Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas

2 de Noviembre del 2024

PC 3
FIN 203

Profesor: José Gallardo
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

Ejercicio 1. **4 puntos.** Considere el siguiente juego con representación normal

	H	**T**
H	(1, -1)	(-1, 1)
T	(-1, 1)	(1, -1)

1. Halle, si existiesen, estrategias estrictamente dominadas. Jutifique su respuesta. **1 punto.**

2. Halle, si es que existe, un equilibrio de Nash en estrategias puras. Justifique su respuesta. **1 punto.**

3. Sin importar si es que encontró o no un equilibrio de Nash en estrategias puras; halle un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. **2 puntos.**

Solución:

1. **Estrategias estrictamente dominadas:** observamos que el juego es un ejemplo de cara o cruz, donde los pagos están diseñados de manera simétrica entre los jugadores. Ninguna estrategia es estrictamente dominada, ya que para cualquier estrategia de un jugador, la estrategia del otro jugador puede responder en consecuencia, manteniendo el pago alternado entre 1 y -1 según la elección. Por lo tanto, **no existen estrategias estrictamente dominadas**.

2. **Equilibrio de Nash en estrategias puras:** un análisis similar nos permite concluir que no hay equilibrio de Nash en estrategias puras.

3. **Equilibrio de Nash en estrategias mixtas:** para encontrar un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, supongamos que cada jugador elige H con probabilidad p y T con probabilidad $1 - p$. Sea p_1 la probabilidad de que el jugador 1 elija H y p_2 la probabilidad de que el jugador 2 elija H. En este caso, ambos jugadores son indiferentes entre H y T cuando:

$$p_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{1}{2}.$$

Esto implica que cada jugador elegirá H con probabilidad $\frac{1}{2}$ y T con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el **equilibrio de Nash en estrategias mixtas** es:

$$\left(p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} \right).$$

En este equilibrio, ambos jugadores juegan cada estrategia con igual probabilidad, manteniendo su pago esperado constante.

Ejercicio 2. **3 puntos.** Considere el siguiente juego con representación normal

	L	**C**	**R**
L	(2, 2)	(1, 1)	(0, 0.5)
C	(3, 2)	(1, 0.5)	(0, 0)
R	(1, 1)	(0, 2)	(5, 0)

1. Utilice el concepto de eliminación secuencial de estrategias dominadas para hallar las estrategias óptimas. **1.5 puntos.**

2. Encuentre, en caso existan, todos los equilibrios de Nash en estrategias puras. **1.5 puntos.**

Solución: para J2, claramente R es dominada por L y C. Luego, Para 1, dado que sabe que J2 nunca juega R, C domina R. La tabla se reduce a L y C para cada jugador. Enseguida, notamos que L domina a C para J2. Finalmente, la única combinación de estrategias que sobrevive al proceso iterativo de eliminación es (C, L). Resulta entonces que (C, L) es el único equilibrio de Nash (pues un equilibrio de Nash sobrevive al proceso iterativo de eliminación).

Ejercicio 3. **4 puntos.**

	B	**S**
B	(2, 1)	(0, 0)
S	(0, 0)	(1, 2)

1. Halle un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. **Notación:** asigne la probabilidad p a la estrategia B del jugador 1 y probabilidad q a la estrategia B del jugador 2. **2 puntos.**

2. Analice el comportamiento de los individuos ante variaciones de los valores de las probabilidades. Concretamente, qué sucede con el accionar de $J1$ si q aumenta (respecto a la probabilidad de equilibrio) y qué sucede con el accionar de $J2$ si p aumenta (respecto a la probabilidad de equilibrio). **2 puntos.**

Solución:

1. Si el jugador 1 debe ser indiferente entre $\mathbb{E}_1(B) = \mathbb{E}_1(S)$, entonces:

$$2q + 0 \cdot (1-q) = 0 \cdot q + 1 \cdot (1-q),$$

mientras que, para el jugador 2, también es indiferente entre $\mathbb{E}_2(B) = \mathbb{E}_2(S)$, entonces:

$$1p + 0 \cdot (1-p) = 0 \cdot p + 2 \cdot (1-p).$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos:

$$q = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad p = \frac{2}{3}.$$

2. Las elecciones de los jugadores se comportan de acuerdo con las probabilidades asignadas. Para el caso del jugador 1:

- Si $p > \frac{2}{3}$, entonces elige S.
- Si $p < \frac{2}{3}$, entonces elige B.

Para el caso del jugador 2:

- Si $q > \frac{1}{3}$, entonces elige B.
- Si $q < \frac{1}{3}$, entonces elige S.

Ejercicio 4. **3 puntos.** En una **subasta de segundo precio** de un bien indivisible, hay n postores con valoraciones

$$0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n.$$

Los postores realizan simultáneamente una oferta $s_i \in [0, \infty)$. La mayor oferta se adjudica el bien y paga como precio la segunda mayor oferta realizada. Si varios postores hacen la misma oferta, el bien se asigna aleatoriamente a uno de ellos. Los postores que no adquieren el bien no pagan nada. Demuestre que para cada postor, la estrategia $s_i = v_i$ domina débilmente todas las demás estrategias puras.

Demostración. Demostraremos que para cada postor i, la estrategia $s_i = v_i$ domina débilmente todas las demás estrategias puras. Primero, el conjunto de estrategias es $S_i = \mathbb{R}_+$. Luego, denotemos $r_i = \text{máx}_{j \neq i} s_j$ (la mayor oferta sinn contar a i). Entonces, el jugador i se adjudica el bien en caso $s_i > 0$. Supongamos que $v_i > r_i$:

1. Si $s_i < r_i$, entonces i no gana y $\pi_i = 0$.

2. Si $r_i < s_i < v_i$, i gana el bien con beneficio $v_i - r_i > 0$. Si $s_i = r_i$, i gana con probabilidad $1/k$ y $\pi_i = v_i - r_i > 0$, y con probabilidad $1 - 1/k$, $\pi_i = 0$. Si $s_i > v_i$, entonces i gana el bien y paga $\pi_i = v_i - r_i > 0$. En caso $s_i = v_i$, los beneficios son nuevamente $\pi_i - r_i > 0$.

Ahora supongamos que $v_i < r_i$. Si $s_i \leq v_i$, entonces pierde y $\pi_i = 0$. Si $v_i < s_i < r_i$, también pierde. Si $s_i = r_i$, gana con probabilidad $1/k$ y $\pi_i = v_i - r_i > 0$, y con probabilidad $1 - 1/k$, $\pi_i = 0$. Finalmente, si $s_i > r_i$, gana el bien y $\pi_i = v_i - r_i < 0$. Por ende, ofertar $s_i = v_i$ le genera un pago mayor o igual a cualquier otra oferta y en algunos casos mayor. $\square$