

Notas de clase en
teoría de juegos

Profesor del curso: César Martinelli

Apuntes de: Marcelo Gallardo

Semestre: 2025-1

Pontificia Universidad Católica del Perú

Draft
Prof.: César Martinelli
Notes by Marcelo Gallardo

Este documento está basado en las clases del curso Teoría de Juegos, dictado por el profesor César Martinelli durante el semestre 2025-1 en la Pontificia Universidad Católica del Perú. El libro texto base que fue usado es A Course in Game Theory de Martin Osborne y Ariel Rubinstein ([Osborne and Rubinstein, 1994](#)). Algunas secciones son complementadas siguiendo a [Myerson \(1991\)](#), [Binmore \(2007\)](#), [Krishna \(2009\)](#), [Fudenberg and Tirole \(1991\)](#), [Mas-Colell et al. \(1995\)](#) y varios artículos.

Draft
Prof.: César Martinelli
Notes by Marcelo Gallardo

Índice general

Índice general	2
1. Introducción	6
2. Equilibrio de Nash	10
2.1. Juegos estratégicos	10
2.2. Equilibrio de Nash	11
2.3. Ejemplos	12
2.4. Existencia del Equilibrio de Nash	15
2.5. Juegos competitivos y el teorema min-max	20
2.6. Tópicos adicionales	23
2.6.1. Refinamiento del concepto de equilibrio de Nash	24
2.6.2. Sobre la unicidad del equilibrio de Nash	29
2.6.3. Equilibrio de respuesta cuantal	31
3. Juegos estratégicos aplicados	34
3.1. Oligopolio	34
3.1.1. Competencia Cournot	34
3.1.2. Competencia de Bertrand	41
3.2. Juegos de mercado	52

Índice general	3
3.3. Subastas con información completa $n = 2$	54
4. Juegos Bayesianos	60
4.1. Equilibrio Nash Bayesiano	60
4.2. Subastas como juegos bayesianos	66
4.3. Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves	84
5. Juegos extensivos	89
5.1. Introducción	89
5.2. Equilibrio perfecto en subjuegos	96
5.3. Duopolio de Stackelberg	105
5.4. Movimientos simultáneos	106
5.5. Acciones aleatorias en juegos extensivos	109
6. Negociación	117
6.1. La solución de Nash	119
6.2. Modelo de negociación de Rubinstein	129
7. Juegos repetidos	136
7.1. Conceptos fundamentales	136
7.2. Autómatas y enfoque recursivo	138
7.3. Enfoque del minmax	152
7.4. Perfiles de estrategias como automatas	156
7.5. Aplicaciones	158
7.5.1. Guerra de precios de Rotemberg-Saloner	158
7.5.2. Consistencia temporal: modelo de Stanley Fischer	161
7.5.3. Reparto de riesgos	164

8. Juegos extensivos con información imperfecta	169
8.1. Introducción	169
8.2. Equilibrio secuencial	173
8.3. Juegos extensivos con información incompleta	176
8.3.1. Juegos de señalización	178
8.3.2. Paradoja de la cadena comercial	181
8.4. Conclusiones	187
A. Teoría de la utilidad esperada	189
A.1. Preliminares	189
A.2. Teorema de la utilidad esperada	194
A.3. Argumento de Separación	196
A.4. Paradoja de Allais	197
A.5. Pagos monetarios y dominancia	199
A.6. Riesgo	206
A.7. Probabilidades subjetivas	211
A.8. Savage in the market	213
A.9. La teoría de la decisión y el fenómeno de <i>casí implica cerca</i>	222
B. Teorema min-max: derivación alternativa	233
C. Juegos en dos etapas	237
D. Existencia de equilibrios de Nash en juegos discontinuos	249
E. Introducción al diseño de mecanismos	274
E.1. Introducción	274

E.2. Screening	277
E.3. Precios no lineales	283
E.4. Subastas con un único bien	285
E.5. Maximización del retorno esperado	288
F. Teorema de la envolvente y equivalencia de pagos	296
G. Responsabilidad electoral y democracia receptiva	300
Bibliografía	313

Prof.: César Martinelli
Notes by Marcelo Gallardo

Capítulo 1

Introducción

La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia la interacción estratégica entre agentes racionales, con aplicaciones en economía, ciencias políticas, biología y más. Sus raíces pueden rastrearse hasta la antigüedad, con Heródoto documentando subastas en Babilonia. Sin embargo, el primer tratamiento formal de la competencia estratégica se debe al matemático francés Antoine Augustin Cournot (1838), quien, en [Cournot \(1838\)](#), modeló un duopolio en el que cada empresa elige su cantidad de producción de manera estratégica, dando origen al equilibrio de Cournot. Posteriormente, la teoría de juegos moderna fue fundada por John von Neumann y Oskar Morgenstern en [von Neumann and Morgenstern \(1944\)](#), donde introdujeron el concepto de utilidad esperada y establecieron un marco matemático para los juegos cooperativos. De hecho, cuenta la historia que Neumann *creó* el concepto de utilidad esperada en una tarde, algo que llevaba a los economistas años añorando.

Poco después, John Nash revolucionó la disciplina con la formulación del equilibrio de Nash, ([Nash, 1951](#)), definiendo un concepto fundamental para la solución de juegos estratégicos. En su trabajo doctoral en Princeton, siguiendo las sugerencias de Tucker, Kuhn y Gale, estableció la existencia del equilibrio de Nash en estrategias mixtas usando el teorema del punto fijo de Kakutani ([Kakutani, 1941](#)).

El desarrollo de la teoría de juegos avanzó en múltiples direcciones. John Harsanyi introdujo los juegos bayesianos (juegos con información incompleta) en su serie de artículos ([Harsanyi, 1966, 1967, 1985](#)), permitiendo modelar situaciones en las que los

jugadores tienen creencias sobre los tipos de los demás más no información completa. Reinhard Selten extendió el análisis de juegos dinámicos con el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos en [Selten \(1975\)](#), proporcionando una solución refinada para juegos secuenciales. Paralelamente, Lloyd Shapley introdujo el valor de Shapley en [Shapley \(1953\)](#), un concepto clave en teoría de juegos cooperativos, y junto con Martin Shubik desarrolló el modelo de asignación en [Shapley and Shubik \(1962\)](#).

El impacto de la teoría de juegos en la economía también se extendió a la teoría de elección social y el diseño de mecanismos. Kenneth Arrow en [Arrow \(1951\)](#) formuló el famoso teorema de la imposibilidad, demostrando que no existe un sistema de votación perfecto bajo ciertas condiciones. Posteriormente, el Nobel Eric Maskin formalizó la teoría del diseño de mecanismos en [Maskin \(1999\)](#), estableciendo condiciones necesarias para la implementabilidad en equilibrio de Nash.

Roger Myerson contribuyó con la teoría de subastas en [Myerson \(1981\)](#), introduciendo el principio de equivalencia de ingresos. Las contribuciones de Myerson se extienden a la teoría de contratos en [Baron and Myerson \(1982\)](#), donde, junto con David Baron, analiza el problema de regulación óptima de un monopolista con información asimétrica. El artículo del 82 desarrolla un modelo en el que una autoridad reguladora diseña un esquema de incentivos para inducir a una empresa monopolista, cuyo costo es privado, a revelar su tipo verdadero.

En la misma línea, Paul Milgrom y Robert Wilson (1982) realizaron avances fundamentales en el diseño de mecanismos de licitación óptima. Su obra ([Milgrom and Wilson, 1982](#); [Wilson, 1979, 1969](#); [Milgrom and Weber, 1982](#)) introduce contribuciones claves en la teoría de subastas, por las cuales fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 2020. Cabe destacar que la teoría de subastas, si bien tiene antecedentes históricos que se remontan a Heródoto, fue formalizada matemáticamente por primera vez por William Vickrey en su análisis de subastas de segundo precio ([Vickrey, 1961](#)), trabajo que le valió compartir el Premio Nobel de Economía con James Mirrlees. Por su parte, Mirrlees contribuyó significativamente al diseño de sistemas fiscales óptimos al desarrollar la teoría de impuestos bajo información asimétrica, estableciendo las bases de la tributación óptima en [Mirrlees \(1971\)](#).

El desarrollo de la teoría de juegos también abarcó la competencia dinámica, organización industrial y la reputación en mercados estratégicos. Jean Tirole, en [Tirole \(1988\)](#), estableció la base del análisis moderno de la competencia imperfecta, desarrollando herramientas fundamentales para la teoría de la organización industrial. Junto con Jean-Jacques Laffont, en [Laffont and Tirole \(1993\)](#), exploró problemas de regulación óptima, sentando las bases para el diseño de mecanismos en mercados regulados. Siendo aún alumnos de doctorado y bajo la influencia de Eric Maskin, Drew Fudenberg y Jean Tirole publicaron *Game Theory* [Fudenberg and Tirole \(1991\)](#), un libro fundamental en la disciplina. Además, Fudenberg y David Levine analizaron juegos con aprendizaje y reputación en [Fudenberg and Levine \(1989\)](#), explorando cómo un jugador paciente puede construir una reputación en juegos dinámicos, influyendo en modelos de negociación y competencia en mercados con incertidumbre.

Paralelamente, Ariel Rubinstein introdujo el concepto de juegos de negociación repetidos en [Rubinstein \(1982\)](#), estableciendo el famoso modelo de Rubinstein, en el cual los agentes alternan ofertas en el tiempo y los descuentos intertemporales determinan los equilibrios de negociación. Su trabajo formalizó el proceso de negociación en mercados y ha sido fundamental en la teoría de contratos.

La teoría de juegos ha evolucionado desde sus fundamentos matemáticos hasta convertirse en una herramienta esencial en economía, finanzas y política, con aplicaciones en subastas, regulación, formación de precios y asignación de recursos. En los últimos años, la disciplina ha seguido expandiéndose con avances en economía política y teoría del voto, donde se han desarrollado modelos estratégicos de comportamiento electoral y manipulación política. En particular, el profesor César Martinelli ha investigado el papel de la información en elecciones estratégicas, su impacto en la agregación del conocimiento en sistemas democráticos y las aplicaciones en economía política ([Martinelli, 2006](#); [Martinelli and Herrera, 2006](#); [Martinelli et al., 2008](#); [Martinelli and Duggan, 2020](#); [Martinelli et al., 2024](#)).

Simultáneamente, la teoría de juegos ha visto un crecimiento significativo en su formalización matemática y desarrollo computacional, incorporando métodos algorítmicos avanzados para la resolución de equilibrios así como el análisis de estática comparativa ([Echenique, 2002, 2003](#)).

En el ámbito de diseño de mecanismos y teoría de subastas, han surgido modelos más sofisticados que combinan persuasión, incentivos y señales multidimensionales (Bergemann et al., 2019; Bergemann and Morris, 2024; Bergemann et al., 2024; Bergemann and Morris, 2023). Estos avances han permitido entender cómo la información y los incentivos pueden ser utilizados para diseñar subastas óptimas y esquemas de precios en mercados.

Otra contribución fundamental de la teoría de juegos fue su impacto en la teoría del equilibrio general. En particular, el concepto de core, introducido en los trabajos de Shapley (Shapley, 1955), fue clave en el análisis de asignaciones estables en economías de intercambio. Las ideas de existencia del equilibrio de Nash fueron fundamentales en los trabajos seminales de Arrow, Debreu y McKenzie sobre la existencia de equilibrios competitivos en mercados de bienes y producción (Arrow and Debreu, 1954; McKenzie, 1959). Estos resultados establecieron las bases de la teoría moderna del equilibrio general, demostrando la existencia de equilibrios en mercados bajo condiciones de convexidad y continuidad.

Finalmente, los avances recientes han sido sistematizados en libros clave que consolidan los conocimientos en el área, incluyendo los de Krishna (2009), Börgers (2015) y Zamir et al. (2013), y, en el emergente campo de la teoría de juegos algorítmica, el libro Nisan et al. (2007), en donde se explora la relación entre algoritmos, incentivos y equilibrios estratégicos en entornos computacionales, proporcionando una perspectiva clave en la intersección de teoría de juegos y ciencias de la computación.

Con estos desarrollos, la teoría de juegos continúa desempeñando un papel central en la toma de decisiones estratégicas, la regulación de mercados y el diseño de sistemas económicos complejos, manteniéndose como una de las áreas más dinámicas y con mayor impacto en la economía moderna.

Capítulo 2

Equilibrio de Nash

2.1. Juegos estratégicos

Un juego estratégico es un modelo interactivo de decisión en la cual el tomador de decisiones escoge su plan de acción y las elecciones se hacen simultáneamente.

El modelo consiste en:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, N\}$.
- Un conjunto de acciones para cada jugador i : A_i .
- Una relación de preferencias \succeq_i definida sobre $A = \otimes_{j \in N} A_j$. Eventualmente, asumimos que \succeq_i viene representado por una función de pagos $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Un perfil de acciones $a = (a_j)_{j \in N}$ se denominará *resultado*.

Definición 2.1.1. Si el conjunto A_i es finito, entonces el juego es dicho finito.

Notación 2.1.2. El juego estratégico introducido será denotado

$$\langle N, (A_i), (u_i) \rangle.$$

Ejemplo 2.1.3. Un juego con dos jugadores y dos acciones por jugador puede representarse vía la tabla:

	J2: L	J2: R
J1: T	(w_1, w_2)	(x_1, x_2)
J1: B	(y_1, y_2)	(z_1, z_2)

¿Cómo leer esta tabla? Por ejemplo, si el jugador 2 juega L y el jugador 1 juega T , entonces el pago para el jugador 1 es w_1 y para el jugador 2 es w_2 .

Una interpretación común de un juego estratégico es un modelo de un evento que ocurre una única vez. Cada jugador conoce los detalles del juego y el hecho que todos los agentes son racionales, y que los jugadores escogen acciones simultáneamente e independientes. Bajo esta interpretación, cada jugador no conoce cuales son las acciones que escogieron los otros al momento de escoger su acción.

2.2. Equilibrio de Nash

El concepto de solución más usado en teoría de juegos es el de equilibrio de Nash. Esta noción captura la idea de punto silla o de equilibrio en el cual cada jugador tiene una expectativa correcta sobre el comportamiento y modo de actuar racional de los demás jugadores. El concepto no examina el proceso mediante el cual se llega a dicha situación.

Definición 2.2.1. Un equilibrio de Nash en un juego estratégico $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es un perfil de acciones $a^* \in A$, en el cual para cada $i \in N$:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*), \forall a_i \in A_i.$$

Según la definición 2.2.1, el jugador i no tiene ninguna acción que conlleva a un resultado que prefiere cuando escoge a_i^* , dado que los demás jugadores $j \neq i$ juegan a_j^* . En otras palabras, ningún jugador se beneficia desviándose unilateralmente.

La siguiente reformulación de la definición 2.2.1 suele ser más útil: para cada $a_{-i} \in A_{-i} = \otimes_{j \neq i} A_j$, definamos la mejor respuesta del jugador i dado que los demás

juegan a_{-i} :

$$B_i(a_{-i}) = \left\{ a_i \in A_i : \underbrace{(a_{-i}, a_i) \succeq_i (a_{-i}, a'_i)}_{u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i)}, \forall a'_i \in A_i \right\}. \quad (2.1)$$

El conjunto (2.1) se llama correspondencia de mejor respuesta del jugador i . Un EN es entonces un perfil de acciones a^* tal que

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*), \forall i \in N.$$

En particular, definiendo $B(a) = (B_i(a_i))_{i \in N}$, a^* es un EN si y solamente si $a^* \in B(a^*)$.

2.3. Ejemplos

Ejemplo 2.3.1. Bach or Stravinsky? BoS. En esta situación, dos jugadores deben decidir juntos a qué concierto asistir: uno de Bach o de Stravinsky. Este problema también puede representarse con otras opciones, como elegir entre ver Moana o Resident Evil en el cine, o entre asistir a una función de Rey León o El regreso de los Siths. Su mayor preocupación es salir juntos, pero uno de ellos prefiere Bach y el otro prefiere Stravinsky. BoS modela una situación en la que los jugadores desean coordinar pero tienen intereses en conflicto.

	J2: Bach	J2: Stravinsky
J1: Bach	(2, 1)	(0, 0)
J1: Stravinsky	(0, 0)	(1, 2)

El juego tiene dos EN: (Bach, Bach) y (Stravinsky, Stravinsky).

Ejemplo 2.3.2. Juego de coordinación. Al igual que en BoS, las dos personas desean salir juntos. Sin embargo, ahora tienen una preferencia simétrica por los conciertos:

	J2: Mozart	J2: Chopin
J1: Mozart	(2, 2)	(0, 0)
J1: Chopin	(0, 0)	(1, 1)

Este juego tiene dos EN (en estrategias puras) como en BoS: (Mozart, Mozart) y (Chopin, Chopin). Sin embargo, en este caso ambos prefieren (Mozart, Mozart). De hecho, es un perfil Pareto eficiente/óptimo (PO), mientras que (Chopin, Chopin) no lo es. Así, la noción de EN no descarta estados de equilibrio en los cuales los resultados sean *inferiores*.

Ejemplo 2.3.3. Dilema del Prisionero. Dos sospechosos han sido capturados y son interrogados por separado. Cada jugador i recibe una utilidad de $u_i = 4 -$ (años en prisión). Las opciones disponibles son confesar (C) o no confesar (N).

	Jugador 2: N	Jugador 2: C
Jugador 1: N	(3, 3)	(0, 4)
Jugador 1: C	(4, 0)	(1, 1)

Cada celda representa los años en prisión restantes para cada jugador según su elección:

- Si ambos eligen N , obtienen (3, 3), ya que solo hay evidencia indirecta en su contra.
- Si ambos eligen C , obtienen (1, 1), porque la confesión mutua reduce la pena, pero sigue habiendo castigo.
- Si uno elige C y el otro N , el que confiesa queda libre (4, 0) o (0, 4), mientras que el que no confiesa recibe la pena máxima.

Las principales conclusiones son:

- El único equilibrio de Nash en estrategias puras es (C, C) .
- ¡Los otros tres perfiles (N, N) , (C, N) y (N, C) son óptimos de Pareto pero no (C, C) !

Ejemplo 2.3.4. Matching Pennies. Dos jugadores eligen simultáneamente entre las opciones C y X . Si ambos eligen la misma opción, el jugador 1 recibe un pago de 1 y el jugador 2 un pago de -1. Si eligen opciones diferentes, ocurre lo contrario.

	Jugador 2: C	Jugador 2: X
Jugador 1: C	(1, -1)	(-1, 1)
Jugador 1: X	(-1, 1)	(1, -1)

Este juego no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras, ya que cualquier estrategia fija puede ser explotada por el otro jugador. En equilibrio de estrategias mixtas, ambos jugadores eligen C y X con probabilidad 0,5, asegurando que el oponente no pueda mejorar su resultado esperado.

Ejemplo 2.3.5. Federer vs. Nadal - Juego de saque.¹ Federer está sacando y puede elegir entre sacar arriba (A) o sacar al medio (M). Nadal intenta adivinar la dirección del saque. Si Nadal acierta, gana 1 punto y Federer obtiene 0. Si Nadal se equivoca, Federer gana 1 punto y Nadal obtiene 0.

	Nadal: A	Nadal: M
Federer: A	(0, 1)	(1, 0)
Federer: M	(1, 0)	(0, 1)

¹Walker and Wooders (2001) analizan datos de partidos de Wimbledon para evaluar si los jugadores profesionales siguen estrategias mixtas óptimas en juegos de suma cero. Su principal hallazgo es que los tenistas seleccionan la dirección de sus saques de manera consistente con la hipótesis minimax, lo que significa que sus elecciones de saque generan tasas de éxito similares en todas las direcciones, como predice el equilibrio en estrategias mixtas. Sin embargo, identifican una dependencia serial significativa en la toma de decisiones: los jugadores tienden a cambiar de estrategia con demasiada frecuencia en lugar de jugar de manera completamente aleatoria. Usando pruebas de independencia serial, encuentran correlaciones positivas entre saques consecutivos. Este resultado se relaciona directamente con el ejemplo de Matching Pennies, donde no hay equilibrio en estrategias puras, y los jugadores deben aleatorizar sus elecciones para evitar ser explotados. Aplicado al caso de Federer vs. Nadal, esto implica que Federer debe distribuir sus saques de manera impredecible para maximizar su ventaja, mientras que Nadal debe optimizar su estrategia de respuesta observando posibles sesgos en la distribución del saque. La evidencia de Walker y Wooders sugiere que, aunque los tenistas profesionales se acercan a la aleatorización óptima, en la práctica aún presentan patrones explotables, lo que deja espacio para estrategias adaptativas en la respuesta al saque.

Al igual que en el caso de Matching Pennies, no hay equilibrio de Nash en estrategias puras. Si Federer siempre saca en la misma dirección, Nadal puede adaptarse y ganar cada vez. En un equilibrio en estrategias mixtas, Federer distribuiría sus saques entre A y M con cierta probabilidad, mientras que Nadal haría lo mismo al elegir dónde responder.

