma(b)$[3], (2) se convierte en:

$$(n-1) f(\sigma(b))(\sigma(b) - b)\sigma'(b) - F(\sigma(b)) = 0, \tag{3}$$

donde $F' = f$. Dado que $F(\sigma(b)) = \sigma(b)$ y $f(\sigma(b)) = 1$, (3) se simplifica a:

$$(n-1)(\sigma(b) - b)\sigma'(b) - \sigma(b) = 0 \Leftrightarrow \sigma'(b) = \frac{\sigma(b)}{(\sigma(b) - b)(n-1)}.$$

Con la condición inicial $\sigma(0) = 0$, usando la suposición $\sigma(b) = Cb$,

$$\sigma(b) = \frac{n}{n-1} b.$$

Finalmente,

$$b^*(v) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v,$$

y

$$\overline{P}_D = \mathbb{E}[b^*(V_{(n)})] = \frac{n-1}{n} \underbrace{\mathbb{E}[V_{(n)}]}_{\frac{n}{n+1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Usamos que

$$F_{V_{(n)}}(x) = [F_V(x)]^n = x^n \implies f_{V_{(n)}}(x) = n x^{n-1},$$

[2] El inverso existe porque b^* es estrictamente creciente.
[3] σ indica la valoración que genera la oferta b.

por lo que

$$\mathbb{E}[V_{(n)}] = \int_0^1 x(nx^{n-1})dx = n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{n}{n+1}.$$

Ejercicio 5. Annie y Billy deben decidir si se provee o no un bien público. La utilidad de cada uno de ellos sin el bien público es 0. Esto es de conocimiento público. Por otro lado, el beneficio individual cuando la provisión ocurre es información privada. Esto es, $i = A, B$ considera que los beneficios que $j \neq i$ deriva de la provisión del bien público es una variable aleatoria $\tilde{\theta}_j$ independiente e idénticamente distribuida con una función de distribución F y soporte $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Esta función de distribución es estrictamente creciente, con función de densidad f. Además, ambos Annie y Billy conocen su propio beneficio: $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

El bien público se provee si al menos uno de ellos se compromete a cubrir el costo c asociado con este bien, donde $0 \leq \underline{\theta} < c < \overline{\theta}$. Cuando $i = A, B$ se compromete a cubrir el costo, su utilidad es $\theta_i - c$, independientemente de si el otro individuo se compromete a cubrir el costo del bien público. Si el bien público se provee y i no se compromete a cubrir su costo, su utilidad es simplemente θ_i. Si nadie se compromete a cubrir el costo del bien público, éste no se provee y la utilidad de cada individuo es cero.

a) Describan esta situación como un juego Bayesiano donde Annie y Billy tienen sólo dos acciones posibles: comprometerse a cubrir el costo c, o no comprometerse (estamos asumiendo que este compromiso es final).

b) Definan el beneficio esperado de $i = A, B$ cuando este individuo se compromete a cubrir el costo del bien público ($a_i = 1$) y cuando decide no hacerlo ($a_i = 0$).

c)) Muestren que, independientemente de qué estrategia use el jugador j, al jugador i le conviene proveer el bien público si y solo si su tipo es mayor o igual a cierta cota.

d) Encuentre el equilibrio Bayesiano simétrico de este juego (esto es, encuentren el equilibrio donde Annie y Billy utilizan la misma estrategia), asumiendo adicionalmente que F es la distribución uniforme en el intervalo $[\underline{\theta}, \overline{\theta}] = [0, 1]$.

a) Recordemos que un juego Bayesiano queda completamente caracterizado por

$$\Gamma = \{\mathscr{I}, \{A_i\}, \{u_i\}, \Theta, \mu\}$$

donde

1. $\mathscr{I}$ es el conjunto de jugadores
2. $\{A_i\}$ es el conjunto de acciones disponibles para cada jugador
3. $\{u_i\}$ son las funciones de utilidad
4. Θ los tipos[4]

[4] $\Theta = \prod_{i=1}^{I} \Theta_i$.

5. μ la función de probabilidad definida sobre Θ.

