FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

SOLUCIONARIO PRÁCTICA DIRIGIDA 2

Microeconomía Financiera
Semestre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de práctica: Marcelo M. Gallardo Burga y Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

---

1 Eficiencia y teoremas del bienestar

Ejercicio 1.1. Enuncie el 1er Teorema del Bienestar.

El 1TB establece que, si las preferencias de los consumidores son localmente no saciadas[1], entonces toda asignación del Equilibrio Walrasiano es un Óptimo de Pareto. La prueba es por contradicción y se encuentra en, por ejemplo, Echenique (2005).

Ejercicio 1.2. Enuncie el 2do Teorema del Bienestar.

El 2TB tiene varios enunciados. La más común es: si las preferencias son convexas[2], continuas[3], estrictamente monótonas, una asignación óptima en el sentido de Pareto puede ser obtenida en el equilibrio general bajo una apropiada redistribución de dotaciones (uso de transferencias). La prueba de este teorema es sustancialmente más difícil. Véase nuevamente Echenique (2005).

Ejercicio 1.3. Imagine una economía de intercambio compuesta por dos individuos A y B. Las preferencias de estos individuos se representan por las siguientes funciones de utilidad:

$$u_A(x_A, y_A) = x_A y_A^{1/2}$$
$$u_B(x_B, y_B) = x_B^{1/2} y_B.$$

Las dotaciones son $\omega_1 = (100, 0)$ y $\omega_2 = (0, 150)$.

[1] Dado $x \in \mathbb{R}^L_+$ y $\epsilon > 0$, siempre existe $y \in B(x;\epsilon)$ tal que $y \succ x$.
[2] $\forall\ x, y, z \in X \subset \mathbb{R}^L_+$ y $\theta \in [0,1]$ con $x \succeq z, y \succeq z$, $\theta x + (1-\theta)y \succeq z$.
[3] Dadas dos sucesiones $x_n, y_n \in \mathbb{R}^L_+$ con $x_n \succeq y_n$ tales que $x_n \to x, y_n \to y$, se cumple que $x \succeq y$.

- Encuentre y caracterice el conjunto de Pareto.
- Calcule el equilibrio Walrasiano de esta economía dadas las dotaciones iniciales indicadas en el enunciado. Muestre que la asignación encontrada pertenece al conjunto de Pareto. Vincule esto con el 1er Teorema del Bienestar.
- Escoja cualquier otro punto del conjunto de Pareto, e indique una forma de llegar a él a través del equilibrio competitivo, proponiendo transferencias entre los individuos que lo hagan posible. Vincule esto con el 2do Teorema del Bienestar.

Para encontrar las asginaciones P.O. podemos usar el resultado $TMS_A = TMS_B$ pues las funciones de utilidad se prestan para ello. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{u_{x_A}}{u_{y_A}} &= \frac{u_{x_B}}{u_{y_B}} \\
\frac{2y_A}{x_A} &= \frac{y_B}{2x_B} \\
\frac{2y_A}{x_A} &= \frac{150 - y_A}{2(100 - x_A)} \\
y_A &= \frac{150x_A}{400 - 3x_A}.
\end{aligned}$$

Luego, las demandas son (identificando la estructura Cobb-Douglas)

$$\begin{aligned}
x_A^* &= \frac{2}{3}\frac{100p_x}{p_x} \\
y_A^* &= \frac{1}{3}\frac{100p_x}{p_y} \\
x_B^* &= \frac{1}{3}\frac{150p_y}{p_x} \\
y_B^* &= \frac{2}{3}\frac{150p_y}{p_y}.
\end{aligned}$$

Aplicando la Ley de Walras:

$$\frac{200}{3} + 50\frac{p_y}{p_x} = 100 \implies \frac{p_y}{p_x} = \frac{2}{3}.$$

Reemplazando en las demandas:

$$\begin{aligned}
x_A^* &= \frac{200}{3} \\
y_A^* &= 50 \\
x_B^* &= \frac{100}{3} \\
y_B^* &= 100.
\end{aligned}$$

Notamos con facilidad que pertenece al conjunto de Pareto, por lo que se verifica el 1TB: las preferencias cumplen las hipótesis del 1TB; monotonía implica localmente no saciadas: tome $y = x + \frac{\epsilon}{2L}\mathbf{1}$.