2.4. Existencia del Equilibrio de Nash

No todos los juegos tiene un EN, como en el caso de Matching Pennies. A continuación vamos a determinar condiciones bajo las cuales podemos asegurar la existencia de un equilibrio, ya sea en estrategias puras o mixtas (ver definición 2.4.2).

Definamos $B : A \rightarrow A$ por $B(a) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i})$. Entonces, un EN es a^* tal que $a^* \in B(a^*)$. El teorema del punto fijo de Kakutani da condiciones bajo las cuales $B(\cdot)$ posee un punto fijo (Kakutani, 1941).

Lema 2.4.1. Sea X un conjunto compacto y convexo en \mathbb{R}^n y $\Gamma : X \rightrightarrows X$ una correspondencia tal que:

- $\forall x \in X$, $\Gamma(x)$ es no vacío y convexo.
- El gráfico de Γ es cerrado: para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, si $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, entonces $y \in \Gamma(x)$.

Entonces, existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in \Gamma(x^*)$.

Definición 2.4.2. Dado el conjunto finito de estrategias puras del jugador i , una estrategia mixta α_i es una distribución de probabilidad sobre A_i que asigna a cada estrategia pura a_i una probabilidad $\alpha_i(a_i) \in [0, 1]$ de ser elegida.

- Supongamos que $A_i = \{a_i^n : n = 1, 2, \dots, M_i\}$. Entonces,

$$\Delta(A_i) = \left\{ \alpha_i \in \mathbb{R}^{M_i} : 0 \leq \alpha_i(a_i^n) \leq 1, \sum_{n=1}^{M_i} \alpha_i(a_i^n) = 1 \right\}.$$

- A veces escribimos el vector de probabilidades α_i como $\alpha_i = (\alpha_i(a_i))$.

- Sea $N = \{i, j\}$. Entonces, la utilidad de i cuando elige a_i y j escoge $\alpha_j \in \Delta(A_j)$ es

$$u_i(a_i, \alpha_j) = \sum_{a_j \in A_j} u_i(a_i, a_j) \alpha_j(a_j).$$

- Luego, la utilidad de i bajo (α_i, α_j) es

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_i, \alpha_j) &= \sum_{a_i \in A_i} \sum_{a_j \in A_j} u_i(a_i, a_j) \alpha_j(a_j) \alpha_i(a_i) \\ &= \sum_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \alpha_j) \alpha_i(a_i). \end{aligned}$$

- Más generalmente, con N jugadores, podemos escribir:

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) &= \mathbb{E}_\alpha [u_i(a)] \\ &= \sum_{a \in A} u_i(a) (\alpha_1(a_1) \times \cdots \times \alpha_N(a_N)) \\ &= \sum_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \alpha_{-i}(a_{-i}) \alpha_i(a_i) \\ &= \sum_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \alpha_{-i}) \alpha_i(a_i) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_{-i}(a_{-i}) = \prod_{j \neq i} \alpha_j(a_j).$$

Definición 2.4.3. Un perfil $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)$ es un equilibrio de Nash (NE) del juego $\Gamma_N = [N, \{\Delta(A_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ si para cada jugador $i = 1, 2, \dots, N$:

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*), \quad \forall \alpha_i \in \Delta(A_i).$$

Proposición 2.4.4. Cuando $|A_i| = K < \infty$ para todo $i \in N$, la correspondencia

$$B : \bigotimes_{i \in N} \Delta(A_i) \rightrightarrows \bigotimes_{i \in N} \Delta(A_i)$$

admite un EN. Así, un juego con espacios de estrategias finitos y un número de jugadores finito, siempre existe un EN en estrategias mixtas.

Demostración. Para probar la existencia de un equilibrio de Nash, necesitamos demostrar que B tiene las propiedades deseadas del lema 2.4.1. Dado que $\Delta(A_i)$ es un

subconjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^{M_i} , se sigue que $\bigotimes_{i=1}^N \Delta(A_i)$ también es convexo y compacto. Luego, $B(\alpha)$ es no vacío ya que, por definición,

$$B_i(\alpha_{-i}) = \operatorname{argmax}_{x \in \Delta(A_i)} u_i(x, \alpha_{-i}).$$

Como $\Delta(A_i)$ es compacto y no vacío, y u_i es lineal en x , por el teorema de Weierstrass, $B(\alpha)$ es no vacío. Ahora, con respecto a la convexidad,

- $B(\alpha) \subset \bigotimes_{i=1}^N \Delta(A_i)$ es convexo si y solo si $B_i(\alpha_{-i})$ es convexo para todo i .
- Sean $\alpha'_i, \alpha''_i \in B(\alpha_{-i})$.
- Entonces, dado $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) &\geq u_i(x_i, \alpha_{-i}), \quad \forall x_i \in \Delta(A_i) \\ u_i(\alpha''_i, \alpha_{-i}) &\geq u_i(x_i, \alpha_{-i}), \quad \forall x_i \in \Delta(A_i). \end{aligned}$$

- Así,

$$\lambda u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) + (1 - \lambda) u_i(\alpha''_i, \alpha_{-i}) \geq u_i(x_i, \alpha_{-i}), \quad \forall x_i \in \Delta(A_i).$$

- Por linealidad,

$$u_i(\lambda \alpha'_i + (1 - \lambda) \alpha''_i, \alpha_{-i}) \geq u_i(x_i, \alpha_{-i}), \quad \forall x_i \in \Delta(A_i).$$

Así, $\lambda \alpha'_i + (1 - \lambda) \alpha''_i \in B_i(\alpha_{-i})$, lo que demuestra que $B(\alpha)$ es convexa como correspondencia.

Finalmente, $B(\alpha)$ tiene un grafo cerrado. Supongamos, por contradicción, que $B(\alpha)$ no tiene un grafo cerrado. Entonces, existen secuencias $(\hat{\alpha}^n, \alpha^n) \rightarrow (\hat{\alpha}, \alpha)$ tales que $\hat{\alpha}^n \in B(\alpha^n)$, pero $\hat{\alpha} \notin B(\alpha)$, es decir, existe algún i tal que $\hat{\alpha}_i \notin B_i(\alpha_{-i})$. Por lo tanto, existe $\alpha'_i \in \Delta(A_i)$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) > u_i(\hat{\alpha}_i, \alpha_{-i}) + 3\epsilon. \tag{2.2}$$

Dado que u_i es continua y $\alpha_{-i}^n \rightarrow \alpha_{-i}$, se tiene que para n suficientemente grande,

$$u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}^n) \geq u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) - \epsilon. \tag{2.3}$$

Combinando (2.2) y (2.3),

$$u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}^n) > u_i(\hat{\alpha}_i, \alpha_{-i}) + 2\epsilon \geq u_i(\hat{\alpha}_i^n, \alpha_{-i}^n) + \epsilon,$$

donde la segunda desigualdad sigue de la continuidad de u_i . Esto contradice la suposición de que $\hat{\alpha}_i^n \in B_i(\alpha_{-i}^n)$, completando la demostración. \square

Observación 2.4.5. En caso A_i sea convexo, compacto y no vacío, y \succeq_i sea cuasi-cóncava sobre A_i para todo $i \in N$, la existencia de un EN en estrategias puras está garantizada.

Observación 2.4.6. En economía, tanto la finitud de A_i como continuidad de las funciones de pago no siempre ocurren: Bertrand, subastas, Cournot, modelos de elección y política etc.

Ahora analicemos el caso en el que el espacio de estrategias es infinito no enumerable, lo cual suele ocurrir en la práctica (subastas). Para entender estas cuestiones, es indispensable conocimiento previo en teoría de la medida en espacios métricos, probabilidad y topología general². Primero, se asume que A_i es un espacio métrico compacto. Por lo general, un espacio métrico compacto es un conjunto que puede ser aproximado por conjuntos finitos. Se sigue que $A = \prod_{j \in N} A_j$ es también un espacio métrico compacto. Ahora, $\Delta(A_i)$ es el conjunto de todas las probabilidades sobre los Borelianos \mathcal{B}_{A_i} . O sea, si $\alpha_i \in \Delta(A_i)$, $\alpha_i(D) \geq 0$ para todo $D \in \mathcal{B}_{A_i}$ y $\alpha_i(A_i) = 1$. Más aún, para $\{Q_k\} \subset \mathcal{B}_A$

$$\alpha_i \left(\bigcup_{k \geq 1} Q_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i(Q_k).$$

Se define la convergencia para las estrategias mixtas en este contexto usando la topología débil sobre $\Delta(A_i)$. En esta topología, $\{\alpha_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de distribuciones de probabilidad en $\Delta(A_i)$ converge a α_i si y solo si para toda $f : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ acotada

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_i \in A_i} f(a_i) d\alpha_i^k(a_i) = \int_{a_i \in A_i} f(a_i) d\alpha_i(a_i).$$

²Ver, por ejemplo, Billingsley (1995). Un libro clásico sobre probabilidad es, irónicamente, el de Keynes (1921), quien escribió tanto su famoso tratado de economía (Teoría general del empleo, el interés y el dinero) como uno sobre probabilidad.

Sean $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ dos perfiles de utilidad definidos sobre A , tales que $u_i, \hat{u}_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ son medibles. Definimos la distancia entre los pagos como

$$\max_{i \in N} \sup_{a \in A} |u_i(a) - \hat{u}_i(a)|.$$

Los pagos se extienden al contexto de estrategias mixtas:

$$u_i(\alpha) = \int_{a_N \in A_N} \cdots \int_{a_1 \in A_1} u_i(a) d \left[\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right], \quad \forall \alpha \in \bigotimes_{j \in N} \Delta(A_j).$$

A partir de los perfiles de pago, podemos definir dos juegos $\Gamma, \hat{\Gamma}$. Si α es un equilibrio de Γ , ciertamente no tiene porqué serlo en $\hat{\Gamma}$: Incluso si u y \hat{u} pueden ser arbitrariamente cercanos, los equilibrios no tienen por qué serlo. Por ejemplo, si consideramos $u_1(a_1) = \varepsilon a_1$ y $\hat{u}_1(a_1) = -\varepsilon a_1$, con $A_1 = [0, 1]$, en un caso el equilibrio es 1 y en el otro 0. No obstante, si u y \hat{u} son suficientemente cercanos, sí existe una noción de equilibrio en la que los de Γ y $\hat{\Gamma}$ son cercanos.

Diremos que α es un ε -equilibrio si

$$u_i(a_i, \alpha_{-i}) - u_i(\alpha) \leq \varepsilon, \quad \forall i \in N, \forall a_i \in A_i.$$

Ciertamente, cuando $\varepsilon = 0$, hablamos de un EN. El siguiente resultado se establece en [Fudenberg and Levine \(1986\)](#).

Teorema 2.4.7. Sean Γ y $\hat{\Gamma}$ dos juegos cercanos. Sea γ la distancia entre los perfiles de pago y suponga que α es un ε -equilibrio en $\hat{\Gamma}$. Entonces, α es un $(\varepsilon + 2\gamma)$ -equilibrio de Γ .

Demostración. Para cada jugador i y acción a_i ,

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_{-i}, a_i) - u_i(\alpha) &= (u_i(\alpha_{-i}, a_i) - \hat{u}_i(\alpha_{-i}, a_i)) + (\hat{u}_i(\alpha_{-i}, a_i) - \hat{u}_i(\alpha)) \\ &= 2\gamma + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.8. Suponga que $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, para cada jugador $i \in N$. Sea $(\alpha^k)_{k \geq 1}$ una sucesión de estrategias aleatorizadas en $\bigotimes_{i \in N} \Delta(A_i)$, y sea $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ una sucesión convergente de números no negativos, de forma que α^k es un ε_k -equilibrio para Γ . Denotemos $\bar{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k$ y $\bar{\varepsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k$. Entonces, $\bar{\alpha}$ es un $\bar{\varepsilon}$ -equilibrio para Γ .

Demostración. Para todo $i \in N$ y $a_i \in A_i$,

$$\begin{aligned} u_i(\bar{\alpha}_{-i}, a_i) - u_i(\bar{\alpha}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u_i(\alpha_{-i}^k, a_i) - u_i(\alpha^k)) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Es indispensable relacionar los juegos infinitos con juegos finitos. Una función $f_i : A_i \rightarrow D_i$, con D_i finito, es Borel medible si y solo si para todo $b_i \in D_i$,

$$\{a_i \in A_i \mid f_i(a_i) = b_i\} \in \mathcal{B}.$$

Se dice que $\hat{\Gamma}$ es esencialmente finito si y solo si existe un juego finito $\Gamma^* = (N, (D_i)_{i \in N}, (v_i)_{i \in N})$ y funciones medibles $f_i : A_i \rightarrow D_i$ tal que

$$\hat{u}_i(a) = v_i(f_1(a_1), \dots, f_n(a_n)), \quad \forall i \in N, \quad \forall a \in A.$$

Teorema 2.4.9. Sea $\gamma \geq 0$. Suponga que, para todo $i \in N$, la función de utilidad $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el compacto A . Entonces, existe un juego esencialmente finito $\hat{\Gamma} = (N, (D_i)_{i \in N}, (\hat{u}_i)_{i \in N})$ tal que la distancia entre u y \hat{u} es menor que γ .

Este resultado permite probar que existe un equilibrio de Γ en estrategias aleatorizadas, si las funciones de utilidad $(u_i)_{i \in N}$ son continuas. El teorema de existencia para juegos finitos inmediatamente implica que un equilibrio aleatorizado existe para todo juego esencialmente finito. Los teoremas 2.4.7 y 2.4.9 implican que existe un 2γ -equilibrio de Γ para cualquier γ . Dada la compacidad de $\otimes_{i \in N} \Delta(A_i)$, toda sucesión de estrategias aleatorizadas. Así, haciendo $\gamma = \varepsilon_k/2$ con $\varepsilon_k \rightarrow 0$, podemos construir una sucesión de perfiles de estrategias aleatorizadas que cumplen con el teorema 2.4.8 para $\bar{\varepsilon} = 0$. Así, el límite $\bar{\alpha}$ es un EN de Γ .

2.5. Juegos competitivos y el teorema min-max

Ejemplo 2.5.1. Juego simétrico. Considere un juego con dos personas donde el conjunto de acciones de cada jugador A_i es no vacío, convexo y compacto, $\succeq_i (u_i)$ es continua y cuasi-cóncava sobre A_i . En este caso, una aplicación directa del teorema

de Kakutani asegura la existencia de un EN en estrategias puras. Sea $N = \{1, 2\}$ y suponga que $A_1 = A_2$ y $(a_1, a_2) \succeq_1 (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_2, a_1) \succeq_2 (b_2, b_1)$. Entonces, existe $a_1^* \in A_1$ tal que (a_1^*, a_1^*) . En efecto, definamos $F : A_1 \rightrightarrows A_1$ por $F(a_1) = B_2(a_1)$. La correspondencia F cumple las hipótesis del teorema de Kakutani, por lo que tiene un punto fijo a_1^* . La simetría asegura que $a_1^* \in B_1(a_1^*)$.

Observación 2.5.2. Un juego sin equilibrios de Nash simétricos es el juego de la paloma y el halcón. Dos depredadores pueden comportarse como palomas o bien halcones. Los pagos son:

	Paloma	Halcón
Paloma	(3, 3)	(1, 4)
Halcón	(4, 1)	(0, 0)

El juego tiene dos EN: (Paloma, Halcón) y (Halcón, Paloma).

Definición 2.5.3. Un juego estratégico $\langle \{1, 2\}, (A_i)_{i \in N}, \succeq_i \rangle$ es estrictamente competitivo para todo $a \in A$ y $b \in A$ tenemos $a \succeq_1 b$ si y solo si $b \succeq_2 a$.

Los juegos competitivos se suelen llamar de suma cero pues las preferencias pueden ser representadas por funciones de pago tales que $u_1 + u_2 = 0$.

Definición 2.5.4. Sea $\langle \{1, 2\}, (A_i)_{i \in N}, \succeq_i \rangle$ un juego estrictamente competitivo. La acción $x^* \in A_1$ es un maxminimizador para el jugador 1 si

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y), \quad \forall x \in A_1.$$

Análogamente, la acción $y^* \in A_2$ es un maxminimizador para el jugador 2 si

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y), \quad \forall y \in A_2.$$

Observación 2.5.5. Un maxminimizador para 1 resuelve

$$\max_x \min_y u_1(x, y)$$

mientras que un maxminimizador para 2 resuelve

$$\min_y \max_x u_2(x, y).$$

Lema 2.5.6. Sea $\langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estrictamente competitivo. Entonces

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y).$$

Más aún, $y \in A_2$ resuelve $\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y)$ si y solo si $x \in A_1$ resuelve $\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$.

Demostración. Para cualquier función f , $\min_z (-f(z)) = - \max_z f(z)$ y $\operatorname{argmin}_z (-f(z)) = \operatorname{argmax}_z f(z)$. Se sigue que para cada $y \in A_2$,

$$- \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = \max_{x \in A_1} (-u_2(x, y)) = \max_{x \in A_1} u_1(x, y).$$

Así,

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \left[- \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \right] = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y).$$

□

Proposición 2.5.7. Sea $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estrictamente competitivo.

a) Si (x^*, y^*) es un EN de G entonces x^* es un maxminimizador para el agente 1 e y^* es un maxminimizador para el agente 2.

b) Si (x^*, y^*) es un EN de G entonces

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*).$$

c) Si $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$, x^* es un maxminimizador para el jugador 1, e y^* es un maxminimizador para el jugador 2, entonces (x^*, y^*) es un EN de G .

Demostración. Sea (x^*, y^*) un EN de G . Entonces $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ para todo $y \in A_2$ o, como $u_2 = -u_1$, $u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y)$ para todo $y \in A_2$. Entonces $u_1(x^*, y^*) = \min_y u_1(x^*, y) \leq \max_x \min_y u_1(x, y)$. De manera similar, $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ para todo $x \in A_1$ y por ende $u_1(x^*, y^*) \geq \min_y u_1(x, y)$ para todo $x \in A_1$ de forma que $u_1(x^*, y^*) \geq \max_x \min_y u_1(x, y)$. Entonces $u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y u_1(x, y)$ y x^* es un maxminimizador para el jugador 1.

Un razonamiento análogo para el jugador 2 establece que y^* es un maxminimizador para el jugador 2 y $u_2(x^*, y^*) = \max_y \min_x u_2(x, y)$, por lo que $u_1(x^*, y^*) = \min_y \max_x u_1(x, y)$.

Finalmente, sea $v^* = \max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$. Por el lema 2.5.6 tenemos que $\max_y \min_x u_2(x, y) = -v^*$. Dado que x^* es un maxminimizador para el jugador 1, tenemos que $u_1(x^*, y) \geq v^*$ para todo $y \in A_2$. Análogamente, como y^* es un maxminimizador para el jugador 2 debemos tener $u_2(x, y^*) \geq -v^*$ para todo $x \in A_1$. Sea $y = y^*$ y $x = x^*$ en las dos desigualdades, $u_1(x^*, y^*) = v^*$. Usando que $u_2 = -u_1$, se concluye que (x^*, y^*) es un EN de G . \square

Una derivación alternativa del teorema min-max usando separación de conjuntos convexos se encuentra en el anexo B.

2.6. Tópicos adicionales

En esta sección hacemos un recuento de algunos artículos seminales de la teoría de juegos que exploran extensiones a la noción de equilibrio y existencia propuesta por Nash (?).

- Juegos no cooperativos (?)**: Nash extiende la teoría introducida por von Neumann y Morgenstern en *Theory of Games and Economic Behavior*. El concepto central que introduce es el de equilibrio de Nash. Para ello, define estrategias mixtas y la función de pago denotada como π . Si a_i, t_i, r_i denotan estrategias mixtas, Nash aplica el teorema de Brouwer a la función:

$$a'_i = a_i + \frac{\sum_k \phi_{i,k}(a) \pi_{i,k}}{1 + \sum_k \phi_{i,k}(a) \pi_{i,k}},$$

donde

$$\phi_{i,k}(a) = \max\{0, \pi_{i,k}(a) - \pi_i(a)\}$$

y $\pi_{i,k}$ es la k -ésima estrategia pura. Este trabajo se benefició de los comentarios de Tucker, Gale y Kuhn, así como de un proyecto con Lloyd Shapley para modelar el juego de póker.