En este caso $\mathscr{F} = \{\text{Annie}, \text{Billy}\} \triangleq \{A, B\}$,

$$\{A_i\} = \{\text{cubrir el costo } c, \text{no cubrir el costo } c\},$$

las funciones de utilidades son de tipo lineal y separables: $u_i(\theta_i) = \theta_i - c$ (en caso se cubra el costo)[5] Finalmente, solo hay un tipo de individuo: $\Theta = \{\theta\}$ (o sea $\theta_1 = \theta, \theta_2 = \theta_1 = \theta$) y $\mu(\tilde{\theta}_i = \theta) = 1$. Para poder hacer más amena la redacción, denotemos

$$\{A_i\} = \{\text{cubrir el costo } c, \text{no cubrir el costo } c\} = \{0, 1\}$$

y así,

$$\begin{aligned} s_i(\theta_i) = 1 &\implies u_i = \theta_i - c \\ s_i(\theta_i) = 0 &\implies u_i = \theta_i \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} + 0 \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 0\}. \end{aligned}$$

b) Ahondemos en el último punto. Si el individuo i decide proveer el bien público, independientemente de lo que decida $j \neq i$, su utilidad será

$$\underbrace{u_i(\theta_i) = \theta_i - c}_{=U_i(1, s_j | \theta_i)}.$$

Ahora bien, en caso no decida proveer el bien público, hay dos opciones, o bien $j \neq i$ si lo provee, o bien no. Así pues, su utilidad en dicho caso será

$$\underbrace{u_i = \theta_i \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} + 0 \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 0\}}_{=U_i(0, s_j | \theta_i)}$$

donde

$$\underbrace{\mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\}}_{\text{probabilidad de que el jugador } j \text{ escoja asumir el costo}}$$

donde $\tilde{\theta}_j : \Omega \to [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, $s_j : \Theta_j \to A_j$ la estrategia del individuo j que depende de su tipo.

c) Un breve comentario, notemos que en autarquía, la situación es sencilla y se invierte cuando $\theta_i \geq c = \theta^a$ (cota). Ahora bien, en el caso que nos interesa, nuestro objetivo es analizar cómo responde i óptimamente a la estrategia de s_j. En concreto, i invierte cuando

$$\underbrace{\theta_i - c}_{=U_i(1, s_j | \theta_i)} \geq \underbrace{\theta_i \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\}}_{=U_i(0, s_j | \theta_i)}.$$

[5] De forma más general, $u = u(a, \theta_i)$ con $a \in \prod_{i=1}^{I} A_i$ y, para este caso las acciones posibles son cubrir el costo y no cubrir el costo (por cada agente 2 opciones) y por ende $|A| = 2^2 = 4$.

Despejando
$$\theta_i \geq \frac{c}{1 - \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\}}.$$
Acá un aspecto técnico importante, $\mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} \neq 1$ pues, en dicho caso, no podemos tener la desigualdad

$$\theta_i - c = \theta_i \cdot \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\}. \tag{4}$$

En efecto, si $\mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} = 1$, (4) se torna

$$\theta_i - c \geq \theta_i \implies c \leq 0 \Rightarrow\Leftarrow .$$

De este modo, obtenemos la cota $\underline{\theta}_i$

$$\underbrace{\theta_i \geq \frac{c}{1 - \mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\}} = \underline{\theta}_i}_{\text{depende solamente de la medida de un evento en el } \sigma-\text{álgerba de } \Omega \text{ y } c} \quad . \tag{5}$$

Debido a (5) tenemos

$$\mathbb{P}\{s_i(\tilde{\theta}_i) = 1\} = \mathbb{P}\{\tilde{\theta}_i \geq \underline{\theta}_i\} = 1 - \underbrace{\mathbb{P}\{\tilde{\theta}_i < \underline{\theta}_i\}}_{=\mathbb{P}\{\tilde{\theta}_i \leq \underline{\theta}_i\}} = 1 - F(\underline{\theta}_i).$$

Como el problema es simétrico, el agente j hace el mismo cálculo:

$$\mathbb{P}\{s_j(\tilde{\theta}_j) = 1\} = \mathbb{P}\{\tilde{\theta}_j \geq \underline{\theta}_j\} = 1 - \underbrace{\mathbb{P}\{\tilde{\theta}_j < \underline{\theta}_j\}}_{=\mathbb{P}\{\tilde{\theta}_j \leq \underline{\theta}_j\}} = 1 - F(\underline{\theta}_j).$$