Consideremos por ejemplo $x_A = 50 \implies y_A = 30$, asignación Pareto Eficiente. El objetivo es determinar transferencias de forma que esta asignación sea el nuevo E.W. Ha de tenerse que $x_B = 50$ y por ende $y_B = 120$.

$$\begin{aligned}
T_A &= p_x \Delta x_A + p_y \Delta y_A \\
&= \left(50 - \frac{200}{3}\right) \cdot \underbrace{1}_{=p_x} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{=p_y} (30 - 50) \\
&= -30 \\
T_B &= 30.
\end{aligned}$$

Nota técnica:

Definición. Un equilibrio Walrasiano con transferencias es una tupla (x, p, T), donde $x \in \mathbb{R}_+^{IL}$, $p \in \mathbb{R}_+^L$ (un vector de precios) y $T = (T_i)_{i=1}^I \in \mathbb{R}^I$ (un vector de transferencias netas), tal que:

(i) para todo $i = 1, \ldots, I$, $x_i \in B(p, M_i)$, y $x_i' \in B(p, M_i) \Rightarrow x_i \succeq x_i'$, donde $M_i = p \cdot \omega_i + T_i$ (los consumidores optimizan escogiendo x_i en sus conjuntos presupuestarios);

(ii) $\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i$ (la demanda es igual a la oferta);

(iii) $\sum_{i=1}^I T_i = 0$ (las transferencias netas están balanceadas).

Teorema (Segundo Teorema del Bienestar). Sea $\mathcal{E} = (\succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I$ un óptimo de Pareto en el cual cada preferencia $\succeq_i$ es fuertemente monótona, convexa y continua. Si x^* es una asignación de Pareto óptima en la que $\sum_{i=1}^I x_i^* > 0$, entonces existe un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}_+^L$ y transferencias $T = (T_i)_{i=1}^I$ tal que (x^*, p^*, T) es un equilibrio Walrasiano con transferencias.

2 Economía Robinson-Crusoe

Ejercicio 2.1. Consideremos una economía Robinson Crusoe donde

$$\begin{aligned}
u(\ell_o, c) &= \ell_o^2 c \\
f(\ell_t) &= \sqrt{\ell_t},\ \overline{\ell} = 10.
\end{aligned}$$

ℓ_t denota las horas trabajadas y ℓ_0 las horas de ocio.

1. Resolver el problema de forma centralizada.
2. Resolver el problema desde el enfoque de mercado.
3. **Ejercicio adicional:** considere luego $u(\ell_0, c) = \ell_0^{1/2} + c^{1/2}$ y $f(\ell_t) = \sqrt{\ell_t}$. Tome nuevamente $\overline{\ell} = 10$.

1) El problema centralizado es el siguiente:

$$\begin{cases} \max & u(\ell_o, c) = \ell_o^2 c \\ \text{s.a.} & c = f(\ell_t) = \sqrt{\ell_t} \\ & \ell_t + \ell_o = \underbrace{\bar{\ell}}_{=10} \\ & \ell_t, \ell_o, c \geq 0. \end{cases}$$

Es sencillo notar que en el óptimo, $\ell_o, \ell_t, c > 0$. Por ende, aplicamos CPO a

$$L(\ell_o, c, \lambda) = \underbrace{\ell_o^2 c}_{=u(\ell_o,c)} + \lambda \left(\underbrace{f(\ell_t)}_{=f(\bar{\ell}-\ell_o)} - c \right).$$

Obtenemos aplicando la regla de la cadena:

$$\underbrace{\frac{2\ell_o c}{\ell_o^2}}_{\partial_\ell u / \partial_c u} = -\frac{d}{d\ell_0}(f(\bar{\ell} - \ell_o)) = f'(\ell_t) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\ell} - \ell_o}}.$$

Teniendo en cuenta que $c = f(\bar{\ell} - \ell_o) = \sqrt{10 - \ell_o}$, resolvemos para ℓ_o

$$\begin{aligned} \frac{2\ell_o\sqrt{10 - \ell_o}}{\ell_o^2} &= \frac{1}{2\sqrt{10 - \ell_o}} \\ \frac{2(10 - \ell_o)}{\ell_o} &= \frac{1}{2} \\ 4(10 - \ell_o) &= \ell_o \\ 40 &= 5\ell_o \\ \ell_o &= 8. \end{aligned}$$

Así pues, la solución al problema centralizado es: $\ell_t^* = 2$, $\ell_o^* = 8$ y $c^* = \sqrt{2}$.