- **Juegos cooperativos de dos personas** (Nash, 1953): El estudio de los juegos cooperativos comienza con von Neumann. En este artículo, Nash extiende el problema de negociación en el cual las amenazas juegan un rol crucial. Cada jugador tiene un espacio de estrategias mixtas A_i convexo, compacto y metrizable. Se definen los pares (u_1, u_2) como los niveles de utilidad alcanzables bajo cooperación. Si $\pi(a_1, a_2)$ denotan los pagos, estos son lineales en (a_1, a_2) . El juego es secuencial: los jugadores definen estrategias de amenaza, informan, escogen sus acciones y cooperan si la utilidad es al menos d_i . Si hay un (u_1, u_2) con $u_i \geq d_i$, los pagos son d_i , en caso contrario, los pagos siguen la forma $\pi(t_1, t_2)$. El artículo analiza la elección de $\{t_i, d_i\}_{i=1,2}$.
- **Computando equilibrios para juegos con N personas** (Wilson, 1971): Wilson extiende el trabajo de Lemke y Howson (Lemke and Howson, 1964) sobre juegos de dos jugadores en estrategias mixtas, generalizando el procedimiento a N jugadores. La idea es construir el equilibrio computando secuencialmente equilibrios para juegos con $1 \leq k \leq N$ jugadores. El teorema 1 de Wilson establece que el número de equilibrios en un juego finito es impar. **Nota:** En equilibrio general, la condición de regularidad de una economía asegura también que el número de equilibrios Walrasianos es impar (Echenique, 2015).

2.6.1. Refinamiento del concepto de equilibrio de Nash

En esta sub-sección, seguimos (Myerson, 1978). En palabras del Nobel Roger Myerson, la noción de EN es una de las ideas más elegantes en teoría de juegos. Sin embargo, un juego puede tener muchos equilibrios de Nash, y algunos de ellos conllevan a resultados inconsistentes con la intuición. Selten (Selten, 1975) introduce la noción de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, que constituye un refinamiento de la definición de EN. Consideremos el siguiente juego $\Gamma_{\gamma,\xi}$:

	J2: γ_1	J2: γ_2
J1: ξ_1	(1, 1)	(0, 0)
J1: ξ_2	(0, 0)	(0, 0)

En este juego, tanto (ξ_1, γ_1) como (ξ_2, γ_2) son EN. No obstante, es poco razonable esperar (ξ_2, γ_2) como outcome. A diferencia de Selten (1975), Myerson (1978) solo analiza juegos en representación normal (y no extensiva):

$$\Gamma = \langle \{1, \dots, n\}, A_1, \dots, A_n, u_1, \dots, u_n \rangle,$$

con $|A_i| < \infty$, $u_i : \otimes_{i=1}^n A_i \rightarrow \mathbb{R}$. Se introducen también estrategias mixtas:

$$\Delta(A_i) = \left\{ \alpha_i \in \mathbb{R}^{|A_i|} : \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) = 1, \alpha_i(a_i) \geq 0, \forall a_i \in A_i \right\}.$$

Luego, siguiendo al teoría de la utilidad esperada $u_j : \otimes_{j=1}^n \Delta(A_j) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \left[\prod_{i=1}^n \alpha_i(a_i) \right] u_j(a_1, \dots, a_n).$$

Supóngase que j considera cambiar a una estrategia pura $a_j^* \in A_j$. Se define

$$V(a_j^* | \alpha_1, \dots, \alpha_n) = u_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j^*, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$$

con

$$\alpha_j^*(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } a_j = a_j^* \\ 0, & \text{si } a_j \neq a_j^*. \end{cases}$$

Se dice que a_j es la mejor respuesta en estrategias puras a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si y solo si

$$V_j(a_j | \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \max_{a'_j \in A_j} V_j(a'_j | \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

En estos términos, α es un EN si y solo si

$$V_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq V_j(\alpha_1, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha_n), \forall j, \forall \alpha'_j \in \Delta(A_j).$$

Un resultado importante presentado en (Myerson, 1978) es que, α es un EN si y solo si para $\alpha \in \otimes_{i=1}^n \Delta(A_i)$ y $V_j(a_j | \alpha) < V_j(a'_j | \alpha) \implies \alpha_j(a_j) = 0, \forall j, \forall a_j \in A_j, \forall a'_j \in A_j$. Esta condición implica que, en un equilibrio de Nash, ningún jugador asignará una probabilidad positiva a una estrategia estrictamente dominada en términos de su

utilidad esperada. Esto se sigue de que (denotando $A = \otimes_{i=1}^n A_i$)

$$\begin{aligned}
 V_j(\alpha) - V_j(\alpha_{-j}, \alpha'_j) &= \sum_{a \in A} \left[\prod_{i=1}^n \alpha_i(a_i) \right] u(a_1, \dots, a_n) - \sum_{a \in A} \left[\prod_{i \neq j}^n \alpha_i(a_i) \right] \alpha'_j(a_j) u(a_1, \dots, a_n) \\
 &= \sum_{a \in A} \left[\prod_{i \neq j}^n \alpha_i(a_i) \right] [\alpha_j(a_j) - \alpha'_j(a_j)] u(a_1, \dots, a_n) \\
 &= \sum_{a \in A} \left[\prod_{i \neq j}^n \alpha_i(a_i) \right] \sum_{\tilde{a}_j \in A_j} \sum_{a'_j \in A'_j} \alpha_j(\tilde{a}_j) \alpha'_j(a'_j) [u(\tilde{a}_j, a_{-j}) - u(a'_j, a_{-j})] \\
 &= \sum_{a_j \in A_j} \sum_{a'_j \in A'_j} \alpha_j(a_j) \alpha'_j(a'_j) [V_j(a_j | \alpha) - V_j(a'_j | \alpha)].
 \end{aligned}$$

Enseguida, Myerson estudia el equilibrio perfecto introducido por [Selten \(1975\)](#), pero bajo un nuevo enfoque. Para cualquier conjunto finito M , se define $\Delta^\circ(M)$ como el conjunto de distribuciones de probabilidad que asignan peso positivos a todos los elementos en M . En particular:

$$\Delta^\circ(A_i) = \left\{ \alpha_i \in \mathbb{R}^{|A_i|} : \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) = 1, \alpha_i(a'_i) > 0, \forall a'_i \in A_i \right\}. \quad (2.4)$$

El conjunto (2.4) se conoce como el conjunto de las estrategias totalmente mixtas para el jugador i . Nuevamente, en palabras de Myerson, heurísticamente, un equilibrio perfecto es una combinación de estrategias totalmente mixtas, tales que, para cualquier jugador j y cualquier estrategia pura $a_j \in A_j$, si a_j no es una mejor respuesta a α para j , entonces $\alpha_j(a_j)$ es arbitrariamente chico. Por lo tanto, en un equilibrio perfecto, un jugador no puede ignorar ningún punto en $\otimes_{i=1}^n A_i$. Formalmente, sea $\epsilon > 0$. Definimos un ϵ -equilibrio perfecto como cualquier combinación de estrategias totalmente mixtas, i.e. $\alpha \in \otimes_{i=1}^n \Delta^\circ(A_i)$ tal que

$$V_j(a_j | \alpha) < V_j(a'_j | \alpha) \implies \alpha_j(a_j) \leq \epsilon.$$

De este modo, un ϵ -equilibrio perfecto es una combinación de estrategias mixtas tales que cada estrategia pura recibe una probabilidad positiva, pero solo mejores respuesta tienen una probabilidad mayor a ϵ .

Un equilibrio perfecto se define como el límite de un ϵ -equilibrio perfecto. Esto es, $\alpha \in \otimes_{i=1}^n \Delta(A_i)$ es un equilibrio perfecto si y solo si existe una secuencia $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ y $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ tal que

- Para todo k $\epsilon_k > 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$,
- $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ es un ϵ_k -equilibrio perfecto, y
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^k(a_i) = \alpha_i(a_i)$ para todo $a_i \in A_i$.

En Selten (1975), Selten probó que todo equilibrio perfecto es un equilibrio de Nash. La prueba se sigue de la continuidad de $V_j(a_j|\alpha)$ en α . Todos los equilibrio perfectos son equilibrios de Nash, pero la recíproca es falsa. Por ejemplo, en el juego, $\Gamma_{\xi, \gamma}$, los únicos ϵ -equilibrios son aquellos en los que $\alpha_1(\xi_2), \alpha_2(\xi_2) \leq \epsilon$. En efecto, cuando la estrategias son totalmente mixtas, la probabilidad positiva asignada al pago 1 hace que solo ξ_1 y γ_1 sean jugadas con una probabilidad no arbitrariamente chica. Por ende, si bien tanto (ξ_1, γ_1) como (ξ_2, γ_2) son EN, solo (ξ_1, γ_1) es un equilibrio perfecto.

Ejemplo 2.6.1. Consideremos ahora el siguiente juego:

$J1 \backslash J2$	γ_1	γ_2	γ_3
ξ_1	(1, 1)	(0, 0)	(-9, -9)
ξ_2	(0, 0)	(0, 0)	(-7, -7)
ξ_3	(-9, -9)	(-7, -7)	(-7, -7)

El outcome obvio del juego es (ξ_1, γ_1) . Ahora bien, (ξ_1, γ_1) , (ξ_2, γ_2) y (ξ_3, γ_3) son equilibrios de Nash. Por otro lado, (ξ_3, γ_3) no es perfecto. Para verificar que (ξ_2, γ_2) es un equilibrio perfecto, definamos α_1^ϵ y α_2^ϵ por

$$\begin{aligned} \alpha_1^\epsilon(\xi_1) &= \epsilon \\ \alpha_1^\epsilon(\xi_2) &= 1 - 2\epsilon \\ \alpha_1^\epsilon(\xi_3) &= \epsilon \\ \alpha_2^\epsilon(\gamma_1) &= \epsilon \\ \alpha_2^\epsilon(\gamma_2) &= 1 - 2\epsilon \\ \alpha_2^\epsilon(\gamma_3) &= \epsilon, \end{aligned}$$

y notemos que $(\alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon)$ forman un ϵ -equilibrio perfecto. Por ejemplo,

$$V_1(\xi_1 | \alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon) = -8\epsilon, \quad V_1(\xi_2 | \alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon) = -7\epsilon, \quad V_1(\xi_3 | \alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon) = -7 - 2\epsilon,$$

de forma que ξ_2 es la mejor respuesta. Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que ξ_2 y γ_2 forman un equilibrio perfecto.

Así, para discernir entre (ξ_1, γ_1) y (ξ_2, γ_2) , se requiere una nueva noción de equilibrio: equilibrio propio.

Definición 2.6.2. ϵ -Equilibrio propio. Un ϵ -equilibrio propio es un perfil de estrategias totalmente mixtas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \otimes_{i=1}^n \Delta^\circ(A_i)$ si

$$V_j(a_j | \alpha_1, \dots, \alpha_n) < V_j(a'_j | \alpha_1, \dots, \alpha_n) \implies \alpha_j(a_j) \leq \epsilon \cdot \alpha_j(a'_j)$$

para todo $j, a_j \in A_j, a'_j \in A_j$.

Note que un ϵ -equilibrio propio es una combinación de perfiles de estrategia totalmente mixto, en el cual cada jugador le da a su *mejor* respuesta mucha más probabilidad que su *peor* respuesta por un factor ϵ^{-1} .

Es fácil ver que un ϵ -equilibrio propio es un ϵ -equilibrio perfecto, pues $\epsilon \cdot \alpha_j(a'_j) \leq \epsilon$, pero la converso es falsa. Por ejemplo, en el ejemplo 2.6.1, para $\epsilon \in (0, 1)$, $V_1(\alpha_3 | \alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon) < V_1(\alpha_1 | \alpha_1^\epsilon, \alpha_2^\epsilon)$, pero $\alpha_1(\alpha_3) \geq \epsilon \cdot \alpha_1(\alpha_1)$.

Ahora bien, un **equilibrio propio** se define como el límite de ϵ -equilibrios propios. Esto es, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \otimes_{i=1}^n \Delta(A_i)$ es un equilibrio propio si y solo si existe una secuencia $\{\epsilon_k\}_{k \geq 0}$ y $\{(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)\}_{k \geq 0}$ tal que

- cada $\epsilon_k > 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$
- cada $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ es un ϵ_k -equilibrio propio, y
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^k(a_i) = \alpha_i(a_i)$, para todo i y para todo $a_i \in A_i$.

Myerson provee dos resultados importantes en relación a los equilibrios propios. El primero es una proposición que establece que el conjunto de equilibrios propios está estrictamente incluido en el conjunto de equilibrios perfectos, a su vez incluidos en el conjunto de equilibrios de Nash.

El segundo resultado es el de la existencia de equilibrios propios.

Teorema 2.6.3. Para todo juego normal Γ , existe al menos un equilibrio propio.

Demostración. Primero se muestra que existe un ϵ -equilibrio, para $\epsilon \in (0, 1)$. Sea $m = \max_i |A_i|$. Dado ϵ , considere $\delta = \epsilon^m/m$. Para cada jugador j , sea

$$\Delta^*(A_j) = \{\alpha_j \in \Delta(A_j) \mid \alpha_j(a_j) \geq \delta, \forall a_j \in A_j\}.$$

Se sigue que $\Delta^*(A_j)$ es un conjunto no vacío y compacto de $\Delta^0(A_j)$. Ahora, definamos la correspondencia

$$F_j : \prod_{i=1}^n \Delta^*(A_i) \rightrightarrows \Delta^*(A_j)$$

dada por

$$F_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\{ \alpha_j^* \in \Delta^*(A_j) \mid \begin{array}{l} V_j(a_j \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n) < V_j(a'_j \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \alpha_j^*(a_j) \leq \epsilon \cdot \alpha_j^*(a'_j), \forall a_j, a'_j \in A_j \end{array} \right\}.$$

Para cualquier $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ los puntos en $F_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ satisfacen una colección finita de desigualdades, por lo que $F_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un conjunto convexo y cerrado. Para verificar que no es vacío, sea $\rho(a_j)$ el número de estrategias puras $a'_j \in A_j$ tal que $V_j(a_j \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n) < V_j(a'_j \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, entonces haciendo

$$\alpha_j^*(a_j) = \frac{\epsilon^{\rho(a_j)}}{\sum_{a'_j \in A_j} \epsilon^{\rho(a'_j)}}$$

genera $\alpha_j^* \in F_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Notemos que $\alpha_j^*(a_j) \geq \epsilon^m/m$, por lo que $\alpha_j^* \in \Delta^*(A_j)$. Finalmente, la continuidad de cada $V_j(a_j \mid \cdot)$ implica que $F_j(\cdot)$ debe ser semicontinua superior.

Sea $F(\cdot) = \prod_{j=1}^n F_j(\cdot)$. Entonces, $F : \prod_{i=1}^n \Delta^*(A_i) \rightrightarrows \prod_{i=1}^n \Delta^*(A_i)$ satisface todas las condiciones del teorema del punto fijo de Kakutani [Kakutani \(1941\)](#). Por lo tanto, existe $(\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_n^\epsilon) \in \prod_{i=1}^n \Delta^*(A_i)$ tal que $(\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_n^\epsilon) \in F(\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_n^\epsilon)$. Este es claramente un $(\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_n^\epsilon)$ un ϵ -equilibrio propio.

Finalmente, al ser $\prod_{i=1}^n \Delta(A_i)$ compacto, debe existir una subsucesión convergente y equilibrio propio $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_n^\epsilon)$. \square

2.6.2. Sobre la unicidad del equilibrio de Nash

El artículo [Chenault \(1986\)](#) estudia la unicidad del equilibrio de Nash en juegos económicos y establece condiciones suficientes para garantizar que dicho equilibrio sea

único. Sea un juego con n jugadores donde cada jugador j elige una estrategia p_j en \mathbb{R}_+ y define su función de reacción $\Phi_j(p_{-j})$. Un equilibrio de Nash es un punto $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ tal que $p_j^* = \Phi_j(p_{-j}^*)$, lo que equivale a encontrar el punto fijo de $\Phi(p) = [\Phi_j(p_{-j})]$. El conjunto de estos elementos se denota Σ . Se define la función de desviación $v(p) = \Phi(p) - p$, cuyo equilibrio satisface $v(p^*) = 0$. Se presentan cuatro condiciones para la unicidad: (1) continuidad de Φ_j , (2) acotación $0 < p_j < d_j$, (3) condiciones en la frontera $\Phi_j(0) > 0$, $\Phi_j(d_{-j}) < d_j$, y (4) la condición clave sobre la matriz Jacobiana Dv_p , definida como $Dv_p = D\Phi_p - I_n$, donde $D\Phi_p$ tiene elementos $(D\Phi_p)_{jk} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k}$. La matriz explícita es

$$Dv_p = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & -1 & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial p_2} & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

La unicidad del equilibrio de Nash se garantiza si el determinante de Dv_p tiene signo constante en Σ , es decir, $\forall p \in \Sigma$, $\text{signo}(|Dv_p|) = \text{constante}$. Bajo esta condición, el conjunto de equilibrios satisface $|Z| = 1$ si $\forall p \in \Sigma$, $|Dv_p| \neq 0$.

La prueba es como sigue: Se define la función de desviación $v(p) = \Phi(p) - p$, y se estudia la unicidad del equilibrio resolviendo $v(p) = 0$. Se supone sin pérdida de generalidad que v es C^1 (si no, se puede aproximar por una función C^1 y tomar el límite). Como no hay equilibrios en la frontera, se construye una variedad diferenciable Ω homeomorfa a un disco n -dimensional, que contiene el conjunto de equilibrios Σ en su interior.

Dado que la función $v(p)$ apunta hacia adentro en la frontera de Ω , se concluye que es homotópica al mapeo antipodal, lo que implica que el grado es $(-1)^n$. Se tiene la relación:

$$\sum_{p^* \in \Sigma} \text{sign}(\det Dv_{p^*}) = (-1)^n.$$

Sin embargo, dado que $\det Dv_p$ tiene signo constante en Σ , el lado izquierdo de la ecuación solo puede ser ± 1 , lo que implica que $|Dv_p| = 1$, es decir, el equilibrio de Nash es único.

2.6.3. Equilibrio de respuesta cuantal

El equilibrio de respuesta cuantal es una extensión del equilibrio de Nash que introduce ruido en la toma de decisiones de los jugadores. En lugar de elegir la mejor respuesta con probabilidad uno, los jugadores seleccionan estrategias con mayor probabilidad cuando tienen mayores pagos esperados. Esto permite una modelización más realista de la racionalidad limitada y proporciona un marco econométrico estructural para analizar datos de juegos experimentales y de campo.

Seguimos [McKelvey and Palfrey \(1995\)](#). Se empieza definiendo un juego en forma normal:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$.
- Un conjunto de estrategias puras $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{iJ_i}\}$ para cada jugador $i \in N$.
- Una función de utilidad $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \otimes_{i \in N} A_i$ representa el espacio de perfiles de acciones puras.
- Un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A_i dado por:

$$\Delta_i = \left\{ (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iJ_i}) \mid \sum_{j=1}^{J_i} \alpha_{ij} = 1, \alpha_{ij} \geq 0 \right\} \quad (2.5)$$

donde $\alpha_{ij} = \alpha_i(a_{ij})$ es la probabilidad de que el jugador i elija la acción a_{ij} .

El conjunto de estrategias mixtas de todos los jugadores se define como:

$$\Delta = \otimes_{i=1}^n \Delta_i \quad (2.6)$$

Así, con esta notación, un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias mixtas $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que:

$$u_i(\alpha) \geq u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) \quad \forall \alpha'_i \in \Delta_i. \quad (2.7)$$

El espacio de pagos posibles está dado por:

- $X_i = \mathbb{R}^{J_i}$ es el espacio de pagos posibles para cada jugador i .

- $X = \otimes_{i \in N} X_i$ es el espacio conjunto de pagos para todos los jugadores.
- Sea $\bar{u} : \Delta \rightarrow X$ definida por:

$$\bar{u}(\alpha) = (\bar{u}_1(\alpha), \dots, \bar{u}_n(\alpha)), \quad (2.8)$$

donde

$$\bar{u}_{ij}(\alpha) = u_i(a_{ij}, \alpha_{-i}). \quad (2.9)$$

Una versión del equilibrio de Nash en la que el pago de cada jugador por cada acción está sujeto a un error aleatorio. Específicamente:

1. Para cada jugador i y cada acción $j \in \{1, \dots, J_i\}$, y para cualquier $\alpha \in \Delta$, definimos:

$$\hat{u}_{ij}(\alpha) = \bar{u}_{ij}(\alpha) + \varepsilon_{ij}$$

donde el vector de error del jugador i es $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iJ_i})$ y está distribuido según una función de densidad conjunta $f_i(\varepsilon_i)$.

La familia de funciones $f = (f_1, \dots, f_n)$ es admisible si, para cada i , la distribución marginal de f_i existe para cada ε_{ij} y

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0.$$

2. Para cualquier $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ con $\bar{u}_i \in \mathbb{R}^{J_i}$, definimos el conjunto de respuesta $R_{ij} \subset \mathbb{R}^{J_i}$ como:

$$R_{ij}(\bar{u}_i) = \left\{ \varepsilon_i \in \mathbb{R}^{J_i} : \bar{u}_{ij}(\alpha) + \varepsilon_{ij} \geq \bar{u}_{ik}(\alpha) + \varepsilon_{ik}, \quad \forall k = 1, \dots, J_i \right\}.$$

Es decir, dado α , el conjunto $R_{ij}(\bar{u}_i(\alpha))$ especifica la región de errores que llevarán a i a elegir la acción a_{ij} .