Estamos haciendo uso del hecho que $\{\omega \in \Omega : \tilde{\theta}_j = b\}$ tiene medida nula según la medida $\mathbb{P}$ (pues según la medida Lebesgue un punto tiene medida nula). Así pues, volviendo a (5)
$$\theta_i \geq \frac{c}{F(\underline{\theta}_j)} = \underline{\theta}_i. \tag{6}$$

d) En caso la distribución sea la uniforme sobre $[\underline{\theta}, \overline{\theta}] = [0, 1]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1dx = x, \ \forall\ x \leq \overline{\theta} = 1.$$

De este modo, la cota queda
$$\underline{\theta}_i = \frac{c}{F(\underline{\theta}_j)} = \frac{c}{\underline{\theta}_j}.$$

Puesto que se busca equilibrio Bayesiano simétrico, o sea que Billy y Annie tengan la misma estrategia, se ha de tener[6] $\underline{\theta}_i = \underline{\theta}_j$:

$$\underline{\theta}_i = \frac{c}{\underline{\theta}_i} \implies \underline{\theta}_i^2 = c \implies \underline{\theta}_A = \underline{\theta}_B = \underline{\theta} = \sqrt{c} = c^{1/2}.$$

De este modo, el equilibrio Bayesiano son el par de estrategia (s_1^*, s_2^*)

$$s_A^*(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_A \geq \underline{\theta} \\ 0, & \text{si } \theta_A < \underline{\theta}. \end{cases}, \; s_B^*(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_B \geq \underline{\theta} \\ 0, & \text{si } \theta_B < \underline{\theta}. \end{cases} \tag{7}$$

[6]Note que de la Ecuación 7, la condición para que A y B usen la misma estrategia es justamente que $\underline{\theta}_A = \underline{\theta}_B$.

Propuestos

Ejercicio 6. *Osborne 1995.* Dos personas se ven involucradas en una discusión acalorada. La persona 1 no está seguro si la persona 2 es fuerte o débil, por lo que le asigna una probabilidad $\alpha \in [0,1]$ de ser fuerte. La persona 2 está completamente informada. Cada persona puede luchar físicamente contra la otra o evitar la confrontación. Considere los siguientes pagos en función de la acción tomada y la fuerza de la persona 2:

- Si una persona evita la confrontación, su pago es 0, independientemente de la decisión que tome la otra persona.
- Si la persona decide luchar pero su oponente decide evitar la confrontación, el pago es 1.
- Si ambos deciden luchar, los pagos son $(-1,1)$ si la persona 2 es fuerte y $(1,-1)$ si la persona 2 es débil.

Formule esta situación como un juego Bayesiano y encuentre su equilibrio Nash Bayesiano para los casos $\alpha < 1/2$ y $\alpha > 1/2$.

Ejercicio 7. *Gibbons 1992.* Encuentre todos los equilibrios Nash-Bayesianos en estrategias puras del siguiente juego Bayesiano:

1. La naturaleza escoge si los pagos son la Tabla 1 o la 2

	L	R
L	(1, 1)	(0, 0)
R	(0, 0)	(0, 0)

	L	R
L	(0, 0)	(0, 0)
R	(0, 0)	(2, 2)

2. El jugador 1 sabe qué escogió la naturaleza pero el jugador 2 no.
3. El jugador 1 escoge L o R y el jugador 2 también, simultáneamente.
4. Se realizan los pagos.

Ejercicio 8. *Mas-Colell, Whinston & Green.* Considere un modelo de duopolio lineal del tipo Cournot. Dos empresas, 1 y 2, escogen simultáneamente las cantidades de producto que se disponen a vender en un mercado. El precio unitario está determinado por la función inversa de demanda

$$P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2).$$

El costo unitario de las dos empresas es $0 < c < a$. No hay costos fijos.

1. Encuentren el equilibrio de Nash de este juego. Supongan ahora que el costo unitario es información privada. Cada firma puede tener un costo bajo c_L o un costo alto c_H, donde $0 < c_L < c_H < a$. La probabilidad de que la firma $i = 1, 2$ tenga un costo bajo es $\delta \in (0, 1)$.
2. Representen esta situación como un juego Bayesiano.
3. Encuentren el equilibrio Bayesiano.