2) Ahora resolvemos el problema desde el enfoque de mercado. En esta formulación se tiene por un lado Consumidor S.A.C. y el Consumidor. La firma resuelve:

$$\begin{aligned} \max & \left\{ \underbrace{pc - w\ell_t}_{=\text{beneficios}} \right\} \\ c &= f(\ell_t) \\ \ell_t, c &\geq 0. \end{aligned}$$

Incorporando la restricción de la tecnología:

$$\max_{\{\ell_t \geq 0\}} \left\{ p\sqrt{\ell_t} - w\ell_t \right\}.$$

Aplicando condiciones de primer orden (dado que la función es estrictamente cóncava sobre $\mathbb{R}_+$) obtenemos:

$$\underbrace{\frac{p}{2\sqrt{\ell_t}} - w = 0}_{f'(\ell_t^d) = w/p}.$$

Despejando ℓ_t:
$$\ell_t^d = \frac{p^2}{4w^2}.$$
De este modo, $c_o = \frac{p}{2w}$ y $\Pi^* = \frac{p^2}{4w}$. Incorporando esta información en el problema del consumidor llegamos a:
$$\begin{cases} \max & u(\ell_o, c) = \ell_o^2 c \\ \text{s.a.} & pc + w\ell_o = \underbrace{w\bar{\ell} + \Pi^*}_{=10w + \frac{p^2}{4w}} \\ & 0 \leq \ell_o \leq \bar{\ell} \\ & 0 \leq c. \end{cases}$$
Por los argumentos expuestos previamente, las condiciones de optimalidad coinciden con las condiciones de primer orden del Lagrangiano
$$\mathscr{L}(\ell_o, c, \lambda) = u(\ell_o, c) + \lambda(\Pi^* + w\bar{\ell} - pc - w\ell_o).$$
Esto provee
$$\frac{2\ell_o c}{\ell_o^2} = \frac{w}{p}.$$
Despejando c :
$$c = \frac{w\ell_o}{2p}. \tag{1}$$
Reemplazando 1 en la restricción presupuestaria llegamos a
$$\begin{aligned} p\left[\frac{\ell_o w}{2p}\right] + w\ell_o &= 10w + \Pi^* \\ \frac{\ell_o w}{2} + w\ell_o &= 10w + \Pi^* \\ \frac{3w\ell_o}{2} &= 10w + \Pi^* \\ \ell_o &= \frac{20}{3} + \frac{p^2}{6w^2}. \end{aligned}$$
Esto nos genera una ecuación en el ratio de precios p/w:
$$\frac{20}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{p}{w}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p}{w}\right)^2 = 10.$$
Despejando p/w, llegamos al ratio[4]:
$$\frac{p}{w} = \sqrt{8}. \tag{2}$$
Reemplazando 2 en $\ell_o = \frac{20}{3} + \frac{p^2}{6w^2}$ y luego el valor numérico de ℓ_o en 1 obtenemos $\ell_o = 8$, $\ell_t^d = 2$ y $c = \sqrt{2}$. Como es de esperarse, las soluciones coinciden.

[4]Nuevamente, podríamos normalizar $p = 1$, lo que importa en este contexto es el ratio, la tasa de intercambio.

Ejercicio 2.2. Supongamos que Acemoglu es un náufrago que vive en una isla y puede recolectar manzanas con una tecnología dada por $y = 4\ell_t^{1/2}$. Su función de utilidad es $u(y, \ell_o) = 2y\ell_o$, donde ℓ_t es el número de horas trabajadas y ℓ_o es el número de horas de ocio. Sabemos que tiene 24 horas disponibles cada día para recolectar manzanas o descansar.

a) Formule el problema del consumidor especificando las variables de control (optimización).

b) Encuentre el consumo óptimo de Acemoglu (manzanas y ocio). ¿Cuál es la ganancia que obtiene Acemoglu como productor y cuál es el nivel de bienestar que alcanza como consumidor?

c) ¿Cuál es el precio relativo sombra de ambos bienes?