3. La probabilidad de que el jugador i elija la acción a_{ij} dado \bar{u} está dada por:

$$\alpha_{ij}(\bar{u}_i) = \int_{R_{ij}(\bar{u}_i)} f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

La función $\alpha_i : \mathbb{R}^{J_i} \rightarrow \Delta_i$ se llama función de respuesta cuantil del jugador i . Sea $G = \langle N, A, u \rangle$ un juego en forma normal y sea f una distribución admisible de errores. Un equilibrio de respuesta cuantil (QRE) de G es cualquier $\alpha \in \Delta$ tal que:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\bar{u}_i(\alpha)) \quad \forall i \in N, \forall j \in \{1, \dots, J_i\}. \quad (2.10)$$

Las propiedades de la función de respuesta cuantil incluyen:

- La existencia de $\alpha \in \Delta$.
- Continuidad de α_i en \mathbb{R}^{J_i} .
- Monotonicidad: α_{ij} es monótonamente creciente en \bar{u}_{ij} .
- Si los errores ε_{ij} y ε_{ik} son i.i.d., entonces:

$$\bar{u}_{ij} \geq \bar{u}_{ik} \Rightarrow \alpha_{ij}(\bar{u}) \geq \alpha_{ik}(\bar{u}). \quad (2.11)$$

Un caso particular es el equilibrio logit (errores EVI), donde la función de respuesta cuantil logística está definida por:

$$\alpha_{ij}(x_i) = \frac{e^{\lambda x_{ij}}}{\sum_{k=1}^{J_i} e^{\lambda x_{ik}}}. \quad (2.12)$$

El equilibrio logit requiere:

$$\alpha_{ij}(x_i) = \frac{e^{\lambda \bar{u}_{ij}(\alpha)}}{\sum_{k=1}^{J_i} e^{\lambda \bar{u}_{ik}(\alpha)}}. \quad (2.13)$$

Algunos resultados fundamentales incluyen:

- Sea α la función de respuesta cuantil logística y $\{\lambda_t\}$ una sucesión tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \infty$. Sea $\{\alpha^{(t)}\}_{t \geq 1}$ una secuencia correspondiente con $\alpha^{(t)} \in \pi^*(\lambda_t)$ para todo t , donde

$$\pi^*(\lambda) = \left\{ \alpha \in \Delta : \alpha_{ij} = \frac{\exp(\lambda \bar{u}_{ij}(\alpha))}{\sum_{k=1}^{J_i} \exp(\lambda \bar{u}_{ik}(\alpha))}, \quad \forall i, j \right\}$$

es la correspondencia logit. Entonces,

$$\alpha^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{(t)} \quad (2.14)$$

es un equilibrio de Nash.

- Para casi cualquier juego G :
 - $\pi^*(\lambda)$ es unívoca para casi todo λ .
 - π^* es semicontinua superior.
 - El gráfico de π^* contiene una única rama que comienza en el centroide para $\lambda = 0$ y converge a un único equilibrio de Nash cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

Juegos estratégicos aplicados

3.1. Oligopolio

La teoría de juegos ha ejercido una influencia profunda sobre la organización industrial (Tirole, 1988), al permitir el paso de descripciones institucionales informales a modelos teóricos con coherencia interna y, en muchos casos, contrastables empíricamente. En particular, el análisis del oligopolio puede abordarse formalmente como un juego estratégico. El primer trabajo que presenta un modelo con estas características —en el que las firmas eligen cantidades como estrategia— es el de Cournot (1838). Cuando hablamos de *competencia a la Cournot*, nos referimos a una situación en la que:

1. Las empresas producen un bien homogéneo;
2. Eligen cantidades de forma simultánea e independiente.

3.1.1. Competencia Cournot

En este modelo, hay n empresas y el espacio de estrategias de cada jugador es $A_i = \mathbb{R}_+$. En efecto cada firma decide cuando ofertar $q_i \geq 0$. Luego, los pagos de cada jugador vienen dados por

$$\pi_i = q_i P(Q) - C_i(q_i),$$

donde $Q = q_1 + \dots + q_n$ es el producto total del oligopolio, $P(\cdot)$ es la función inversa de demanda y $C_i(\cdot)$ el costo de la empresa i . Dados estos elementos:

- La correspondencia de mejor respuesta corresponde a

$$B_i(q_{-i}) = \operatorname{argmax}_{q_i \in \mathbb{R}_+} [q_i P(Q) - C_i(q_i)].$$

- El EN es $q^* = (q_i^*)_{i=1, \dots, n}$ tal que $q_i^* \in B_{-i}(q_{-i}^*)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

La CPO provee

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \underbrace{P(Q) + P'(Q)q_i}_{\text{Ingreso marginal}} - \underbrace{C'_i(q_i)}_{\text{Costo marginal}} = 0. \quad (3.1)$$

A partir de (3.1) deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{P(Q) - C'_i(q_i)}{P(Q)} &= -\frac{P'(Q)q_i}{P(Q)} \\ &= \frac{q_i Q}{Q P} \left(-\frac{1}{Q'(P)} \right) \\ &= \frac{s_i}{\epsilon}, \end{aligned}$$

donde s_i es el share de la firma i en el mercado y ϵ la elasticidad precio-demanda. Note que se ha usado el teorema de la función inversa. Recordemos que la demanda agregada puede representarse como una función estrictamente decreciente del precio, es decir, $Q = D(P)$ con $D'(P) < 0$. Dado que D es continua y diferenciable, y su derivada no se anula, existe una función inversa localmente diferenciable $P = D^{-1}(Q)$ ¹. Aplicando dicho resultado, la derivada del precio con respecto a la cantidad viene dada por:

$$P'(Q) = \frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}} = \frac{1}{D'(P)} = \frac{1}{D'(D^{-1}(Q))}.$$

De este modo:

¹Por el *teorema de la función inversa*, si f es diferenciable con $f'(a) \neq 0$, entonces existe una vecindad de a en la cual f es invertible y la inversa f^{-1} es diferenciable. Además, su derivada está dada por:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- **Mayor poder de mercado con mayor participación:** Cuanto mayor es el share s_i , mayor es el *markup* que puede aplicar la firma. Es decir, el poder de mercado está directamente relacionado con el tamaño relativo de la firma. La firma grande debería producir más.
- **Mayor competencia con mayor elasticidad:** Si la demanda es muy elástica (grande ϵ), incluso firmas grandes tienen un *markup* reducido. Esto implica que la sensibilidad del consumidor al precio disciplina el poder de mercado.

A partir de la relación

$$\frac{P(Q) - C'_i(q_i)}{P(Q)} = \frac{s_i}{\epsilon},$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{P(Q) - C'_i(q_i)}{P(Q)} \right) s_i = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{\epsilon} = \frac{HHI}{\epsilon}, \quad (3.2)$$

donde HHI denota el índice de Herfindahl-Hirshman.

La expresión (3.2) representa el *markup promedio ponderado por participación de mercado*, es decir, el poder de mercado agregado de la industria en equilibrio de Cournot.

- **Más concentración, mayor poder de mercado agregado:** El numerador, $HHI = \sum_{i=1}^n s_i^2$, es el *índice de Herfindahl-Hirschman*, una medida estándar de concentración de mercado. Cuando el HHI se aproxima a 1, indica un mercado altamente concentrado, cercano al monopolio, lo que eleva el poder de mercado total.
- **Caso competitivo simétrico:** Si todas las firmas tienen igual tamaño ($s_i = 1/n$), se tiene:

$$HHI = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n},$$

y el *markup* promedio es entonces $\frac{1}{n\epsilon}$, que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, recuperando el resultado competitivo como caso límite.

- **Número efectivo de firmas:** El inverso del índice, $1/HHI$, se conoce como el *número efectivo de firmas* en el mercado. Aunque el número total de firmas sea alto, si pocas dominan el mercado, el HHI será alto y $1/HHI$ será bajo, reflejando menor competencia efectiva.

- Si se conoce la elasticidad-precio de la demanda (ϵ) y el índice de concentración HHI , entonces es posible calcular la desviación promedio respecto al comportamiento competitivo (precio igual a costo marginal), bajo el supuesto de competencia de Cournot.

El *índice de Herfindahl-Hirschman* fue propuesto originalmente por [Herfindahl \(1950\)](#) y, de forma independiente, por [Hirschman \(1945\)](#). Hoy en día es una herramienta clave en el análisis de competencia y regulación industrial.

Ejemplo 3.1.1. Cournot con 2 firmas y costos heterogéneos convexos.

Consideremos el siguiente escenario:

- 2 empresas: $N = \{1, 2\}$.
- Demanda lineal $P(Q) = 1 - Q$.
- La empresa 1 es más eficiente: $C_i(q_i) = \frac{iq_i^2}{4}$.

La CPO provee

$$1 - Q - q_i - \frac{iq_i}{2} = 0, \quad q_i > 0.$$

Se sigue que

$$B_i(q_{-i}) = \max \left\{ 0, \frac{1 - q_{-i}}{2 + i/2} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$B_1(q_2) = \max \left\{ 0, \frac{2}{5}(1 - q_2) \right\}$$

$$B_2(q_1) = \max \left\{ 0, \frac{1}{3}(1 - q_1) \right\}.$$

Note que, como $C'_i(0) = 0$ para $i = 1, 2$, nunca es óptimo producir $q_i = 0$. Por ende,

$$B_1(q_2) = \frac{2}{5}(1 - q_2)$$

$$B_2(q_1) = \frac{1}{3}(1 - q_1).$$

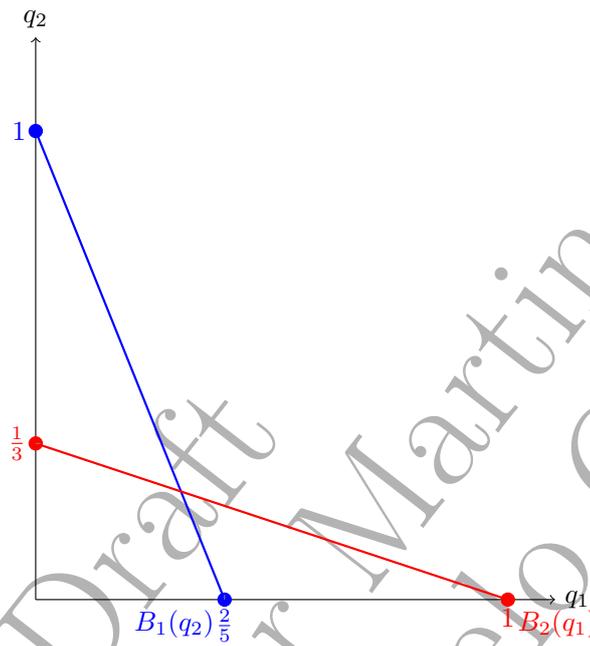


Figura 3.1 Mejor respuesta.

Se sigue que $q_1^* = 4/14$, $q_2^* = 3/13$ y $Q = 7/13$.

Observación 3.1.2. En el equilibrio competitivo, $p = C'(\cdot)$. Por ende, con respecto al ejemplo anterior, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$p = C'_1(q_1) = \frac{q_1}{2}$$

$$p = C'_2(q_2) = q_2$$

$$p = 1 - q_1 - q_2.$$

Se llega a que $q_1 = 1/3$, $q_2 = 1/4$ y $Q = 3/4$.

Ejemplo 3.1.3. Volvamos al ejemplo 3.1.1, pero consideremos ahora n firmas. El beneficio de la firma i es:

$$\pi_i = (1 - Q)q_i - \frac{i}{4}q_i^2.$$

La condición de primer orden (FOC) para la firma i lleva a:

$$\left(1 + \frac{i}{2}\right)q_i + Q = 1, \quad \text{lo cual implica} \quad q_i = \frac{1 - Q}{1 + \frac{i}{2}}.$$

Sustituyendo en la suma total $Q = \sum_{j=1}^n q_j$ se obtiene:

$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{1-Q}{1+\frac{j}{2}} = (1-Q) \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\frac{j}{2}}.$$

Resolviendo para Q :

$$Q = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\frac{j}{2}}}{1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\frac{j}{2}}} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{2}{2+j}}{1 + \sum_{j=1}^n \frac{2}{2+j}}.$$

Finalmente, la cantidad de equilibrio de la firma i es:

$$q_i^* = \frac{1-Q}{1+\frac{i}{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{2}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{2}{2+j}\right)}.$$

Esta es la *fórmula cerrada* del equilibrio de Cournot en este modelo con costos crecientes en i . Finalmente, en el equilibrio competitivo:

- **Precio de equilibrio:**

$$P^* = \frac{1}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}.$$

- **Cantidad individual de la firma i :**

$$q_i^* = \frac{2P^*}{i} = \frac{2}{i \left(1 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right)}.$$

- **Cantidad total de equilibrio:**

$$Q^* = \sum_{i=1}^n q_i^* = \frac{2}{1 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Ejemplo 3.1.4. Cournot general con costos lineales. Consideramos un mercado con $n \geq 2$ empresas, $N = \{1, \dots, n\}$, donde:

- La demanda inversa es lineal: $P(Q) = 1 - Q$.
- Cada firma i enfrenta un costo lineal: $C_i(q_i) = cq_i$, con $0 < c < 1$.

El beneficio de la firma i es:

$$\pi_i = (1 - Q)q_i - cq_i = (1 - q_i - Q_{-i})q_i - cq_i,$$

donde $Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$. La condición de primer orden (FOC) es:

$$1 - Q - q_i - c = 0 \quad \text{si } q_i > 0.$$

La mejor respuesta de la firma i es entonces (la solución sí puede ser de esquina):

$$B_i(q_{-i}) = \max \left\{ 0, \frac{1 - c - Q_{-i}}{2} \right\}.$$

En equilibrio simétrico se cumple $q_i = \max\{0, 1 - c - Q\}$, es decir, las decisiones individuales dependen del residuo del total. El equilibrio de Nash en cantidades es:

$$q_i^* = \frac{1 - c}{n + 1}, \quad \text{para todo } i.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1 - c - Q_{-i}}{2} \\ q^* &= \frac{1 - c - (n - 1)q^*}{2} \\ q^* + \frac{n - 1}{2}q^* &= \frac{1 - c}{2} \\ q^*(2 - 1 + n) &= 1 - c. \end{aligned}$$

Y el precio de equilibrio correspondiente es:

$$P(Q^*) = 1 - \sum_{i=1}^n q_i^* = 1 - n \cdot \frac{1 - c}{n + 1} = \frac{1 + nc}{n + 1}.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, $P(Q^*) \rightarrow c$, $q_i^* \rightarrow 0$, $Q^* \rightarrow 1 - c$. Así, bajo competencia de Cournot (es decir, competencia en cantidades), un mayor número de empresas incrementa el nivel de competencia en el mercado. Esto tiene dos implicancias importantes:

- A medida que $n \rightarrow \infty$, el equilibrio de Cournot converge al resultado competitivo.
- Por tanto, **más empresas permiten acercarse al comportamiento competitivo** y generan beneficios para los consumidores a través de precios más bajos.

Finalmente, se verifica que $(P - MC)/P = s_i/\epsilon$:

- **Índice de Lerner:**

$$\frac{P^* - c}{P^*} = \frac{\frac{1+nc}{n+1} - c}{\frac{1+nc}{n+1}} = \frac{n + 1}{1 + nc} \cdot \left(\frac{1 + nc - c(n + 1)}{n + 1} \right) = \frac{1 + nc - c(n + 1)}{1 + nc} = \frac{1 - c}{1 + nc}.$$

- **Market share:**

$$s_i = \frac{q_i^*}{Q^*} = \frac{\frac{1 - c}{n + 1}}{\frac{1 - c}{n(1 - c)}} = \frac{1 - c}{1 - c} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

- **Elasticidad-precio de la demanda:**

$$\epsilon = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 1 \cdot \frac{P^*}{Q^*} = \frac{\frac{1+nc}{n+1}}{\frac{n(1-c)}{n+1}} = \frac{1+nc}{n(1-c)}.$$

- **Por lo tanto,**

$$\frac{s_i}{\epsilon} = \frac{1/n}{\frac{1+nc}{n(1-c)}} = \frac{1-c}{1+nc}$$

3.1.2. Competencia de Bertrand

En 1883 (Bertrand, 1883), Joseph Bertrand criticó el modelo de Cournot, especialmente en comparación con el enfoque de Walras. Su principal cuestionamiento fue metodológico: ¿por qué asumir que las empresas compiten eligiendo cantidades? Desde su perspectiva, resulta más realista suponer que las empresas fijan precios, no cantidades, ya que los precios suelen ser más visibles y fácilmente ajustables en la práctica.

Este planteamiento da lugar al modelo conocido como competencia de Bertrand, donde las firmas compiten directamente mediante la fijación de precios, y no a través de las cantidades ofertadas. En el contexto del modelo original de Bertrand, se asume que las empresas producen un bien homogéneo, por lo que los consumidores siempre comprarán al proveedor que ofrezca el

Consideramos un mercado con dos empresas, $N = \{1, 2\}$, que compiten fijando precios en lugar de cantidades. Cada empresa $i \in N$ elige un precio $p_i \in \mathbb{R}_+$. La demanda depende del precio más bajo ofrecido en el mercado.

- La función de demanda es lineal:

$$Q(P) = \max\{1 - P, 0\},$$

donde $P = \min\{p_1, p_2\}$ representa el precio más bajo entre las dos empresas.

- Si una empresa fija un precio menor al de su competidora, obtiene toda la demanda del mercado, es decir, vende $Q(P)$ mientras la otra firma no vende nada.

- En caso de empate de precios ($p_1 = p_2$), se supone que las empresas comparten el mercado equitativamente. Esta regla de desempate no afecta el resultado principal del modelo en este contexto, aunque puede ser relevante en otras situaciones.
- Los costos son lineales, simétricos y constantes:

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad \text{con } 0 < c < 1.$$

Este modelo ilustra cómo, incluso con solo dos empresas idénticas en costos, la competencia en precios puede inducir un resultado competitivo, como planteó Joseph Bertrand en su crítica al modelo de Cournot.

La función de beneficios de la firma 1 está dada por:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (1 - p_1)(p_1 - c) & \text{si } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}(1 - p_1)(p_1 - c) & \text{si } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Nota: Si la firma 1 actúa como monopolista (sin competencia), maximiza:

$$\max_{p_1} (1 - p_1)(p_1 - c).$$

Resolviendo la condición de primer orden:

$$\frac{d}{dp_1} [(1 - p_1)(p_1 - c)] = 0,$$

lo cual implica que

$$p_1^m = \frac{1 + c}{2}.$$

Este es el **precio de monopolio**.

Mejor respuesta de la firma 1: La correspondencia de mejor respuesta de la firma 1, denotada $B_1(p_2)$, es:

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \frac{1+c}{2} & \text{si } p_2 > \frac{1+c}{2} \\ \emptyset & \text{si } c < p_2 \leq \frac{1+c}{2} \\ [c, \infty) & \text{si } p_2 = c \\ (p_2, \infty) & \text{si } p_2 < c \end{cases}$$

La situación para la firma 2 es completamente análoga.

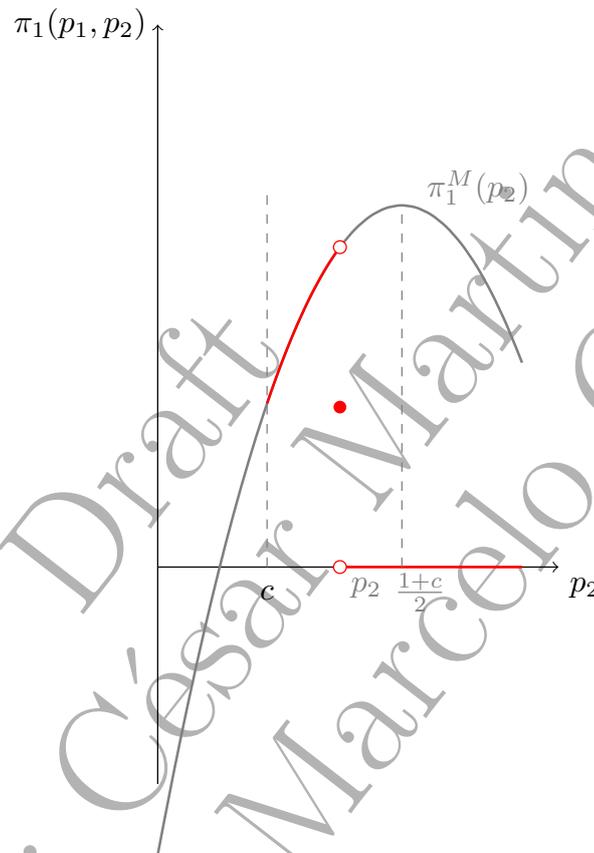


Figura 3.2 Beneficios en Bertrand.

Interpretación:

- Si $p_2 > \frac{1+c}{2}$, la firma 1 puede comportarse como monopolista y fijar el precio óptimo $\frac{1+c}{2}$.
- Si $p_2 = c$, cualquier $p_1 \geq c$ conduce a empate y ganancias no negativas. Por tanto, $B_1(p_2) = [c, \infty)$.
- Si $p_2 < c$, la firma 2 está ofreciendo un precio no rentable. La firma 1 no tiene incentivos a producir. En este caso, la mejor respuesta incluye cualquier p_1 tal que $p_2 < p_1 < c$, ya que garantiza no producción. No obstante, elegir un precio por debajo de c puede ser riesgoso si la empresa se equivoca respecto al comportamiento de su rival.

