FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

NOTAS EN EQUILIBRIO GENERAL MODELO $2 \times 2 \times 2$

Microeconomía Financiera
Semestre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo & Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

---

1 Tecnologías CES y preferencias Cobb-Douglas

En estas notas, resolvemos de manera explícita un modelo $2 \times 2 \times 2$. Las propiedades y características de las funciones de producción y y utilidad hacen esto posible. En efecto, resolver un modelo $2 \times 2 \times 2$ no es por lo general un ejercicio directo y a veces es imposible llegar a expresiones cerradas. Es por ello que lo usual es aplicar métodos numéricos como el de la bisección, Newton o secante.

Considere tecnologías tipo CES

$$X = F_X(L_X, K_X) = L_X^{1/2} + K_X^{1/2}$$
$$Y = F_Y(L_Y, K_Y) = L_Y^{1/2} + K_Y^{1/2}.$$

Note que no hay intensidad en uno de los factores (especialización) ni rendimientos a escala constantes. Por otro lado, hay dos individuos cuyas prerfrencias por x e y vienen representadas por las siguientes funciones de utilidad:

$$u_A = x_A^{\alpha} y^{1-\alpha},\ \alpha \in (0,1)$$
$$u_B = x_B^{\beta} y^{1-\beta},\ \beta \in (0,1).$$

Las dotaciones de los factores de producción son $\overline{L} = L_A + L_B$ y $\overline{K} = K_A + K_B$. Los shares son $\theta_A = (\theta_{Ax}, \theta_{Ay})$ y $\theta_B = (\theta_{Bx}, \theta_{By})$. Para resolver el problema, aplicamos el siguiente procedimiento (para rendimientos a escala decrecientes):

1. Obtenemos la función de costos de cada industria.
2. A partir de la función de costos derivamos la función de beneficios de cada firma.
3. Limpiamos uno de los mercados y hacemos, por ejemplo $r = 1$ (normalización de uno de los precios).
4. Reemplazamos con la función de beneficios en la restricción presupuestaria de cada consumidor y derivamos la demandas óptimas.
5. Limpiamos los 2 mercados por el lado de la demanda de bienes (note que debemos limpiar 3 mercados por la Ley de Walras y en el paso (3) ya se limpió uno).

Procedamos entonces a resolver el modelo. El problema de minimización del costo para la firma que produce x es (para y es análogo dada la simetría en las tecnologías)

$$\min_{L_X, K_X} \{wL_X + rK_X\}, \text{ s. a}: \underbrace{\overline{x}}_{>0} = L_X^{1/2} + K_X^{1/2}.$$

Las condiciones de primer orden aplicadas al Lagrangiano asociado conllevan a

$$\begin{aligned} w - \lambda \frac{L_X^{-1/2}}{2} &= 0 \\ r - \lambda \frac{K_X^{-1/2}}{2} &= 0 \\ \frac{w}{r} &= \sqrt{\frac{K_X}{L_X}} \\ L_X^{1/2} + \left(\frac{w}{r}\right) L_X^{1/2} &= 0 \\ L_X &= \frac{r^2}{(r+w)^2}\overline{x}^2. \end{aligned}$$

Por simetría,

$$K_X = \frac{w^2}{(w+r)^2}\overline{x}^2.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} C_x(w, r, \overline{x}) &= \frac{wr^2\overline{x}^2}{(w+r)^2} + \frac{rw^2\overline{x}^2}{(w+r)^2} \\ &= \frac{wr(w+r)\overline{x}^2}{(w+r)^2} \\ &= \frac{wr}{(w+r)}\overline{x}^2 \\ &= \frac{\overline{x}^2}{\frac{1}{w} + \frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

De este modo, el problema de maximización del beneficio de la firma x es

$$\max_{x \geq 0} \; p_x x - \frac{wr}{w+r}x^2.$$

Dada la concavidad estricta, la condición e primer orden es suficiente[1] y provee

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = p_x - \frac{2xwr}{w+r} = 0.$$

Despejando x obtenemos

$$x = \frac{p_x}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right).$$

De este modo, reemplazando en la función de beneficios,

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{p_x^2(w+r)}{2wr} - \frac{wr}{w+r}\left(\frac{p_x^2}{4}\frac{(w+r)^2}{w^2r^2}\right)\\ &= \frac{p_x^2}{4}\frac{w+r}{wr}\\ &= \frac{p_x^2}{4}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Hotelling (consecuencia directa del Teorema de la Envolvente)

$$L_X^{dnc} = -\frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{p_x^2}{4w^2} \tag{1}$$

$$K_X^{nc} = -\frac{\partial \pi}{\partial r} = \frac{p_x^2}{4r^2}. \tag{2}$$

Note que dnc denota demanda no condicionada. De este modo, aprovechándonos una vez más de la simetría

$$\begin{aligned}\overline{L} &= L_X = L_Y\\ &= \frac{p_x^2}{4w^2} + \frac{p_y^2}{4w^2}\\ \overline{K} &= K_X + K_Y\\ &= \frac{p_x^2}{4r^2} + \frac{p_y^2}{4r^2}.\end{aligned}$$

Haciendo $r = 1$, deducimos que

$$4\overline{K} = p_x^2 + p_y^2.$$

De este modo,

$$w = \frac{p_x^2 + p_y^2}{4\overline{L}} = \frac{\overline{K}}{\overline{L}} \implies w = \sqrt{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}.$$

Ya con los precios relativos de los insumos en equilibrio y los beneficios de las firmas, aprovechando que las funciones de utilidad son Cobb-Douglas homogéneas de grado uno,

[1] Para un rango de parámetros adecuados, proveer $x = 0$ lleva a $\Pi = 0$. La solución de esquina no será de interés en este documento.