El problema de la firma es

$$\begin{aligned} &\max\ p_y y - w\ell_t \\ &\text{s. a } y = 4\ell_t^{1/2}. \end{aligned}$$

O sea, buscamos maximizar

$$\Pi = 4p_y\ell_t^{1/2} - w\ell_t.$$

Las condiciones de Inada aseguran una solución interior por lo que aplicar CPO es suficiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \ell_t} &= 4p_y^{-1/2} - w = 0 \\ \ell_t &= \frac{4p_y^2}{w^2} \\ y^s &= \frac{8p_y}{w} \\ \Pi^* &= \frac{4p_y^2}{w}. \end{aligned}$$

Luego, el problema de Acemoglu (como consumidor) es

$$\begin{aligned} &\max\ u(y, \ell_0) = 2y\ell_o \\ &\text{s. a. } p_y y + w\ell_0 = 24w + \Pi^*. \end{aligned}$$

Por ende, aplicando CPO a

$$\mathscr{L}(y, \ell_0, \lambda) = 2y\ell_0 + (24w + \Pi^* - p_y y - w\ell_0)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y^d &= \frac{1}{2}\frac{24 + \Pi^*}{p_y} \\ \ell_0 &= \frac{1}{2}\frac{24w + \Pi^*}{w} \\ \ell_t &= 24 - \ell_0 = \frac{24 - \Pi^*}{2w}. \end{aligned}$$

Asiendo $O = D$ (oferta igual a demanda),

$$\begin{aligned} y^s &= y^d \\ \frac{8p_y}{w} &= \frac{24w + \frac{4p_y^2}{w}}{2p_y} \\ 16p_y^2 &= 24w^2 + 4p_y^2 \\ 12p_y^3 &= 24w^2 \\ \frac{p_y}{w} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando el ratio de precios en ℓ_t, y^s, ℓ_0, y^d y $u(\cdot,\cdot)$, concluimos.

3 Economías con producción

Ejercicio 3.1. Considere una economía con dos bienes, dos consumidores (Obi-Wan y Palpatine) y una empresa (Sereno). Obi-Wan tiene preferencias representadas por $u_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1 y_1}$, con dotación inicial $\omega_1 = (1, 0)$ y $\theta_1 = 0.3$. Palpatine tiene preferencias cuasilineales $u_2(x_2, y_2) = x_2 + \ln(y_2)$, con dotación inicial $\omega_2 = (2, 0)$ y $\theta_2 = 0.7$. Por otro lado, la tecnología de la empresa es

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq \frac{Ax}{x-1} \right\}$$

donde $A > 0$ es un factor de productividad.

1. Encuentre la función de oferta de Sereno.
2. Encuentre la correspondencia de demanda de Obi-Wan y Palpatine. Obtenga el equilibrio Walrasiano.
3. Estudie el efecto del factor de productividad A sobre el ratio de precios.

1) La firma resuelve

$$\begin{aligned} \max \quad & \underbrace{p}_{=(p_x,p_y)} \cdot (x, y) \\ \text{s.a. } & (x, y) \in Y. \end{aligned}$$