- Si $c < p_2 \leq \frac{1+c}{2}$, la mejor respuesta es *vacía*, es decir, no hay ningún precio p_1 que sea óptimo. Esto se debe a que los pagos de la firma 1 son discontinuos: aumentan a medida que p_1 se acerca a p_2 desde abajo, pero caen bruscamente cuando $p_1 = p_2$, pues pasa de captar toda la demanda a compartirla, reduciendo sus beneficios a la mitad. Esta discontinuidad hace que no haya ningún máximo.
- Una posible solución técnica es introducir precios discretos, es decir, restringir $p_1, p_2 \in \{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots\}$ para algún $\varepsilon > 0$. En este caso, la mejor respuesta se vuelve bien definida: si $c + \varepsilon < p_2 \leq \frac{1+c}{2}$, entonces

$$B_1(p_2) = p_2 - \varepsilon.$$

Definición 3.1.5. Estrategia estrictamente dominada. Una estrategia $a_i \in A_i$ es *estrictamente dominada* para el jugador i si existe otra estrategia $a'_i \in A_i$ tal que:

$$u_i(a'_i, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i}) \quad \text{para todo } a_{-i} \in A_{-i}.$$

Una estrategia estrictamente dominada **nunca puede ser jugada en un equilibrio de Nash**. La razón es que, en la definición de EN, basta reemplazar con a'_i en el lado derecho para obtener una contradicción.

Definición 3.1.6. Estrategia débilmente dominada. Una estrategia $a_i \in A_i$ es *débilmente dominada* para el jugador i si existe otra estrategia $a'_i \in A_i$ tal que:

$$u_i(a'_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}) \quad \text{para todo } a_{-i} \in A_{-i},$$

y existe al menos un perfil $a'_{-i} \in A_{-i}$ tal que:

$$u_i(a'_i, a'_{-i}) > u_i(a_i, a'_{-i}).$$

Esto implica que la estrategia a_i nunca es mejor y a veces es peor que a'_i , por lo que no puede ser racionalmente justificada si hay alternativas mejores disponibles. Sin embargo, a diferencia de las estrategias estrictamente dominadas, las débilmente dominadas pueden aparecer en equilibrios en algunos contextos (especialmente si forman parte del límite de una secuencia de estrategias no dominadas).

Ejemplo 3.1.7. En el caso del duopolio de Bertrand, $p_i \leq c$ es una estrategia débilmente dominada pues, cualquier $p_i > c$ da un beneficio a veces mejor o en el peor de los casos igual.

Observación 3.1.8. Eliminando estrategias débilmente dominadas (excepto cuando son el límite de una secuencia de estrategias no débilmente dominadas), se obtiene que:

$$B_1(p_2) = [c, \infty) \quad \text{si } p_2 \leq c.$$

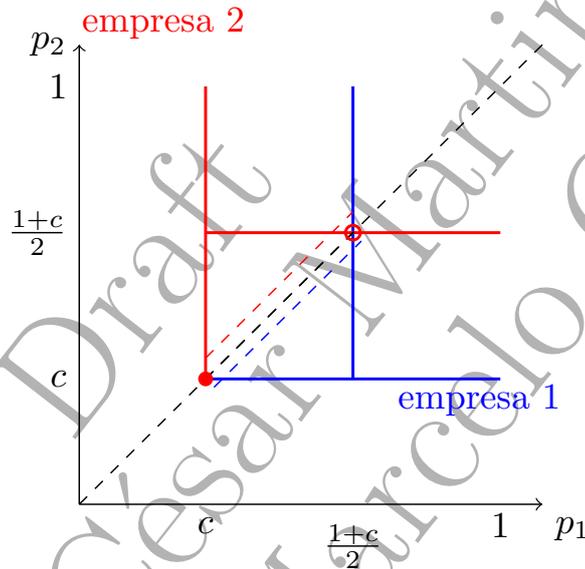


Figura 3.3 Mejores respuestas.

Se sigue que el EN es $p_1^* = p_2^* = c$.

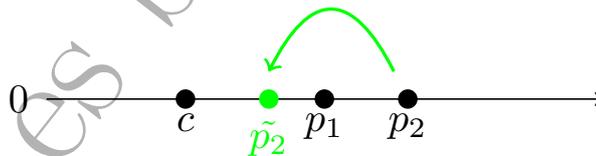


Figura 3.4 Convergencia a c .

Observación 3.1.9. La suposición de división igual del mercado no es esencial, el equilibrio de Nash es el mismo para todas las reglas de división.

Ejemplo 3.1.10. Consideremos el siguiente juego con los jugadores 1 y 2, y acciones ξ y γ :

	ξ	γ
ξ	(1, 1)	(1, 1)
γ	(1, 1)	(5, 5)

- Claramente, existen **dos equilibrios de Nash**: (ξ, ξ) y (γ, γ) .
- La acción ξ está *débilmente dominada* por la acción γ para el jugador 1 pues:
 - $u_1(\gamma, \xi) = u_1(\xi, \xi)$,
 - $u_1(\gamma, \gamma) > u_1(\xi, \gamma)$,

por lo tanto, γ nunca es peor y a veces es estrictamente mejor.

- Al eliminar acciones débilmente dominadas, el jugador 1 nunca debería jugar ξ .
- El mismo razonamiento se aplica para el jugador 2.
- El equilibrio de Nash restante es (γ, γ) .
- Sin embargo, (ξ, ξ) es también EN, a pesar de que (γ, γ) lo domine estrictamente en el sentido de Pareto.

En el modelo clásico de Bertrand con precios continuos, surge un problema técnico: si la otra empresa fija un precio p por encima del costo marginal pero por debajo del precio de monopolio, lo deseable es fijar un precio inferior a p , pero *lo más cercano posible*. Sin embargo, para cualquier precio p fijado por la empresa rival y cualquier precio $p' < p$ elegido por la empresa, siempre existe otro precio p'' tal que $p' < p'' < p$, que proporciona un mayor beneficio. Este problema refleja que el conjunto de precios real, \mathbb{R} , es *demasiado continuo* para capturar adecuadamente el comportamiento estratégico. Para abordar esta dificultad, introducimos precios discretos: intuitivamente, precios cotizados en dólares y centavos. Esta formulación más realista no solo resuelve el problema técnico anterior, sino que también ofrece nuevas perspectivas teóricas sobre el comportamiento de equilibrio en competencia de precios.

Supongamos que los precios posibles son $p_1, p_2 \in \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots\}$, donde tanto c como $\frac{1+c}{2}$ son múltiplos de ε . Eliminando estrategias débilmente dominadas, la mejor respuesta de la empresa 1, denotada $B_1(p_2)$, se construye de la siguiente manera:

- Si $p_2 > \frac{1+c}{2}$, entonces $p_1 = \frac{1+c}{2}$ maximiza beneficios (es el precio de monopolio).
- Si $c + \varepsilon < p_2 \leq \frac{1+c}{2}$, entonces conviene subcotizar a la competencia: $p_1 = p_2 - \varepsilon$.
- Si $p_2 = c + \varepsilon$, entonces $p_1 = c + \varepsilon$ comparte el mercado sin riesgo de incurrir en pérdida (ya que $p_1 = c$ es débilmente dominada, los profits son cero).
- Si $p_2 \leq c$, se puede elegir cualquier $p_1 \in \{c + \varepsilon, c + 2\varepsilon, \dots\}$ que sea superior a c .

Formalmente:

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \frac{1+c}{2} & \text{si } p_2 > \frac{1+c}{2}, \\ p_2 - \varepsilon & \text{si } c + \varepsilon < p_2 \leq \frac{1+c}{2}, \\ c + \varepsilon & \text{si } p_2 = c + \varepsilon, \\ \{c + \varepsilon, c + 2\varepsilon, \dots\} & \text{si } p_2 \leq c. \end{cases}$$

Notas:

- $p_1 = c$ está débilmente dominado por $p_1 = c + \varepsilon$.
- Si $p_2 \geq c + 2\varepsilon$, siempre es estrictamente mejor subcotizar que compartir el mercado.

Demostración. Comparamos los profits

$$\frac{(1-p_2)(p_2-c)}{2} = \frac{p_2-c-p_2^2+cp_2}{2}$$

$$(1-p_2+\varepsilon)(p_2-\varepsilon-c) = p_1-\varepsilon-c-p_2^2+p_2\varepsilon+cp_2+\varepsilon p_2-\varepsilon^2-\varepsilon c.$$

Restando a la segunda expresión la primera, queda

$$p_2 - 2\varepsilon - c - p_2^2 + 2p_2\varepsilon + cp_2 + 2\varepsilon p_2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon c. \quad (3.3)$$

Como $p_2 \geq (c + 2\varepsilon)$, la expresión (3.3) es mayor a

$$(c + 2\varepsilon)(1 - p_2) - 2\varepsilon - c + 2p_2\varepsilon + cp_2 + 2\varepsilon p_2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon c.$$

Simplificando, queda

$$2(c + 2\varepsilon)\varepsilon + c(2\varepsilon + c) - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon c > 0.$$

□

- El equilibrio de Nash que sobrevive a la eliminación de estrategias débilmente dominadas es $p_1^* = p_2^* = c + \varepsilon$.
- Esta predicción es aproximadamente la misma que la del modelo continuo, pero se obtiene bajo supuestos más realistas.

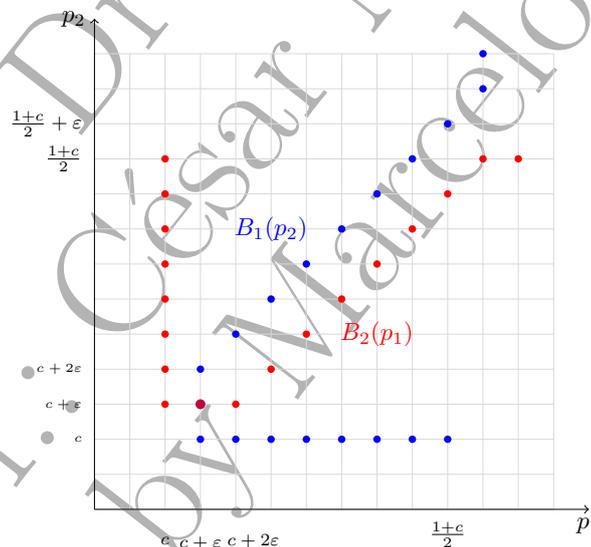


Figura 3.5 Estrategias débilmente dominantes: nube de puntos.

Ejemplo 3.1.11. Cournot con asimetría. Consideremos una versión del modelo de Bertrand con dos empresas $N = \{1, 2\}$, donde cada empresa i fija un precio $p_i \in \mathbb{R}_+$. Los consumidores demandan una cantidad $Q(P) = \max\{1 - P, 0\}$, donde $P = \min\{p_1, p_2\}$ representa el precio más bajo disponible en el mercado. La empresa que fija el precio más bajo capta toda la demanda, mientras que la otra no vende nada.

Los costos son lineales pero asimétricos: cada empresa i enfrenta un costo $C_i(q_i) = c_i q_i$, con $0 < c_1 < c_2 < 1$. La empresa 1 es más eficiente que la empresa 2. Si ambas empresas fijan el mismo precio, asumimos que la empresa más eficiente (empresa 1) capta toda la demanda.

Funciones de utilidad. Bajo este entorno, las funciones de utilidad para cada empresa están dadas por:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (1 - p_1)(p_1 - c_1) & \text{si } p_1 \leq p_2, \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2, \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (1 - p_2)(p_2 - c_2) & \text{si } p_2 < p_1, \\ 0 & \text{si } p_2 \geq p_1. \end{cases}$$

Correspondencias de mejor respuesta. Al eliminar estrategias débilmente dominadas, las mejores respuestas para cada empresa son:

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \frac{1+c_1}{2} & \text{si } p_2 \geq \frac{1+c_1}{2}, \\ p_2 & \text{si } c_1 < p_2 \leq \frac{1+c_1}{2}, \end{cases}$$

$$B_2(p_1) = \begin{cases} [c_1, \infty) & \text{si } p_2 \leq c_1, \\ \frac{1+c_2}{2} & \text{si } p_1 > \frac{1+c_2}{2}, \\ \emptyset & \text{si } c_2 < p_1 \leq \frac{1+c_1}{2}, \\ [c_2, \infty) & \text{si } p_1 \leq c_2. \end{cases}$$

El resultado refleja que la empresa más eficiente puede operar en un conjunto más amplio de precios sin ser dominada, mientras que la empresa menos eficiente ve restringida su mejor respuesta cuando su precio está en una zona donde sería superada con certeza.

Al aplicar el refinamiento que elimina estrategias débilmente dominadas (excepto si son el límite de una secuencia de estrategias no débilmente dominadas), el único

equilibrio de Nash que sobrevive en el modelo de Bertrand con costos marginales asimétricos es $p_1^* = p_2^* = c_2$. La empresa más eficiente (empresa 1), al fijar un precio igual al costo marginal de su rival (empresa 2), se asegura todo el mercado gracias a la regla de desempate a su favor. Este resultado refleja una lógica similar a la de los *mercados contestables* de Baumol: la sola posibilidad de competencia disciplina el comportamiento de la empresa dominante, llevándola a fijar precios bajos pese a no enfrentar competencia activa. La empresa menos eficiente no puede competir sin incurrir en pérdidas, por lo que termina no vendiendo en equilibrio.

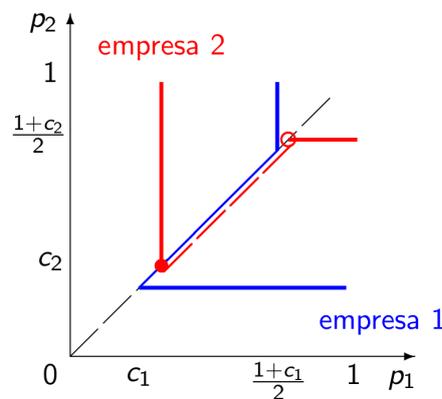


Figura 3.6 Bertrand asimétrico.

Ejemplo 3.1.12. Supongamos nuevamente que las empresas tienen costos marginales distintos, con $0 < c_1 < c_2 < 1$, y que los precios posibles pertenecen a un conjunto discreto $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots\}$. Mientras que bajo competencia perfecta esperaríamos un precio de mercado igual a c_1 , el equilibrio bajo competencia de Bertrand discreta revela una estructura distinta. Aplicando la eliminación de estrategias débilmente dominadas, la mejor respuesta de la empresa 1 es subcotizar a la empresa 2 por el menor margen posible compatible con los precios discretos. En equilibrio, la empresa 1 fija $p_1^* = c_2$, mientras que la empresa 2, al no poder competir sin incurrir en pérdidas, fija $p_2^* = c_2 + \varepsilon$. Así, la empresa más eficiente se queda con todo el mercado a un precio superior a su costo marginal.

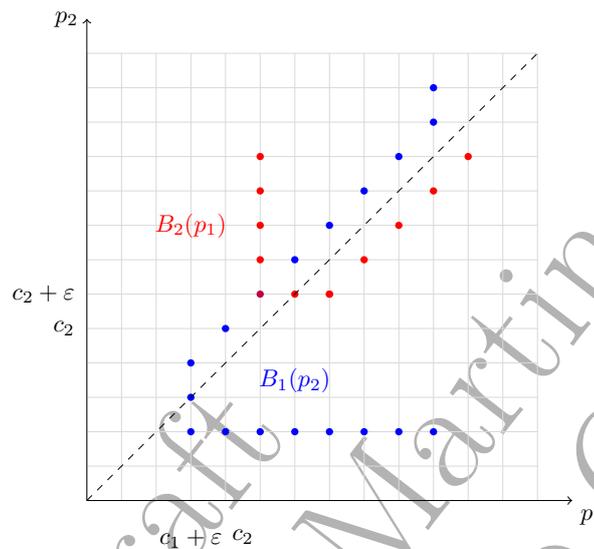


Figura 3.7 Bertrand asimétrico, precios discretos: nube de puntos.

Notemos que:

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \frac{1+c_1}{2} & \text{si } p_2 > \frac{1+c_1}{2}, \\ p_2 - \varepsilon & \text{si } c_1 + \varepsilon < p_2 \leq \frac{1+c_1}{2}, \\ c_1 + \varepsilon & \text{si } p_2 = c_1 + \varepsilon, \\ \{c_1 + \varepsilon, c_1 + 2\varepsilon, \dots\} & \text{si } p_2 \leq c_1. \end{cases}$$

El equilibrio competitivo, definido tradicionalmente como aquel en que el precio se iguala al costo marginal más bajo, implicaría $p_1 = c_1$, pero la competencia de Bertrand con precios discretos no necesariamente conduce a este resultado. Sin embargo, puede decirse que el precio es *competitivo* en el sentido de que está determinado por la capacidad de otras empresas para replicar lo que hace la empresa más eficiente. Cuando los costos marginales son convexos, el análisis se complica: los precios tienden a igualarse en equilibrio, pero el nivel al que convergen depende de la regla de división del mercado. Para obtener resultados competitivos en estos entornos es necesario modelar estratégicamente el comportamiento de los compradores.

Observación 3.1.13. En la aplicación de la teoría de juegos a contextos económicos, la elección del conjunto de estrategias disponibles para los agentes es crucial. En particular, en modelos de oligopolio, la predicción del resultado depende de si se supone que las empresas compiten en precios (modelo de Bertrand) o en cantidades (modelo de Cournot). Por lo general, la competencia en precios genera resultados más favorables para los consumidores, ya que presiona los precios hacia el costo marginal.

Esto plantea una pregunta fundamental: ¿cuál de los dos modelos es el correcto? La respuesta no es trivial. En muchas aplicaciones, los economistas de la competencia asumen competencia en cantidades. Un argumento clásico a favor de esta aproximación aparece en el trabajo de Kreps y Scheinkman (1983), titulado *Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes*, (Kreps and Scheinkman, 1983). En este artículo, los autores muestran que si las empresas eligen cantidades primero (por ejemplo, invirtiendo en capacidad) y luego fijan precios, el resultado del juego es el mismo que si hubieran competido directamente en cantidades. Aunque parezca que están compitiendo en precios, el resultado se alinea con el modelo de Cournot. Esto sugiere que el momento de las decisiones estratégicas y la secuencia del juego son determinantes para el equilibrio. Detallamos este análisis presentando el artículo [Kreps and Scheinkman \(1983\)](#) en el anexo C.

La aplicación de la teoría de juegos en economía requiere, por tanto, un criterio bien definido para modelar adecuadamente las decisiones de los agentes. No basta con aplicar un marco estándar; se debe justificar la estructura del juego, los tiempos de decisión, y el conjunto de estrategias disponibles.

3.2. Juegos de mercado

Definición 3.2.1. Los *juegos de mercado* (o *market games*) son modelos en los que los agentes económicos, como consumidores y empresas, interactúan estratégicamente a través de mecanismos de mercado. A diferencia de los modelos clásicos de equilibrio competitivo, donde los precios se ajustan de forma anónima, los juegos de mercado hacen explícita la interacción estratégica entre oferentes y demandantes. Estos juegos pueden modelar subastas, negociación bilateral o competencia entre empresas, y

permiten capturar cómo la estructura del mercado afecta los resultados económicos. Cuando los compradores también actúan estratégicamente, como en subastas o mecanismos de asignación, los precios resultantes pueden aproximarse a los precios competitivos incluso si hay pocos participantes, lo que los convierte en una herramienta poderosa para analizar eficiencia y poder de mercado en contextos oligopólicos o monopólicos.

Una clase destacada dentro de estos modelos son los *juegos de mercado estratégicos* (*strategic market games*), en los que las asignaciones y pagos no se derivan de precios dados, sino del resultado de un juego no cooperativo en el que los agentes toman decisiones activas sobre precios y cantidades (Dolgovolov and Martinelli, 2021). En un entorno con N compradores (conjunto B) y M vendedores (conjunto S), cada vendedor $i \in S$ posee un único bien que desea vender, y cada comprador $j \in B$ tiene una valoración $h_{ij} \in \mathbb{Z}$ por el bien del vendedor i , mientras que cada vendedor enfrenta un costo de reserva $c_i > 0$. Las estrategias posibles para cada jugador $k \in B \cup S$ se definen sobre un conjunto finito $\Omega_k \subset \mathbb{Z}$, con grilla uniforme (por simplicidad, se asume paso 1). Las acciones dominadas están excluidas: los compradores no pueden ofertar por encima de sus valoraciones, y los vendedores no pueden poner precios por debajo de su costo. En este juego, cada vendedor i fija un precio $p_i^S \in \mathbb{Z}_+$, mientras que cada comprador j presenta una oferta $p_j^B \in \mathbb{Z}_+^M$ que contiene a lo sumo una componente estrictamente positiva, lo que equivale a seleccionar un único bien por el cual pujar. Luego, el perfil completo de acciones es de la forma $p = (p_1^B, \dots, p_N^B, p_1^S, \dots, p_M^S) \in \Omega = \prod_{k \in B \cup S} \Omega_k$.