podemos rápidamente llegar a

$$\begin{aligned}
x_A &= \frac{\alpha}{p_x}\left[wL_A + rK_A + \theta_{Ax}\pi_x + \theta_{Ay}\pi_y\right] \\
y_A &= \frac{1-\alpha}{p_y}\left[wL_A + rK_A + \theta_{Ax}\pi_x + \theta_{Ay}\pi_y\right] \\
x_B &= \frac{\beta}{p_x}\left[wL_B + rK_B + \theta_{Bx}\pi_x + \theta_{By}\pi_y\right] \\
y_B &= \frac{1-\beta}{p_y}\left[wL_B + rK_B + \theta_{Bx}\pi_x + \theta_{By}\pi_y\right].
\end{aligned}$$

Debemos limpiar los dos mercados para obtener los precios p_x, p_y. Para el bien x, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{p_x}\left[wL_A + K_A + \theta_{Ax}\left[\frac{p_x^2}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{r}\right)\right] + \theta_{Ay}\left[\frac{p_y^2}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{r}\right)\right]\right] \\
&+\frac{\beta}{p_x}\left[wL_B + K_B + \theta_{Bx}\left[\frac{p_x^2}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{r}\right)\right] + \theta_{By}\left[\frac{p_y^2}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{r}\right)\right]\right] \\
&= \frac{p_x}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

donde $w = (\overline{K}/\overline{L})^{1/2}$. Denotemos

$$C = \frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{r}}\left[\alpha(wL_A + K_A) + \beta(wL_B + K_B)\right].$$

Entonces,

$$C + \left(\frac{\alpha\theta_{Ax} + \beta\theta_{Bx}}{4}\right)p_x^2 + \left(\frac{\alpha\theta_{Ay} + \beta\theta_{By}}{4}\right)p_y^2 = \frac{p_x^2}{2}.$$

Análogamente, para el mercado del bien y, denotando

$$D = \frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{r}}[(1-\alpha)(wL_A + K_A) + (1-\beta)(wL_B + K_B)]$$

se tiene que

$$D + \left(\frac{(1-\alpha)\theta_{Ax} + (1-\beta)\theta_{Bx}}{4}\right)p_x^2 + \left(\frac{(1-\alpha)\theta_{Ay} + (1-\beta)\theta_{By}}{4}\right)p_y^2 = \frac{p_y^2}{2}.$$

Sumando ambas expresiones,

$$C + D + \left(\frac{\theta_{Ax} + \theta_{Bx}}{4}\right)p_x^2 + \left(\frac{\theta_{Ay} + \theta_{By}}{4}\right)p_y^2 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2}.$$

De este modo,

$$p_y = \sqrt{\frac{C + D + p_x^2\left[\frac{\theta_{Ax}+\theta_{Bx}}{4} - \frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2} - \frac{\theta_{Ay}+\theta_{By}}{4}}}.$$

Denotemos

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\theta_{Ax} + \theta_{By}}{4} \leq \frac{1}{4} \\
\Psi &= \frac{\theta_{Ay} + \theta_{By}}{4} \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y a su vez

$$\Upsilon = \frac{\alpha\theta_{Ax} + \beta\theta_{Bx}}{4}$$
$$\Phi = \frac{\alpha\theta_{Ay} + \beta\theta_{By}}{4}$$

Entonces, reemplazando en la ecuación del bien x,

$$C + \left(\frac{\alpha\theta_{Ax} + \beta\theta_{Bx}}{4}\right) p_x^2 + \left(\frac{\alpha\theta_{Ay} + \beta\theta_{By}}{4}\right) \left(\frac{C + D + p_x^2\left[\frac{\theta_{Ax}+\theta_{Bx}}{4} - \frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2} - \frac{\theta_{Ay}+\theta_{By}}{4}}\right) = \frac{p_x^2}{2}.$$

Usando Ω, Ψ, Υ y Φ

$$C + \Upsilon p_x^2 + \Phi\left[\frac{C + D + p_x^2(\Omega - 1/12)}{1/2 - \Psi}\right] = \frac{p_x^2}{2}.$$

Factorizando los términos que multiplican p_x^2

$$p_x^2\left[\Upsilon + \frac{\Phi(\Omega - 1/2)}{1/2 - \Psi} - \frac{1}{2}\right] + C + \frac{\Phi}{\frac{1}{2} - \Psi}(C + D) = 0.$$

De este modo,

$$p_x = \sqrt{\frac{C + \dfrac{\Phi}{\dfrac{1}{2} - \Psi}(C + D)}{\dfrac{1}{2} - \Psi - \dfrac{\Phi(\Omega - 1/2)}{1/2 - \Psi}}}.$$

Reemplazando C y D,

$$p_x = \sqrt{\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{r}}\left[\alpha(wL_A + K_A) + \beta(wL_B + K_B)\right] + \dfrac{\Phi}{\dfrac{1}{2} - \Psi}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{r}}\left[wL_A + K_A + wL_B + K_B\right]\right)}{\dfrac{1}{2} - \Psi - \dfrac{\Phi(\Omega - 1/2)}{1/2 - \Psi}}}.$$

Por ejemplo, para simplificar las operaciones, tomemos $\theta_{ij} = 1/2$, $i \in \{A, B\}, j \in \{x, y\}$, $\alpha = \beta = 1/2$. Bajo estos supuestos, las ecuaciones se reducen a

$$C + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) p_x^2 + \frac{p_y^2}{8} = 0$$
$$D + \frac{p_x^2}{8} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) p_y^2 = 0.$$

Combinando ambas ecuaciones, se llega a

$$p_x = p_y$$

pues $C = D$. De este modo,

$$p_x = \sqrt{2C} = p_y.$$