Grafiquemos el conjunto Y para $A = 2$

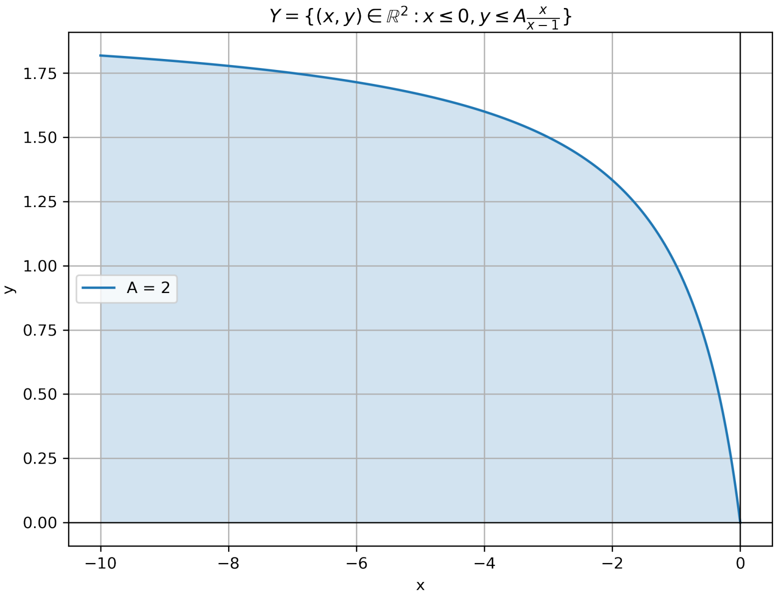

Figure 1: Tecnología.

Dada la geometría de Y: conjunto convexo pues es el hipógrafo de una función cóncava: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$, para $x \leq 0$, siendo $f(x) = \frac{Ax}{x-1}$, la firma va a optimizar en ∂Y (la frontera). Así, tendremos

$$\max \left\{ \underbrace{p_x x + \frac{Ap_y x}{x-1}}_{=\Pi} \right\}$$
$$\text{s.a. } x \leq 0.$$

Notar que el problema tendrá solución diferente de $x = 0$ para una cierta configuración de parámetros por determinar. El Lagrangiano asociado al problema es

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = p_x x + \frac{Ap_y x}{x-1} + \lambda(-x).$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker[5] proveen

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = p_x - \frac{Ap_y}{(x-1)^2} - \lambda = 0$$
$$\lambda(-x) = 0.$$

$$x^d = \begin{cases} 0, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} \leq 1 \\ 1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} > 1. \end{cases}$$

[5]Dada la estricta concavidad en x sobre el dominio considerado serán suficientes.

Luego, respecto a la oferta de la firma, ciertamente si $x^d = 0$, $y^O = 0$. Hay que analizar entonces el otro caso:

$$\begin{aligned}
y^O &= \frac{Ax^d}{x^d - 1} \\
&= \frac{A\left(1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}\right)}{1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} - 1} \\
&= A - \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$A - \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}} > 0$$

cuando $\sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} > 1$.

De este modo,

$$y^O = \begin{cases} 0, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} \leq 1 \\ A - \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}}, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} > 1. \end{cases}$$

Finalmente, calculamos el beneficio de la firma. Cuando $\sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} > 1$:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \underbrace{p_y y^O + p_x x^d}_{I-C} \\
&= p_x\left(1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}\right) + p_y\left(A - \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}}\right) \\
&= Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_x p_y}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\Pi = \begin{cases} 0, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} \leq 1 \\ Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_x p_y}, & \text{si } \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} > 1. \end{cases}$$

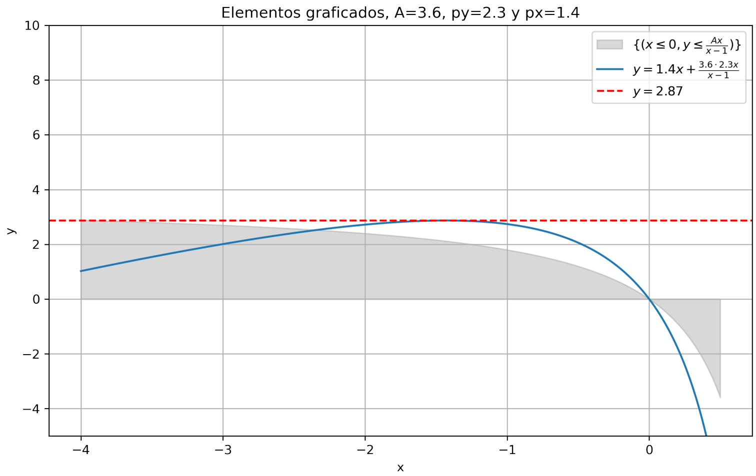

Figure 2: Tecnología, Π y su valor máximo usando la ecuación $\Pi^* = Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_xp_y}$.