La acción de un jugador genérico k se denota simplemente por p_k . Para simplificar, se excluyen las acciones dominadas: las pujas por encima de las valoraciones y los precios de venta por debajo de los costos no están permitidos y han sido eliminados de los conjuntos Ω_k y del conjunto total de perfiles de acciones Ω . Una vez que se han enviado todas las pujas y precios, un *clearing house* elige una asignación dentro del conjunto factible:

$$X = \left\{ (x_{ij})_{i \in S, j \in B} : x_{ij} \in \{0, 1\}, \sum_{j \in B} x_{ij} \leq 1 \text{ para todo } i \in S \right\}.$$

El clearing house asigna los bienes con el objetivo de maximizar el *excedente total*:

$$\Xi(x, p) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in B} x_{ij} (p_{ij}^B - p_i^S).$$

En otras palabras, selecciona asignaciones dentro del conjunto:

$$\Pi(\bar{p}) = \{x \in X : \Xi(x, p) \geq \Xi(x', p) \text{ para todo } x' \in X\}.$$

Para asegurar que el clearing house prefiera más comercio incluso en ausencia de arbitraje, se impone que la asignación seleccionada no esté *ray-dominada* (Simon, 1984), es decir:

$$\Pi(p) = \{x \in \Pi(\bar{p}) : \nexists \hat{x} \in \Pi(\bar{p}) \text{ tal que } \hat{x} \neq x \text{ y } \hat{x}_{ij} \geq x_{ij} \text{ para todo } i \in S, j \in B\}.$$

Una vez elegida la asignación x , el mercado se liquida a los precios respectivos de compradores y vendedores. Las utilidades resultantes se definen según la siguiente regla, denominada *s-prices*:

- Para cada comprador $j \in B$:

$$u_j^B(p, x) = \max_{i \in S} (x_{ij} h_{ij}) - \sum_{i \in S} p_{ij}^B x_{ij}.$$

- Para cada vendedor $i \in S$:

$$u_i^S(p, x) = \sum_{j \in B} (p_i^S - c_i) x_{ij}.$$

3.3. Subastas con información completa $n = 2$

Consideremos un problema elemental de subasta en el que un subastador desea vender un único objeto y sabe que hay dos postores potenciales, etiquetados como $i = 1, 2$. Cada postor i tiene una valoración $v_i > 0$ por el objeto, y se asume que $v_1 > v_2 > 0$. Analizamos dos formatos posibles:

- **Subasta de primer precio:** el postor que presenta la oferta más alta gana el objeto y paga su propia oferta.
- **Subasta de segundo precio (Vickrey):** el postor que presenta la oferta más alta gana el objeto, pero paga la oferta del otro postor.

Resultará que en ambos casos, dado el escenario descrito, el pago del subastador es el mismo.

Empezamos por la subasta de segundo precio. Los jugadores son los dos postores, quienes eligen ofertas $b_1 \in \mathbb{R}_+$ y $b_2 \in \mathbb{R}_+$ respectivamente. El objeto se asigna al jugador que haga la oferta más alta. En caso de empate ($b_1 = b_2$), el objeto se asigna aleatoriamente con probabilidad $1/2$ a cada postor. El precio que paga el ganador es la oferta del otro jugador. Luego, la función de utilidad del jugador 1 está definida como:

$$u_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_1 < b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1) & \text{si } b_1 = b_2, \\ v_1 - b_2 & \text{si } b_1 > b_2, \end{cases}$$

y de manera análoga para el jugador 2.

Este tipo de subasta tiene una propiedad central: ofertar la propia valoración es una estrategia débilmente dominante. Es decir, cualquier estrategia $b_i \neq v_i$ es débilmente dominada por la estrategia $b_i = v_i$. Esto puede comprobarse considerando que:

- Si un jugador sobreoferta ($b_i > v_i$), corre el riesgo de ganar y pagar más de lo que realmente valora el objeto.
- Si un jugador suboferta ($b_i < v_i$), puede perder el objeto aun cuando lo valora más que su rival.
- Ofertar $b_i = v_i$ garantiza que el jugador gane si su valoración es la más alta, y nunca pague más de lo que vale el objeto para él.

Esto lo formalizamos en la proposición 3.3.1. Luego, aplicando eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas, se concluye que:

$$B_1(b_2) = v_1, \quad B_2(b_1) = v_2.$$

Por tanto, el equilibrio de Nash en estrategias puras es:

$$b_1^* = v_1, \quad b_2^* = v_2.$$

En este equilibrio, el jugador 1 gana el objeto (porque $v_1 > v_2$), y paga v_2 , obteniendo una utilidad de $v_1 - v_2$. El jugador 2 no gana el objeto y su utilidad es cero. Este

resultado ejemplifica una propiedad fundamental de las subastas de segundo precio: inducen *revelación veraz* de las valoraciones incluso en contextos con información privada. Esta propiedad hace que este formato sea particularmente atractivo en el diseño de mecanismos, aunque no necesariamente maximiza los ingresos del subastador frente a otros formatos como la subasta de primer precio, donde los jugadores tienden a ofertar por debajo de su valoración.²

Proposición 3.3.1. En una subasta de segundo precio con un único bien y dos postores, ofertar $b_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante para cada jugador i .

Demostración. Sea v_i la valoración del jugador i por el objeto y v_j la del rival, con $v_i > 0$, $v_j > 0$ y $i \neq j$. Sea b_j una oferta arbitraria del jugador j , y consideremos distintas posibilidades para b_i :

- **Caso 1:** $b_i < b_j$. En este caso, el jugador i pierde la subasta independientemente de su valoración. Por tanto:

$$u_i(b_i, b_j) = 0.$$

Ahora comparemos con $b_i = v_i$:

- Si $v_i < b_j$, entonces $b_i = v_i < b_j$ y el jugador sigue perdiendo: $u_i(v_i, b_j) = 0$.
- Si $v_i \geq b_j$, entonces gana y paga b_j : $u_i(v_i, b_j) = v_i - b_j \geq 0$.

Por tanto, en todos los subcasos, $u_i(v_i, b_j) \geq u_i(b_i, b_j)$.

- **Caso 2:** $b_i = b_j$. En este caso, se asigna el objeto al azar con probabilidad $\frac{1}{2}$, y el precio pagado es $b_j = b_i$. La utilidad esperada del jugador i es:

$$u_i(b_i, b_j) = \frac{1}{2}(v_i - b_i).$$

Comparando con $b_i = v_i$: Si $v_i = b_i$, entonces el pago esperado es cero. Si $v_i > b_i$, hubiese ganado si pujaba v_i y su utilidad hubiese sido estrictamente positiva. Finalmente, en caso $b_i > v_i$, va a tener un pago esperado negativo.

²Como veremos en el capítulo 4, este resultado es un caso particular de la revelación directa.

- **Caso 3:** $b_i > b_j$. En este caso, el jugador i gana el objeto y paga el precio b_j . Su utilidad es:

$$u_i(b_i, b_j) = v_i - b_j.$$

Si en cambio ofrece $b_i = v_i$, entonces:

- Si $v_i > b_j$ (lo mismo que $b_i > b_j$), entonces también gana y paga b_j : $u_i(v_i, b_j) = v_i - b_j$, mismo resultado.
- Si $v_i < b_j$, pierde: $u_i(v_i, b_j) = 0$, pero como $v_i < b_j$ también sucede que $v_i - b_j < 0$, es decir, habría perdido utilidad ofertando $b_i > v_i$.

En resumen, para cualquier valor de la oferta del rival b_j y cualquier otra oferta $b'_i \neq v_i$, se cumple que:

$$u_i(v_i, b_j) \geq u_i(b'_i, b_j),$$

con igualdad en algunos casos y estricta desigualdad en otros. Por lo tanto, $b_i = v_i$ es una estrategia **débilmente dominante**. \square

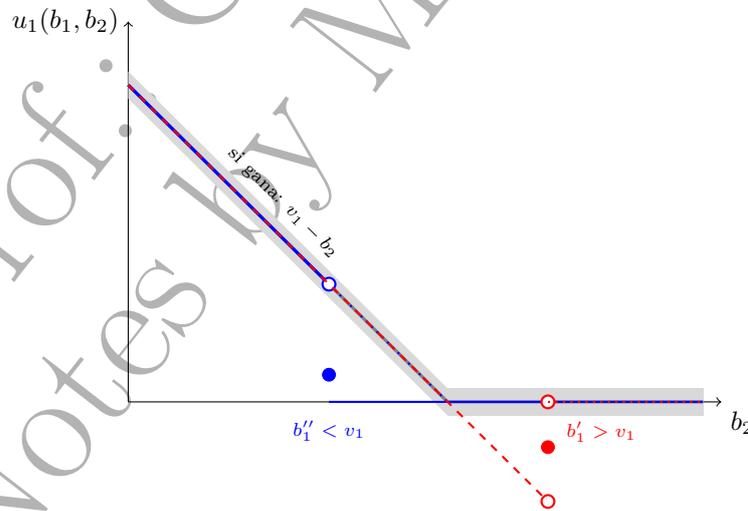


Figura 3.8 $u_1(b_1, b_2)$, subasta de segundo precio, información completa.

Observación 3.3.2. El conjunto de EN en este juego es

$$\{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : v_2 \leq b_1 < v_1, 0 \leq b_2 < b_1\}.$$

Subasta de primer precio . Consideremos ahora una subasta de primer precio con dos postores. Cada jugador $i = 1, 2$ presenta una oferta $b_i \in \mathbb{R}_+$. El jugador que presente la mayor oferta gana el objeto y paga el monto de su propia oferta. En caso de empate ($b_1 = b_2$), el objeto se asigna al jugador con la valoración más alta (si no se asume esto, no habrá EN en estrategias puras, similar al caso de competencia en precios). Supondremos que $v_1 > v_2 > 0$. Las funciones de utilidad están dadas por:

$$u_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_1 < b_2, \\ v_1 - b_1 & \text{si } b_1 \geq b_2, \end{cases} \quad \text{y } u_2(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_2 \leq b_1, \\ v_2 - b_2 & \text{si } b_2 > b_1. \end{cases}$$

Observamos primero que para cada jugador i , cualquier estrategia $b_i > v_i$ es débilmente dominada por $b_i = v_i$. Esto se debe a que, incluso si el jugador gana, su utilidad sería negativa. Por tanto, restringiremos el análisis a estrategias $b_i \in [0, v_i]$.

Mejores respuestas. Para el jugador 1, si el jugador 2 presenta una oferta $b_2 < v_1$, entonces la mejor respuesta de jugador 1 es igualar esa oferta, es decir, $b_1 = b_2$. Así, gana el objeto pagando lo mínimo posible. En cambio, si $b_2 \geq v_1$, cualquier oferta que le permita ganar le deja utilidad nula o negativa. Por tanto, cualquier estrategia en $[0, v_1]$ es óptima. Esto define la correspondencia de mejor respuesta de jugador 1:

$$B_1(b_2) = \begin{cases} b_2 & \text{si } b_2 < v_1, \\ [0, v_1] & \text{si } b_2 \geq v_1. \end{cases}$$

El caso del jugador 2 es más sutil. Si el jugador 1 presenta una oferta $b_1 < v_2$, el jugador 2 estaría dispuesto a ofertar justo $b_2 = b_1$ para ganar al menor costo posible. Sin embargo, por la regla de desempate, si iguala la oferta, pierde (ya que $v_1 > v_2$). Si oferta ligeramente menos, también pierde; y si oferta ligeramente más, gana, pero reduce su utilidad. En este caso, no existe una oferta que maximice exactamente su utilidad. Por tanto, el conjunto de mejores respuestas es vacío:

$$B_2(b_1) = \emptyset \quad \text{si } b_1 < v_2.$$

En cambio, si $b_1 \geq v_2$, el jugador 2 ya no tiene incentivos a ganar, y puede elegir cualquier $b_2 \in [0, v_2]$, obteniendo utilidad no positiva. Así, en ese caso:

$$B_2(b_1) = [0, v_2] \quad \text{si } b_1 \geq v_2.$$

De este modo,

$$B_2(b_1) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } b_1 < v_2 \\ [0, v_2], & \text{si } b_1 \geq v_2. \end{cases}$$

Equilibrio de Nash. El único perfil que sobrevive a la eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas (sin contar el límite de una de estas) es:

$$b_1^* = b_2^* = v_2.$$

En este perfil, el jugador 1 gana la subasta (ya que $v_1 > v_2$), paga v_2 , y obtiene utilidad $v_1 - v_2$. El jugador 2 no gana el objeto y obtiene utilidad nula. Sorprendentemente, este equilibrio coincide con el resultado de la subasta de segundo precio.

En el anexo D analizamos con detalle el artículo [Reny \(1999\)](#), en el cual se estudian condiciones de existencia de equilibrio cuando los pagos son discontinuos y los espacios de estrategias son infinitos.

Discusión: ¿Por qué subastar? Si el subastador conociera las valoraciones v_1 y v_2 , podría simplemente fijar el precio en v_1 y asignar el objeto directamente, maximizando así su ingreso. Sin embargo, en la práctica, los subastadores no conocen las valoraciones privadas de los postores, ni los postores conocen las valoraciones de sus rivales. La subasta actúa como un mecanismo de revelación de información: permite descubrir el valor verdadero del objeto mediante la competencia estratégica. Para modelar estas situaciones realistas, es necesario extender la teoría a entornos de información incompleta, donde las valoraciones son privadas y los jugadores forman expectativas sobre las acciones del otro. Este análisis da lugar al estudio de subastas bayesianas y mecanismos de asignación óptimos bajo incertidumbre ([Krishna, 2009](#)). Véase el capítulo 4.

Capítulo 4

Juegos Bayesianos

4.1. Equilibrio Nash Bayesiano

En este capítulo abordaremos un nuevo tipo de juego no cooperativo. En términos generales, los juegos pueden clasificarse en cuatro categorías según dos dimensiones: la forma del juego (estratégica o extensiva) y el tipo de información disponible (completa o incompleta). Esta clasificación se resume en el siguiente cuadro:

Información	Forma Estratégica	Forma Extensiva
Completa	Equilibrio de Nash	Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS)
Incompleta	Equilibrio Nash Bayesiano (ENB)	Equilibrio Secuencial (Kreps y Wilson, entre otros)

En lo que sigue, nos concentraremos en la casilla correspondiente a información incompleta y forma estratégica. Como se indica, la teoría de juegos con información incompleta fue desarrollada por John Harsanyi, quien recibió el Premio Nobel de Economía en 1994, junto a John Nash y Reinhard Selten, por sus contribuciones fundamentales a la teoría de juegos no cooperativos.

En muchas circunstancias, los jugadores no conocen perfectamente las motivaciones de los otros jugadores. Por ejemplo, en una subasta, es muy probable que los postores no sepan cuánto están dispuestos a pagar los demás postores. En un juego bayesiano, las recompensas (pagos) de cada jugador dependen de una realización $\omega \in \Omega$ que representa un estado del mundo, y sobre el cual los jugadores pueden tener varias señales. Por ejemplo, volviendo al caso de las subastas, cada postor conoce su propia valoración, pero no la del resto. El estado del mundo es el perfil de valores y la señal de cada jugador su propia valoración. Otro caso, por ejemplo en el contexto del descubrimiento de yacimientos petroleros, es donde cada postor recibe una señal, y la valoración (común) es la suma de las señales.

A continuación definimos un juego bayesiano, bajo el supuesto que el conjunto de estados del mundo es idéntico al conjunto de perfiles de señales posibles.

Definición 4.1.1. Un juego bayesiano con tipos consiste en:

- ▶ un conjunto finito de jugadores N ,
- ▶ un conjunto de tipos Θ_i para cada jugador,
- ▶ una distribución de probabilidad F sobre el conjunto de perfiles de tipos posibles de los jugadores $\Theta = \otimes_{i \in N} \Theta_i$,
- ▶ un conjunto de acciones A_i disponible para cada jugador,
- ▶ una función de utilidad para cada jugador

$$u_i : A \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$$

donde, como antes, $A = \otimes_{i \in N} A_i$.

Observación 4.1.2. La definición 4.1.1 es menos general de lo que podría ser:

- ▶ los jugadores podrían tener creencias sobre la distribución de tipos, negando el conocimiento común previo,
- ▶ los pagos podrían depender del estado del mundo.

Harsanyi (Harsanyi, 1966) propone que en un juego bayesiano el conjunto de jugadores no es N , sino

$$\{(i, \theta_i) : i \in N, \theta_i \in \Theta_i\} = \bigcup_{i \in N} \Theta_i. \tag{4.1}$$

El conjunto en (4.1) puede ser *bastante grande*. En efecto, Θ_i no tiene porque ser finito o enumerable.

Observación 4.1.3. El equilibrio de Nash se extiende a los juegos bayesianos requiriendo que cada estrategia sea una función que asigne una acción a cada tipo

$$\alpha_i : \Theta_i \rightarrow A_i. \tag{4.2}$$

Según el enfoque de Harsanyi, el *timing* es el siguiente:

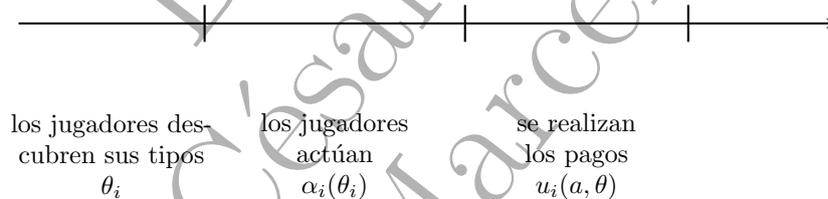


Figura 4.1 Timing según Harsanyi.

Es decir, los jugadores eligen estrategias **después** de descubrir sus tipos. La alternativa propuesta en (4.2) propone más bien que los jugadores eligen su estrategia **antes** de descubrir su tipo y, por lo tanto, una estrategia es un plan contingente descrito mediante una función.

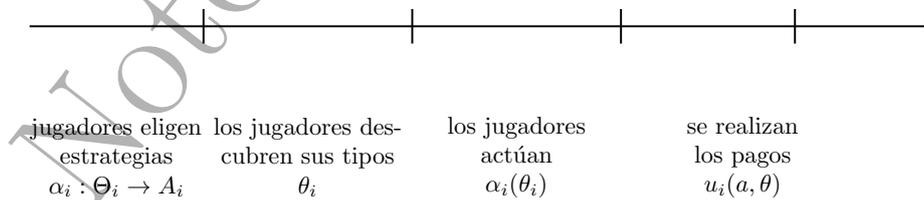


Figura 4.2 Timing según estrategias como funciones.

Definición 4.1.4. Equilibrio bayesiano. Dado un juego bayesiano $\langle N, (\Theta_i), F, (A_i), (u_i) \rangle$, un equilibrio bayesiano es un equilibrio de Nash del juego estratégico

$$\langle \{(i, \theta_i) : i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}, (A_{i,\theta_i}), (u_{i,\theta_i}) \rangle$$

en el cual:

- ▶ el conjunto de jugadores es el conjunto de pares (i, θ_i) ,
- ▶ el conjunto de estrategias del jugador (i, θ_i) es $A_i = A_{i, \theta_i}$,
- ▶ la función de utilidad de cada jugador (i, θ_i) , dado el perfil de estrategias $a = (a_{j, \theta_j})_{j \in N, \theta_j \in \Theta_j}$ es

$$u_{i, \theta_i}(a) = \int_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} u_i(a_{i, \theta_i}, a_{-i, \theta_{-i}}, \theta_i, \theta_{-i}) dF(\theta_{-i} | \theta_i).$$

Definición 4.1.5. Equilibrio bayesiano (definición alternativa). Dado un juego bayesiano $\langle N, (\Theta_i), F, (A_i), (u_i) \rangle$, un equilibrio bayesiano es un equilibrio de Nash del juego estratégico $\langle N, (\mathcal{A}_i), (v_i) \rangle$, donde

- ▶ el conjunto de estrategias de cada jugador es

$$\mathcal{A}_i = \{ \alpha_i \text{ medible} : \alpha_i : \Theta_i \rightarrow A_i \}$$

- ▶ la función de utilidad de cada jugador i , dado el perfil de estrategias $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es

$$v_i(\alpha) = \int_{\theta_i \in \Theta_i} \int_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} u_i(\alpha_i(\theta_i), \alpha_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}) dF(\theta_{-i} | \theta_i) dF(\theta_i).$$

Observación 4.1.6. Sea $S = \prod_{i \in N} \Delta_i$ el producto de un conjunto no numerable de simplices finitos $\Delta_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, dotado con la topología producto. Entonces:

- Cada Δ_i es compacto, convexo, y vive en un espacio de Hausdorff localmente convexo (por ejemplo, \mathbb{R}^{n_i}).
- Como producto de espacios localmente convexos, S es un subconjunto de un espacio topológico localmente convexo.
- Como producto de espacios Hausdorff, S es Hausdorff.
- Por tanto, S es un subconjunto de un espacio topológico localmente convexo y Hausdorff.