Note que para que la resolución tenga sentido, es necesario tener $\sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} - 1 > 0$. La siguiente figura ilustra esta situación:

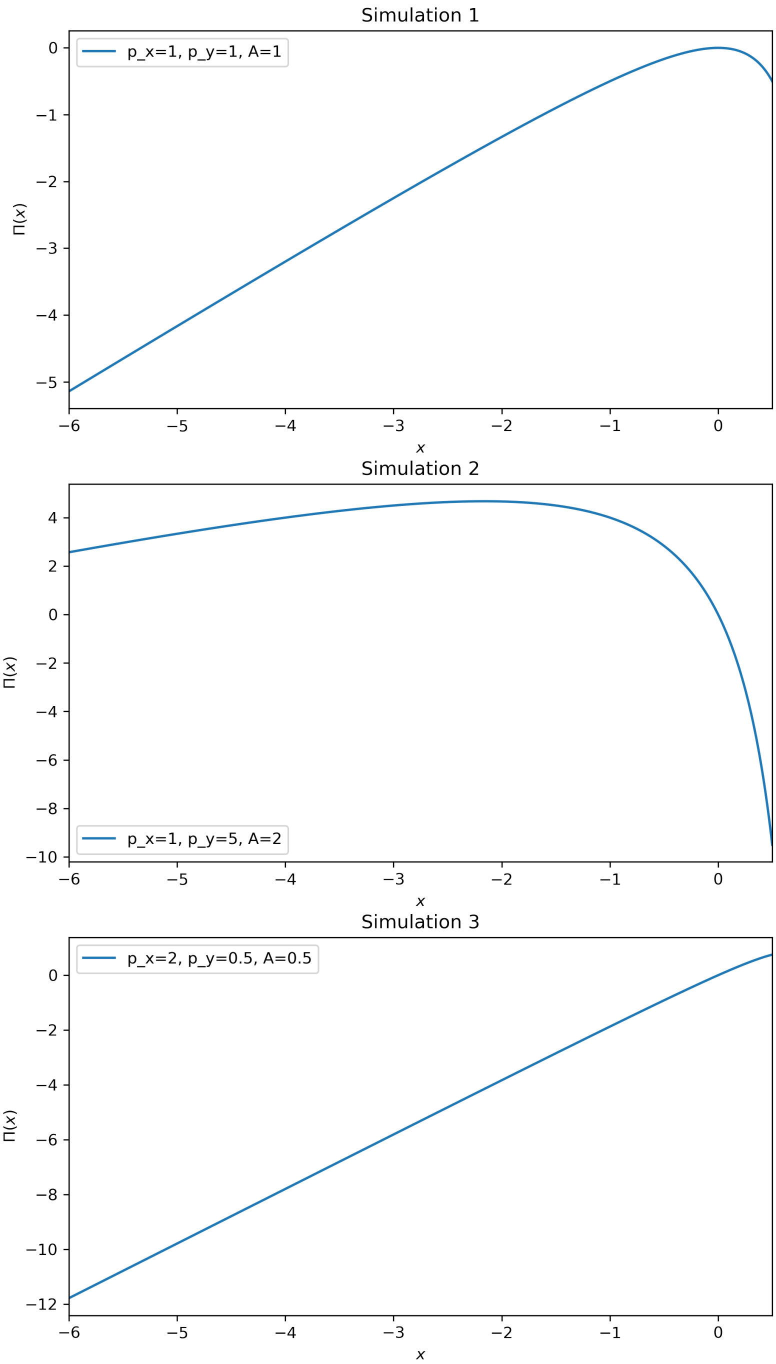

Figure 3: Diferentes parámetros.

En la primera configuración de parámetros (Figura 3), se maximiza en $x = 0$. En la segunda simulación, $x^* < 0$, mientras que en la tercera $x^* > 0$ (como esto último es inviable, por lo que $x^* = 0$).