Sin embargo, dado que el índice I es no numerable, el producto S no es compacto en general bajo la topología producto. Para aplicar el teorema de Kakutani y obtener existencia de punto fijo (y por tanto existencia de equilibrio de Nash bayesiano), es necesario restringirse a un subconjunto compacto, convexo y no vacío de S . Esto puede lograrse, por ejemplo, considerando estrategias con soporte finito o condiciones de decaimiento, de forma que el conjunto de perfiles admisibles sea compacto.

Condiciones necesarias para aplicar el teorema de Kakutani:¹

1. S debe ser un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio topológico localmente convexo y Hausdorff.
2. La correspondencia multivaluada $\varphi : S \rightarrow 2^S$ debe tener:
 - Gráfico cerrado,
 - Valores no vacíos y convexos.

En contextos como los juegos bayesianos con espacio de tipos no numerable, el conjunto de perfiles estratégicos puede modelarse como un subconjunto del producto infinito de símlices. En este caso, al verificar que dicho subconjunto sea compacto y convexo, y que la correspondencia de mejor respuesta cumpla las condiciones anteriores, el teorema de Kakutani garantiza la existencia de un equilibrio de Nash bayesiano (ENB).

Ejemplo 4.1.7 (Guerra entre dos armadas). Considere el siguiente juego. Dos oponentes (ejércitos) buscan conquistar una isla. Cada ejército puede escoger entre *atacar* o *no atacar*. Además, cada ejército puede ser de tipo *fuerte* o *débil*, con igual probabilidad $p = 1/2$. El tipo de cada ejército solo es conocido por su propio general. Los pagos se definen de la siguiente forma: la isla vale M si es capturada. Un ejército puede capturar la isla si ataca mientras el otro no lo hace, o si ataca siendo fuerte mientras el enemigo es débil. Si ambos atacan y tienen el mismo tipo, nadie gana. El

¹En su libro de teoría de juegos (Pata, 2019) (Binmore, 2007), Ken Binmore recuerda que una vez, en una conferencia, Kakutani le preguntó por qué tantos economistas habían asistido a su charla. Cuando Binmore le respondió que probablemente se debía al teorema del punto fijo de Kakutani, Kakutani se mostró desconcertado y le contestó: ¿Qué es el teorema del punto fijo de Kakutani?

costo de atacar es s si el ejército es fuerte y w si es débil, con $s < w$. No hay costo si un ejército no ataca.

Formalmente, cada jugador i escoge una estrategia *pura* del tipo

$$\alpha_i : \Theta_i \rightarrow A_i,$$

donde $\Theta_i = \{\text{fuerte, débil}\}$ y $A_i = \{\text{atacar, no atacar}\}$. Dado que ambos jugadores tienen la misma distribución de tipos con probabilidad uniforme, se puede resumir el conjunto de estrategias puras posibles como:

- **AA:** Atacar sin importar el tipo.
- **AN:** Atacar si es fuerte, no atacar si es débil.
- **NA:** No atacar si es fuerte, atacar si es débil.
- **NN:** No atacar sin importar el tipo.

Los pagos esperados de cada jugador se obtienen como:

$$\tilde{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, \theta_i) = \mathbb{E}_\theta [u_i(\alpha_1(\theta_1), \alpha_2(\theta_2), \theta_i)] = \sum_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(\theta) \cdot u_i(\alpha_1(\theta_1), \alpha_2(\theta_2), \theta_i).$$

La matriz de pagos simétrica es la siguiente:

	AA	AN	NA	NN
AA	$\frac{M}{4} - \frac{s+w}{2}, \frac{M}{4} - \frac{s+w}{2}$	$\frac{M}{2} - \frac{s+w}{4}, \frac{M}{4} - \frac{s}{2}$	$\frac{3M}{4} - \frac{s+w}{4}, -\frac{w}{2}$	$M, 0$
AN	$\frac{M}{4} - \frac{s}{2}, \frac{M}{2} - \frac{s+w}{4}$	$\frac{M-s}{4}, \frac{M-s}{4}$	$\frac{M}{2} - \frac{s}{4}, \frac{M}{2} - \frac{s}{4}$	$\frac{M}{2}, 0$
NA	$-\frac{w}{2}, \frac{3M}{4} - \frac{s+w}{4}$	$\frac{M-w}{4}, \frac{M}{2} - \frac{s}{4}$	$\frac{M-w}{4}, \frac{M-w}{4}$	$\frac{M}{2}, 0$
NN	$0, M$	$0, \frac{M}{2}$	$0, \frac{M}{2}$	$0, 0$

Por ejemplo, el pago esperado para el jugador 1 bajo el perfil (AA, AA) se calcula como:

$$\frac{1}{4}(-w) + \frac{1}{4}(M - s) + \frac{1}{4}(-w) + \frac{1}{4}(-s) = \frac{M}{4} - \frac{s+w}{2}.$$

A partir de esta matriz, se identifican los equilibrios bayesianos en estrategias puras bajo distintos rangos de parámetros:

- **Caso 1:** Si $M > w > s$ y $w > M/2 > s$, entonces (AA, AN) y (AN, AA) son ENB.
- **Caso 2:** Si $M > w > s$ y $M/2 < s$, entonces (AA, NN) y (NN, AA) son ENB.
- **Caso 3:** Si $w > M > s$ y $M/2 < s$, entonces (AN, AN) , (AA, NN) y (NN, AA) son ENB.
- **Caso 4:** Si $w > M > s$ y $M/2 > s$, entonces (AA, AN) , (AN, AA) y (AN, AN) son ENB.

4.2. Subastas como juegos bayesianos

Las subastas constituyen una aplicación ideal de los juegos bayesianos. La teoría de juegos ha permitido entender y diseñar subastas. De cierta forma, permite hacer ingeniería económica. La situación más sencilla es la siguiente: Un subastador quiere vender un objeto y hay $n \geq 2$ postores. Cada postor tiene una valoración v que es privada. Es decir, cada postor ignora la valoración de los demás postores. Este es un modelo de valoraciones independientes.²

Definición 4.2.1. Subasta inglesa. El subastador anuncia un precio bajo y comienza a aumentarlo. Los postores se retiran de la subasta cuando consideran que el precio es demasiado alto y en el momento en que queda un solo postor, éste obtiene el objeto. Se suele usar en mercados de antigüedades, autos usados, ganado, etc. La subasta inglesa es estratégicamente equivalente a la subasta de segundo precio, también conocida como subasta de Vickrey.

Ejemplo 4.2.2. Consideremos que $\theta_i = v_i \sim U[0, 1]$ y el caso de una subasta inglesa. Las acciones de los postores son $b_i \in \mathbb{R}$ tal que el postor se retira si el precio alcanza b_i . De este modo, el pago de i , dado que las acciones son $b = (b_1, \dots, b_n)$, viene dado por (ignorando empates: probabilidad nula según una medida absolutamente continua

²Como se mencionó antes, en el caso de los yacimientos petroleros, es posible considerar un modelo de valoración común donde los tipos son privados, y la verdadera valoración común es la suma de los tipos.

respecto a Lebesgue)

$$u_i(b, v) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Se sigue que $b_i = v_i$ es un equilibrio bayesiano. En efecto, una puja menor arriesga perder cuando conviene ganar, mientras que una puja mayor arriesga ganar cuando conviene perder. Luego, el postor con la valoración más alta gana y paga la segunda mayor valoración. De este modo, el ingreso esperado para el subastador es $\mathbb{E}[v_{(2,n)}]$, donde $v_{(2,n)}$ es el segundo orden estadístico de n variables aleatorias $U[0, 1]$.

Ejemplo 4.2.3. Consideremos ahora una subasta de sobre cerrado, tipo Holandesa³. Los postores envían ofertas $b_i \in \mathbb{R}_+$. El ganador es quien presenta la mayor oferta y paga su propia oferta. De este modo, para el postor i , dadas las acciones $b = (b_1, \dots, b_n)$,

$$u_i(b, v) = \begin{cases} v_i - b, & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0, & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Pregunta: ¿Qué formato de subasta es más conveniente para el subastador? ¿La subasta inglesa o la subasta de oferta sellada (primer precio)? Si bien intuitivamente $b_{2do \text{ precio}} > b_{1er \text{ precio}}$, esto no implica que el pago esperado sea mayor para el subastador.

Respuesta: los pagos esperados serán iguales.

Demostración. Supongamos que cada postor, salvo i , puja $b_j = \lambda v_j$ para algún $\lambda \in (0, 1]$. Entonces, i gana si $b_i > \lambda v_j$. Esto ocurre con probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{b_i > \lambda v_j, \forall j \neq i\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{b_i}{\lambda} v_j, \forall j \neq i\right\} \\ &= \min\left\{\left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}, 1\right\}. \end{aligned}$$

El pago esperado i al pujar $b_i \leq \lambda$ es $(v_i - b_i) \left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}$. La CPO provee

$$\underbrace{-\left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}}_{\text{costo marginal}} + \underbrace{(v_i - b_i) \frac{b_i^{n-2}}{\lambda^{n-1}}}_{\text{beneficio marginal}} = 0.$$

³En la cual, se empieza con un monto arbitrariamente grande, y progresivamente se baja.

Simplificando,

$$b_i = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v_i.$$

Pero entonces, $b_i = \lambda v_i$ con $\lambda = \frac{n-1}{n}$ es un equilibrio bayesiano en este juego. Luego, el ingreso esperado del subastador es

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \mathbb{E}[v_{(1,n)}].$$

Como $\mathbb{E}[v_{(1,n)}] = \frac{n}{n+1}$ y $\mathbb{E}[v_{(1,n)}] = \frac{n-1}{n+1}$ (ver proposición 4.2.4), concluimos que el pago esperado es igual al caso de la subasta inglesa. ¿Es esto una coincidencia? Veremos pronto que no. \square

Proposición 4.2.4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra i.i.d. de la distribución uniforme $U(0,1)$, y sea $X_{(k)}$ el k -ésimo orden estadístico de la muestra. Entonces:

$$\mathbb{E}[X_{(k)}] = \frac{k}{n+1}.$$

Demostración. Sabemos que el k -ésimo orden estadístico $X_{(k)}$ tiene distribución:

$$X_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n+1-k),$$

cuyo valor esperado está dado por la fórmula estándar para la esperanza de una beta:

$$\mathbb{E}[X_{(k)}] = \frac{k}{k + (n+1-k)} = \frac{k}{n+1}.$$

Alternativamente, podemos derivar esta esperanza directamente usando la densidad de $X_{(k)}$. La función de densidad está dada por:

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}, \quad x \in (0,1).$$

En efecto, sea

$$F_{X_{(k)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x).$$

Por definición de orden estadístico:

$$F_{X_{(k)}}(x) = \mathbb{P}(\text{al menos } k \text{ de las } X_i \text{ son } \leq x).$$

Como $X_i \sim U(0,1)$, la probabilidad de que una variable esté $\leq x$ es simplemente x .

Sea

$$Y \sim \text{Binomial}(n, x),$$

el número de X_i 's que son menores o iguales que x . Entonces:

$$\begin{aligned} F_{X_{(k)}}(x) &= \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(Y \geq k) \\ &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}. \end{aligned}$$

Luego, por definición

$$\begin{aligned} f_{X_{(k)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(k)}}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \right]. \end{aligned}$$

Así, el valor esperado se calcula como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(k)}] &= \int_0^1 x f_{X_{(k)}}(x) dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx. \end{aligned}$$

Reconocemos que esta es la integral que define la función beta:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

por lo tanto, con $a = k + 1$ y $b = n - k + 1$:

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}.$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(k)}] &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \frac{n! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-1)!(n-k)! \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{k \cdot n!}{(k-1)!(n+1)!} = \frac{k}{n+1}. \end{aligned}$$

□

Una buena referencia para un análisis más detallado de los *order statistics* es [Border \(2021\)](#). Ahora, vamos a presentar el modelo general de subastas.

- n postores interesados en un objeto,

- ▶ cada postor tiene una valoración $v_i \sim F$, siendo el soporte de F el compacto $[\underline{v}, \bar{v}]$,
- ▶ conjunto de acciones disponibles para cada postor: puja $b_i \in \mathbb{R}_+$,
- ▶ formato de la subasta:
 - △ **regla de asignación** $x(b) = (x_1(b), \dots, x_n(b))$ tal que $x_i(b) \geq 0$ y $\sum_i x_i(b) \leq 1$ para todo b , especificando la probabilidad de ganar,
 - △ **regla de precio** $p(b) = (p_1(b), \dots, p_n(b))$ especificando el precio que paga cada postor. Se permite el caso en el que incluso los perdedores pagan: Rifas, juegos de competencia entre animales (leones versus hienas).

Definición 4.2.5. Subasta es eficiente. Una subasta es eficiente si en un equilibrio bayesiano simétrico $x_i = 1$ si $v_i > \max_{j \neq i} v_j$. O sea, si el postor con mayor valoración gana.

Ejemplo 4.2.6. En el caso de las rifas, donde los participantes aportan y la probabilidad de ganar es proporcional al aporte, no es un juego eficiente pues puede que un individuo que no aporta mucho gane.

Definición 4.2.7. Límite inferior de pago. Una subasta tiene un límite inferior para el pago esperado del postor si en un equilibrio bayesiano simétrico $\mathbb{E}[x_i v_i - p_i] = 0$ si $v_i = \underline{v}$ (el postor con la valoración más baja tiene un pago esperado de cero).⁴

Observación 4.2.8. Una subasta eficiente con límite inferior de pago esconde una ecuación diferencial cuya dinámica corresponde a la eficiencia, y la condición de límite inferior a la condición de borde.

Teorema 4.2.9. Equivalencia de ingresos. En toda subasta eficiente con un límite inferior para la recompensa del postor, el ingreso esperado del subastador es el mismo, asumiendo diferenciabilidad [Binmore \(2007\)](#).

Definición 4.2.10. Juego de revelación directa. Un juego de revelación directa es un juego bayesiano en el cual el conjunto de acciones para cada jugador es igual al conjunto de tipos de este jugador: $A_i = \Theta_i$. Intuitivamente, se le pide a cada jugador que anuncie su tipo.

⁴De cierta forma, es como una participación voluntaria.

En lugar de la subasta original, consideramos el juego de revelación directa $\hat{x}(\hat{v}) = x(b(\hat{v}))$, $\hat{p}(\hat{v}) = p(b(\hat{v}))$, donde \hat{v} es el vector de valoraciones de tipos anunciados.

Ejemplo 4.2.11. En una subasta de primer precio con valoraciones uniformes estándar, $x_i(b) = 1$ y $p_i(b) = b_i$ si $b_i > b_j$ para todo $j \neq i$, y 0 caso contrario. En este caso, $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i$. Entonces, el juego de revelación directa correspondiente es $\hat{x}_i(\hat{v}) = 1$ y $\hat{p}_i(\hat{v}) = \frac{n-1}{n}\hat{v}_i$, si $v_j > v_i$ para todos los $j \neq i$ y 0 caso contrario.

Ejemplo 4.2.12. La subasta de segundo precio ya es un juego de revelación directa.

Observación 4.2.13. En síntesis, un juego de revelación directa es un juego donde, en lugar de pujar b_i , se puja directamente \hat{v}_i y el mecanismo aplica la misma regla de asignación y pago como si hubiesen pujado según: $\hat{x}(\hat{v}) = x(b(\hat{v}))$, $\hat{p}(\hat{v}) = p(b(\hat{v}))$. Por ende,

$$\hat{x} = x \circ b$$

$$\hat{p} = p \circ b.$$

Al hacer esto, se recuperan los pagos esperados.⁵

Teorema 4.2.14. Principio de revelación. Si es un equilibrio comportarse de acuerdo a $b(v)$ en el juego original, entonces es un equilibrio revelar la propia valoración en el juego correspondiente de revelación directa. Es decir, si todos los demás informan la verdad, es una mejor respuesta en el nuevo juego informar la verdad.

Demostración. Si todos se comportan con veracidad,

$$b(v_i) \in \operatorname{argmax}_{b \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[x(b_i, b_{-i}(v_{-i}))v_i - p(b_i, b_{-i}(v_{-i}))]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_i \in \operatorname{argmax}_{\hat{v}_i \in [0,1]} \mathbb{E}[\hat{x}(\hat{v}_i, v_{-i})v_i - \hat{p}(\hat{v}_i, v_{-i})].$$

Ambos problemas son formalmente idénticos, ya que el jugador maximiza la misma función objetivo en ambos casos: una escrita en términos de la puja b_i , y otra en términos del tipo reportado \hat{v}_i , estando relacionadas mediante $b(\hat{v}_i)$. \square

⁵Otra forma de recuperar los pagos esperados, es cobrar con probabilidad 1 el pago esperado. Sin embargo, bajo este formato, incluso los que no pagan juegan.

Corolario 4.2.15. No perdemos nada al enfocarnos exclusivamente en juegos de revelación directa.

Definición 4.2.16. Un mecanismo de revelación directa satisface la *compatibilidad de incentivos* si cada jugador tiene el incentivo de reportar su valoración verdadera. Sea $s(z_i, v_i)$ la utilidad esperada del jugador i con valoración v_i cuando declara z_i . Esta utilidad se define como

$$\underbrace{s(z_i, v_i)}_{\text{Surplus}} = \mathbb{E}[x_i(z_i, v_{-i})v_i - p_i(z_i, v_{-i}) \mid v_i] = \pi(z_i)v_i - m(z_i),$$

donde $\pi(z_i) = \mathbb{E}[x_i(z_i, v_{-i}) \mid v_i] = \mathbb{E}[x_i(z_i, v_{-i})]$ ⁶ es la probabilidad esperada de obtener el bien al declarar z_i , y $m(z_i) = \mathbb{E}[p_i(z_i, v_{-i}) \mid v_i]$ es el pago esperado. Note que se asume $\hat{v}_{-i} = v_{-i}$ (implementación bayesiana). La condición de compatibilidad de incentivos (IC) requiere que declarar la verdad sea una mejor estrategia que cualquier otra declaración alternativa. Formalmente, para todo v_i y $v'_i \in [\underline{v}, \bar{v}]$, se debe cumplir que

$$s(v_i, v_i) \geq s(v'_i, v_i).$$

Esta condición garantiza que los jugadores prefieran actuar con veracidad en equilibrio.

Demostración del Teorema 4.2.9. De acuerdo con la condición de compatibilidad de incentivos, tenemos que

$$\begin{aligned} s(v_i, v_i) &\geq s(v'_i, v_i) \\ &= \pi(v'_i)v_i - m(v'_i) \\ &= s(v'_i, v'_i) + (v_i - v'_i)\pi(v'_i). \end{aligned}$$

Si definimos $S(v_i) = s(v_i, v_i)$, entonces

$$S(v_i) \geq S(v'_i) + \underbrace{(v_i - v'_i)\pi(v'_i)}_{\text{Corrección}}.$$

Tomando $v'_i = v_i + dv$,

$$S(v_i) \geq S(v_i + dv) - dv\pi(v_i + dv). \tag{4.3}$$

⁶Remover la esperanza condicional ya no aplica si trabajamos con, por ejemplo, valores afiliados.

Ahora bien, análogamente

$$\begin{aligned} S(v_i + dv) &= s(v_i + dv, v_i + dv) \\ &\geq s(v'_i, v_i + dv) \\ &= \pi(v'_i)(v_i + dv) - m(v'_i) \\ &= S(v'_i) + (v_i + dv - v'_i)\pi(v'_i). \end{aligned}$$

En particular, para $v'_i = v_i$,

$$S_i(v_i + dv) = S(v_i) + dv\pi(v_i). \tag{4.4}$$

Por lo tanto, combinando (4.3) y (4.4),

$$\pi(v_i + dv) \geq \frac{S(v_i + dv) - S(v_i)}{dv} \geq \pi(v_i).$$

Haciendo $dv \rightarrow 0$, $dS/dv = \pi(v)$. Conociendo $S(v)$ y $\pi(\cdot)$ podemos encontrar $S(\cdot)$ - teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales - dada una regla de asignación eficiente, la ganancia esperada depende solo de la ganancia del postor con la valoración más baja. En efecto: Conocemos que

$$\frac{dS}{dv}(v) = \pi(v), \quad \text{con } S(\underline{v}) = 0,$$

donde la condición $S(\underline{v}) = 0$ se debe al límite inferior de participación: el postor con la valoración más baja tiene utilidad esperada cero. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), la función $S(v)$ queda completamente determinada por $\pi(v)$.