2) Para encontrar las funciones de demanda de los consumidores resolvemos para cada uno

$$\begin{aligned}
&\max\ u^i(x) \\
&s.a.\ px \leq p\omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \underbrace{p \cdot y^j(p)}_{\Pi_j^*} \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

En este caso, para el primer consumidor tenemos

$$\begin{aligned}
&\max\ \sqrt{x_1 y_1} \\
&s.a.\ p_x x_1 + p_y y_1 \leq p_x + 0.3\Pi \\
&x_1, y_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Dada la no saciabilidad local y condiciones de Inada, aplicamos Lagrange (no KKT). Definimos primero

$$\mathscr{L}(x_1, y_1, \lambda) = \sqrt{x_1 y_1} + \lambda(p_x + 0.3\Pi - p_x x_1 - p_y y_1).$$

De las CPO obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= \frac{y_1^{1/2}}{2x_1^{1/2}} - \lambda p_x = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_1} &= \frac{x_1^{1/2}}{2y_1^{1/2}} - \lambda p_y = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= p_x + 0.3(Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_x p_y}) - p_x x_1 - p_y y_1 = 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema (y teniendo presente que la función de utilidad es Cobb-Douglas)

$$\begin{aligned}
x_1^d &= \frac{p_x + 0.3\Pi}{2p_x} \\
y_1^d &= \frac{p_x + 0.3\Pi}{2p_y}.
\end{aligned}$$

Con respecto al segundo consumidor, resolvemos

$$\begin{aligned}
&\max\ x_2 + \ln y_2 \\
&s.a.\ p_x x_2 + p_y y_2 \leq 2p_x + 0.7\Pi \\
&x_2, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Definimos

$$\mathscr{L}(x_2, y_2, \lambda) = x_2 + \ln y_2 + \lambda(2p_x + 0.7\Pi - p_x x_2 - p_y y_2).$$

Las condiciones de primer orden proveen el ratio:

$$y_2^d = \frac{p_x}{p_y}$$

y así, como

$$2p_x + 0.7\Pi - p_x x_2 - p_y y_2 = 0,$$

tenemos

$$2p_x + 0.7\Pi - p_x x_2 - p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right) = 0,$$

$$x_2^d = 1 + \frac{0.7\Pi}{p_x}.$$

Antes de continuas, recordemos (establezcamos) la definición de la función exceso de demanda en este contexto (economía con producción):

Definición 3.1. En una economía de producción, la función exceso de demanda es

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{j=1}^{J} y_j(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i.$$

De este modo, teniendo presente la definición de Π:

$$\begin{aligned} Z(p_x, p_y) &= \begin{bmatrix} x_1^d(p_x,p_y) + x_2^d(p_x,p_y) - x^d - 3 \\ y_1^d(p_x,p_y) + y_2^d(p_x,p_y) - y^O \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{p_x+0.3\Pi}{2p_x} + 1 + \frac{0.7\Pi}{p_x} - \left(1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}\right) - 3 \\ \frac{p_x+0.3\Pi}{2p_y} + \frac{p_x}{p_y} - A + \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si $\Pi = 0$, es fácil ver que no hay equilibrio pues llegamos a la contradicción

$$\frac{1}{2} + 1 - 1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}} - 3 = 0.$$

De este modo, nos quedamos con la expresión $\Pi = Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_x p_y}$. Usando $\Pi = Ap_y + p_x - 2\sqrt{Ap_x p_y}$. Verifiquemos primero la Ley de Walras se sigue cumpliendo:

$$\begin{aligned} p \cdot Z(p) = p_x &\left(\frac{p_x + 0.3\Pi}{2p_x}\right) + p_x \left(1 + \frac{0.7\Pi}{p_x}\right) - 3p_x - p_x \left(1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}\right) \\ &+ p_y \left(\frac{p_x + 0.3\Pi}{2p_y}\right) + p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right) - p_y \left(A - \sqrt{\frac{Ap_x}{p_y}}\right) \\ &= \frac{p_x + 0.3\Pi}{2} + p_x + 0.7\Pi - 3p_x - p_x + \sqrt{Ap_y p_x} + \frac{p_x + 0.3\Pi}{2} + p_x - Ap_y + \sqrt{Ap_x p_y} \\ &= p_x + \Pi + p_x - 3p_x - p_x + 2\sqrt{Ap_x p_y} + p_x - Ap_y \\ &= -p_x - Ap_y + 2\sqrt{Ap_x p_y} + \Pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que se cumple la Ley de Walras, para encontrar el Equilibrio Walrasiano basta resolver

$$Z_1(p_x, p_y) = \frac{p_x + 0.3\Pi}{2p_x} + 1 + \frac{0.7\Pi}{p_x} - \left(1 - \sqrt{\frac{Ap_y}{p_x}}\right) - 3 = 0.$$

Es decir, equilibramos un mercado. Para esto, por simplicidad, normalizamos $p_x = 1$. Resolviendo en p_y usando por ejemplo Wolfram Mathematica, obtenemos:

$$p_y \simeq \frac{3.47673}{A} > 0.$$

3) Analicemos finalmente como cambian el ratio de precios y las asignaciones de equilibrio en función del parámetro A.

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = -\frac{C}{A^2} < 0.$$

Esto significa que el ratio de precios cae conforme A aumenta. Esto tiene sentido pues, si *la tecnología es más productiva* se **abarata** relativamente el bien y.

Ejercicio 3.2. De Mas-Colell et al. (1995). Considere las siguientes funciones de producción

$$\begin{aligned} f_1(z_{11}, z_{21}) &= 2\sqrt{z_{11}} + \sqrt{z_{21}} \\ f_2(z_{12}, z_{22}) &= \sqrt{z_{12}} + 2\sqrt{z_{22}}. \end{aligned}$$

Los precios internacionales son $p = (1, 1)$. Las firmas maximizan su beneficio y son precio-aceptantes. Considere dotaciones $\overline{z} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Los consumidores no tienen preferencias por los insumos. Derive el equilibrio de la asignación de insumos $z^* = \{(z^*_{11}, z^*_{21}), (z^*_{12}, z^*_{22})\}$ y el equilibrio para lo precios de los insumos (w^*_1, w^*_2).

El problema de cada firma es

$$\max_{z_j \geq 0} \ pf_j(z_j) - w \cdot z_j.$$

Concretamente, para la firma 1

$$\max_{z_{11}, z_{21} \geq 0} \ p(2\sqrt{z_{11}} + \sqrt{z_{21}}) - w_1 z_{11} - w_2 z_{21}$$

y para la firma 2

$$\max_{z_{12}, z_{22} \geq 0} \ p(\sqrt{z_{12}} + 2\sqrt{z_{22}}) - w_1 z_{12} - w_2 z_{22}.$$

Aplicando CPO obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{z_{11}}} - w_1 &= 0 \\ \frac{p}{2\sqrt{z_{21}}} - w_2 &= 0 \\ \frac{p}{2\sqrt{z_{12}}} - w_1 &= 0 \\ \frac{p}{\sqrt{z_{22}}} - w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, por otro lado,

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{12} &= \overline{z}_1 \\ z_{21} + z_{22} &= \overline{z}_2. \end{aligned}$$

De este modo, notando que

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left(\frac{p}{w_1}\right)^2 \\ z_{21} &= \left(\frac{p}{2w_2}\right)^2 \\ z_{12} &= \left(\frac{p}{2w_1}\right)^2 \\ z_{22} &= \left(\frac{p}{w_2}\right)^2 \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{w_1}\right)^2 + \left(\frac{p}{2w_1}\right)^2 &= \overline{z}_1 \\ \left(\frac{p}{2w_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{w_2}\right)^2 &= \overline{z}_2. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, concluimos que

$$\begin{aligned} z_{11}^* &= \frac{4\overline{z}_1}{5} \\ z_{21}^* &= \frac{\overline{z}_2}{5} \\ z_{12}^* &= \frac{\overline{z}_1}{5} \\ z_{22}^* &= \frac{4\overline{z}_2}{5} \\ w_1^* &= 5^{1/2}/2\overline{z}_1^{-1/2} \\ w_2^* &= 5^{1/2}/2\overline{z}_2^{-1/2}. \end{aligned}$$

Lima, 7 de setiembre, 2024.

References

Echenique, F. (2005). Lecture notes general equilibrium theory.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.