Dado que la utilidad esperada del postor es $S(v) = \pi(v)v - m(v)$, podemos despejar la función de pago esperado como

$$m(v) = \pi(v)v - S(v).$$

Por lo tanto, los pagos esperados también quedan determinados por $\pi(v)$. Finalmente, el ingreso esperado del subastador está dado por

$$\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} m(v) dF(v),$$

y depende exclusivamente de la regla de asignación eficiente $\pi(v)$, que es común a toda subasta eficiente. Esto concluye la demostración. \square

Observación 4.2.17. Dado que las ganancias esperadas de los postores en una subasta eficiente quedan completamente determinadas por la regla de asignación $\pi(v)$, y esta es común a todas las subastas eficientes, se concluye que las funciones de pago esperado $m(v)$ también deben ser las mismas en todas estas subastas. Por lo tanto, el *precio esperado que paga cada postor es independiente del formato particular* de la subasta (por ejemplo, si es de primer o segundo precio), siempre que se preserve la eficiencia y la condición de participación voluntaria. En consecuencia, el *ingreso esperado del subastador* también es independiente del formato, ya que es la suma de estos pagos esperados ponderados por la distribución de valoraciones. Adicionalmente, esta demostración no solo establece la equivalencia del ingreso esperado para el subastador, sino también la *equivalencia de la utilidad esperada (interim) de los postores*, es decir, la utilidad que anticipan antes de conocer los valores de los demás, pero conociendo el propio.

Importante: La *equivalencia de ingresos esperados* no implica que el *ingreso ex post (realizado)* sea igual en todas las realizaciones del juego. Las distintas subastas eficientes pueden generar distintos pagos en equilibrio, pero en *esperanza*, los ingresos coinciden.

El *principio de revelación* permite reducir el análisis de subastas a juegos de revelación directa, lo cual facilita el diseño de mecanismos. En particular, es posible plantear el problema de maximizar los ingresos esperados del subastador bajo las restricciones de eficiencia e incentivos, conduciendo al diseño de subastas *óptimas*. Este enfoque pertenece al campo del *diseño de mecanismos*, cuyo objetivo es determinar las reglas del juego (asignaciones y pagos) que maximizan un criterio deseado en equilibrio bayesiano.

Este proceso de construcción y descubrimiento de reglas eficientes se vincula de manera conceptual con la visión de Hayek sobre el papel de los precios como mecanismos de información en los mercados. Una excelente discusión sobre este paralelismo puede encontrarse en McAfee and McMillan (1987),⁷ donde se explora el papel de las subastas como instrumentos de agregación de información y asignación eficiente de recursos.

⁷McAfee and McMillan (1987) presentan una revisión exhaustiva sobre la teoría de subastas, analizando formalmente los principales formatos (subasta de primer precio, segundo precio, inglesa, holandesa), sus propiedades de eficiencia, comportamiento estratégico de los postores y resultados sobre el ingreso esperado del subastador. El artículo demuestra la equivalencia de ingresos esperados

Observación 4.2.18. Algunos principios del diseño de mecanismos aplicados a subastas sugieren estrategias que, si bien pueden aumentar los ingresos del subastador, pueden comprometer la eficiencia asignativa. Por ejemplo:

- ▶ Imponer un *precio de reserva* (eventualmente secreto) o una *oferta mínima* puede incrementar los ingresos en ciertos casos, pero no es eficiente, ya que existe una probabilidad positiva de que no se realice la transacción si ninguna valoración supera ese umbral: $\mathbb{P}\{v_i \leq r : \forall i\} \neq 0$.
- ▶ Utilizar una *subasta ascendente* o una *subasta de segundo precio* es recomendable en contextos con valoraciones comunes, ya que ayuda a mitigar la *maldición del ganador* y reduce la complejidad del problema estratégico del postor.
- ▶ Diseños que *favorecen a postores en desventaja* pueden promover objetivos de equidad o competencia, pero sacrifican eficiencia si asignan el objeto a alguien con menor valoración que el postor más dispuesto a pagar.
- ▶ Una advertencia crucial: *la adición de un solo postor suele incrementar el ingreso esperado del subastador más que el paso de una subasta eficiente a una subasta óptima*, lo cual resalta la importancia del número de participantes sobre ajustes finos en el formato del mecanismo. De hecho, [McAfee and McMillan \(1987\)](#) prueban que la mejora del pago esperado del subastador está acotada por agregar un nuevo jugador.

Ejemplo 4.2.19. Siguiendo el planteamiento del capítulo 11 de [Binmore \(2007\)](#), consideremos el problema de diseño de una subasta óptima para la venta de una casa. Consideremos un entorno simétrico con dos postores, cada uno con una valoración privada que puede ser *Alta*, igual a \$400,000, o *Baja*, igual a \$300,000. Normalizando, tomamos los valores como 4 y 3 respectivamente. Las valoraciones son independientes bajo ciertas condiciones (valoraciones independientes, simétricas, y mecanismos eficientes con participación voluntaria) y presenta el problema de diseño de mecanismos óptimos como un problema de maximización sujeto a restricciones de incentivos (IC) y racionalidad individual (IR). Además, destaca la función informacional de las subastas como mecanismos de agregación de conocimiento privado, conectando esta idea con la visión de Hayek sobre el descubrimiento descentralizado de precios en los mercados competitivos.

y la probabilidad de que un postor tenga la valoración baja es p , por lo que tiene la valoración alta con probabilidad $1 - p$. Se busca diseñar un juego de revelación directa simétrico, representado por el cuádruple $\langle h, \ell, H, L \rangle$, donde:

- h : probabilidad de asignación si el postor declara una valoración alta,
- ℓ : probabilidad de asignación si declara una valoración baja,
- H : pago si declara alta,
- L : pago si declara baja.

El objetivo es maximizar el ingreso esperado del vendedor sujeto a condiciones de compatibilidad de incentivos y racionalidad individual. El problema de diseño se plantea como:

$$\max_{\ell, h, L, H} \underbrace{2[(1-p)H + pL]}_{\text{Neutral al riesgo.}}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

- **Compatibilidad de incentivos:**

$$4h - H \geq 4\ell - L \tag{CI1}$$

$$3\ell - L \geq 3h - H. \tag{CI2}$$

- **Racionalidad individual:**

$$4h - H \geq 0 \tag{RI1}$$

$$3\ell - L \geq 0. \tag{RI2}$$

Este planteamiento permite encontrar el mecanismo que maximiza los ingresos esperados del subastador en un contexto simple pero representativo de la teoría de diseño de mecanismos. Como veremos enseguida, el problema se simplifica, de modo que $4h - H = 4\ell - L$, $4h - H > 0$, $3\ell - L = 0$ y $3\ell - L > 3h - H$.

Dado que el subastador posee un único objeto para asignar, el mecanismo debe respetar ciertas condiciones de factibilidad adicionales. En particular, como el entorno

es simétrico y hay dos postores, la probabilidad ex ante de que un jugador cualquiera reciba el objeto no puede exceder $\frac{1}{2}$. Esto genera la siguiente restricción:

$$(1 - p)h + p\ell \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{F1})$$

Adicionalmente, existen límites superiores naturales para la probabilidad de asignación condicional de cada tipo. Si un postor tiene una valoración alta, entonces su probabilidad máxima de ganar es:

- p : cuando el oponente tiene valoración baja, gana seguro.
- $\frac{1}{2}(1 - p)$: cuando ambos tienen valoración alta, gana en promedio la mitad de las veces.

Esto implica:

$$h \leq p + \frac{1 - p}{2} = \frac{1}{2}(p + 1). \quad (\text{F2})$$

De manera análoga, si un postor tiene una valoración baja, puede ganar solo cuando el oponente también tiene una valoración baja (probabilidad p), en cuyo caso gana a lo sumo la mitad de las veces. Si el oponente tiene valoración alta (probabilidad $1 - p$), entonces no debería ganar. Por tanto:

$$\ell \leq (1 - p) + \frac{p}{2} = 1 - \frac{p}{2}. \quad (\text{F3})$$

Estas tres restricciones complementan las condiciones de compatibilidad de incentivos y racionalidad individual, asegurando que el mecanismo propuesto sea implementable y coherente con la estructura del problema.

A partir de las condiciones de compatibilidad de incentivos (CI1) y (CI2), se puede deducir una condición de *monotonía* para la probabilidad de asignación y los pagos esperados. Sumando (CI1) y (CI2), se obtiene:

$$4h - H \geq 4\ell - L, \quad \text{y} \quad 3\ell - L \geq 3h - H$$

$$\Rightarrow 4(h - \ell) \geq H - L \geq 3(h - \ell).$$

Lo que implica:

$$h \geq \ell \quad \text{y} \quad H \geq L.$$

Es decir, el tipo alto debe ganar con mayor probabilidad y esperar pagar más. Esto garantiza que el mecanismo sea implementable y respete los incentivos. Luego,

$$4h - H \geq 4\ell - L > 3\ell - L \geq 0 \implies 4h - H > 0.$$

En seguida notamos que $3\ell - L > 0$ es una contradicción pues los beneficios de la firma pueden crecer haciendo $L \uparrow$, controlando las otras restricciones haciendo a su vez $H \uparrow$.

Así,

$$3\ell - L = 0.$$

Finalmente,

$$4h - H = 4\ell - L$$

pues, si $4h - H > 4\ell - L$, entonces podríamos hacer $H \uparrow$, sin afectar el resto de restricciones. De este modo, el ingreso esperado del subastador se escribe como:

$$(1-p)H + pL = (1-p)(4h - \ell) + p(3\ell) = 4(1-p)h + (3p - 1 + p)\ell = 4(1-p)h + (4p - 1)\ell.$$

Por lo tanto, el problema de diseño se reduce a:

$$\max_{h, \ell} (1-p)h + \left(p - \frac{1}{4}\right)\ell$$

sujeto a

$$(1-p)h + p\ell \leq \frac{1}{2}. \tag{F1}$$

$$h \leq \frac{1}{2}(p+1) \tag{F2}$$

$$\ell \leq 1 - \frac{p}{2}. \tag{F3}$$

Este problema lineal reducido puede resolverse gráficamente o mediante análisis de vértices, y permite caracterizar la subasta óptima en función del parámetro p , es decir, de la probabilidad de que los postores tengan una valoración baja.

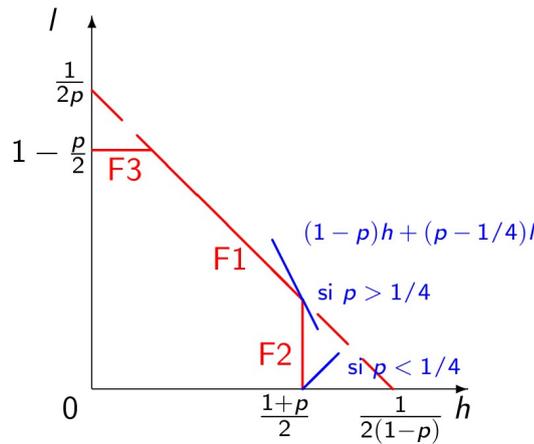


Figura 4.3 Restricción.

- Si $p < \frac{1}{4}$, la función objetivo es *decreciente* en ℓ , por lo que la solución óptima se encuentra en una **solución de esquina con $\ell = 0$** . Por ende:

$$h = \frac{1+p}{2}, \quad \ell = 0, \quad H = 2(1+p), \quad L = 0$$

El ingreso esperado del subastador es:

$$2[(1-p)H + pL] = 2(1-p) \cdot 2(1+p) = 2(1-p^2) = \boxed{4(1-p^2)}.$$

- Si $p > \frac{1}{4}$, la función objetivo es *creciente* en ℓ , pero está restringida por la condición de factibilidad (F3) y además, como la pendiente de la función objetivo es mayor a la de la restricción, siempre se llega a $h = \frac{p+1}{2}$. Así, ℓ queda determinado por la restricción:

$$h = \frac{1+p}{2}, \quad \ell = \frac{p}{2}, \quad L = 3\ell = \frac{3p}{2}, \quad H = 4h - \ell = 2 + \frac{3p}{2}$$

El ingreso esperado es:

$$2[(1-p)H + pL] = 2(1-p) \left(2 + \frac{3p}{2}\right) + 2p \cdot \frac{3p}{2} = \boxed{4-p}.$$

- Si $p = \frac{1}{4}$, hay muchos mecanismos, $h = (1+p)/2$, $\ell \in [0, p/2]$ que generan:

$$\boxed{4(1-p^2) = 4 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 3,75}.$$

¿Cómo se implementa la subasta óptima cuando $p < \frac{1}{4}$? El subastador simplemente anuncia un precio fijo de $\boxed{4}$.

- Si ningún postor tiene valoración alta, no hay venta.
- Si solo uno tiene valoración alta, compra el objeto.
- Si ambos tienen valoración alta, se rifa: cada uno recibe el objeto con probabilidad $1/2$.
- En este caso **no** hay eficiente, porque hay una probabilidad positiva de que *ningún postor compre el objeto*, a pesar de que ambos lo valoran en 3.
- La pérdida social ocurre cuando $(v_1, v_2) = (3, 3)$, y el objeto no se asigna.
- Esta pérdida es:

$$\boxed{3 \cdot p^2}$$

que corresponde al valor del objeto por la probabilidad de que ambos postores tengan valoraciones bajas.

¿Cómo se implementa la subasta óptima cuando $p > \frac{1}{4}$? En este caso, recordemos que (re-escribiendo)

$$H = \frac{7}{2}p + 4 \left(\frac{1-p}{2} \right).$$

Esto implica que se paga el promedio. Si ambos tienen valoración 3, el que gana paga 3. Si uno valor 4 y el otro 3, entonces se paga $3.5 = 7/2$. Finalmente, en caso ambos valoren en 4, el ganador paga 4. En este caso, la subasta sí es **eficiente**. Más aún, el beneficio esperado excede el beneficio de la subasta de segundo precio. Esto no es una contradicción con el teorema 4.2.9. En efecto, las valoraciones no son continuas.

Comparación: primera mejor vs segunda mejor:

- **Primera mejor (con información completa):**

$$\text{Ingreso} = 4(1 - p^2) + 3p^2 = \boxed{4 - p^2}.$$

- Segunda mejor (óptima con incentivos):

$$\text{Ingreso} = \begin{cases} 4(1 - p^2) & \text{si } p \leq \frac{1}{4} \\ 4 - p & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Interpretación de pérdidas sociales y rentas informativas

- Si $p < \frac{1}{4}$, hay pérdida social:

$$\text{Pérdida} = 3p^2 \quad (\text{el objeto no se asigna con probabilidad } p^2)$$

- Si $p > \frac{1}{4}$, el objeto siempre se asigna, pero se genera:

$$\text{Renta informativa} = \text{tipo alto paga menos de 4.}$$

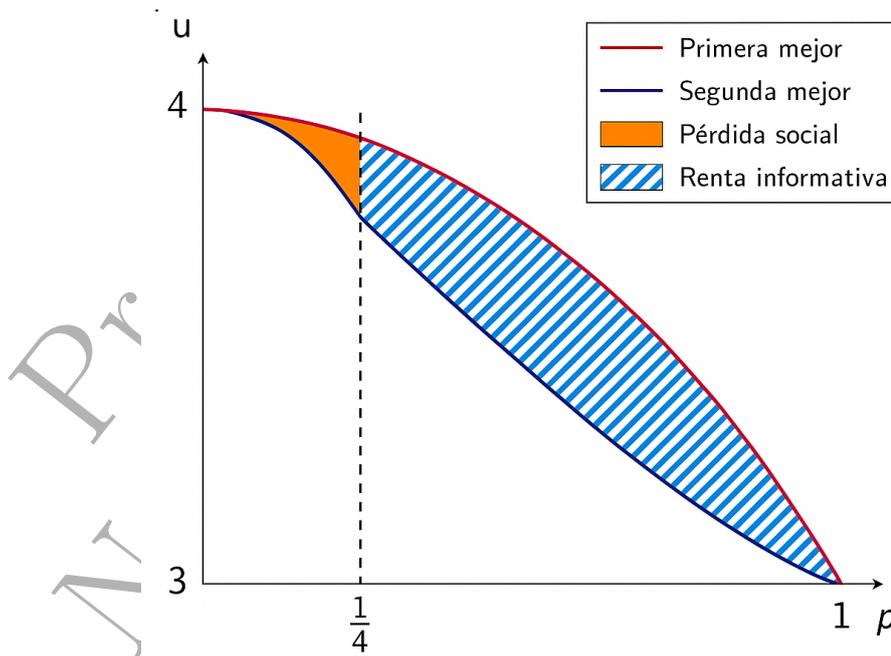


Figura 4.4 Ingresos esperados, pérdida social y renta informacional.

La figura 4.4 compara el ingreso esperado del subastador bajo dos escenarios: el de primera mejor (curva roja), correspondiente al caso con información completa, y el de

segunda mejor (curva azul), que representa el ingreso máximo compatible con incentivos cuando los tipos de los postores son privados. En el eje horizontal se encuentra p , la probabilidad de que un postor tenga valoración baja ($v = 3$), mientras que el eje vertical representa $\mathbb{E}[\text{Beneficios}]$, es decir, el ingreso esperado del subastador. En el caso de información completa, el subastador puede extraer toda la utilidad del postor con mayor valoración, asignando eficientemente el objeto. El ingreso esperado en este caso es (como vimos antes) Primera mejor = $4(1 - p^2) + 3p^2 = 4 - p^2$. Bajo información privada, el ingreso máximo se obtiene resolviendo un problema de diseño óptimo bajo restricciones de compatibilidad de incentivos (IC) y participación individual (IR). El resultado es:

$$\text{Segunda mejor} = \begin{cases} 4(1 - p^2) & \text{si } p \leq \frac{1}{4}, \\ 4 - p & \text{si } p \geq \frac{1}{4}. \end{cases} \leq 4 - p^2.$$

El área sombreada en naranja representa la *pérdida social*, que ocurre cuando $p < \frac{1}{4}$: el objeto no se asigna si ambos postores tienen valoración baja, con probabilidad p^2 , lo que implica una pérdida de valor social de $3p^2$. Por otro lado, el área azul rayada representa la *renta informativa*, que aparece cuando $p > \frac{1}{4}$: el subastador debe dejar una parte de la renta al tipo alto para mantener incentivos veraces, lo que impide extraer todo su excedente (por ejemplo, el tipo alto paga 3,5 en lugar de 4 cuando el rival tiene valor 3).

Observación 4.2.20. En el caso de una subasta de primer o segundo precio, el ingreso esperado de caso estudiado en (4.2.19) es (en ambos casos)

$$3 + (1 - p)^2.$$

Esto no es consecuencia del teorema de equivalencia del ingreso esperado pues las valoraciones no son continuas. En el equilibrio de revelación, el precio más alto ofrecido por un perdedor es 3, a menos que ambos agentes sean de tipo alto. En este último caso, la mayor oferta perdedora es 4. (Recordar que los empates se resuelven al azar). Entonces, la utilidad esperada de Alice es:

$$4(1 - p)^2 + 3(1 - (1 - p)^2) = 3 + (1 - p)^2.$$

Este es un resultado de segundo óptimo, ya que $3 + (1 - p)^2 < 4 - p$ a menos que $p = 0$ o $p = 1$. Sin embargo, una subasta de Vickrey o una subasta inglesa es mejor

que ofrecer un precio fijo de “tómalo o déjalo” igual a 3, salvo cuando $p = 1$. También es mejor que ofrecer un precio fijo de 4 cuando se cumple:

$$3 + (1 - p)^2 > 4(1 - p)^2.$$

Esto ocurre cuando $\frac{2}{5} < p \leq 1$. Con respecto al caso de una subasta de primer precio, los agentes de tipo alto aleatorizan según una distribución, digamos $F(b)$ con soporte incluido en $[3, 4]$. Para tener un equilibrio, y considerando que solo van a aleatorizar, se debe cumplir que

$$[p + (1 - p)F(b)](4 - b) = \text{cte.}$$

Luego,

$$F_p(b) = \frac{C - p(4 - b)}{(1 - p)(4 - b)} = \frac{C}{(1 - p)(4 - b)} - \frac{p}{1 - p}.$$

Dado $F(3) = 0$, $C = p$. Por otro lado, para determinar $\bar{b} > 3$ tal que $F(\bar{b}) = 1$, hacemos

$$\frac{p}{1 - p} \left[\frac{1}{4 - \bar{b}} - 1 \right] = 1.$$

Se sigue que $\bar{b} = 4 - p$. Por lo tanto,

$$F_p(b) = \frac{p}{1 - p} \frac{b - 3}{4 - b}.$$

La densidad asociada es

$$f_p(b) = \frac{p}{1 - p} \frac{1}{(4 - b)^2}.$$

Como $\mathbb{E}[\max\{b_1, b_2\}]$ viene dada por la integral sobre el soporte de $b \frac{d}{db} [F_p(b)]^2$, el retorno esperado del subastador es

$$3p^2 + 2p(1 - p) \int_3^{4-p} \frac{p}{1 - p} \frac{b}{(4 - b)^2} db + (1 - p)^2 2 \int_3^{4-p} \left[\frac{p}{1 - p} \frac{1}{(4 - b)^2} \right] \left[\frac{b - 3}{4 - b} \frac{p}{1 - p} \right] b db.$$

Esto es igual a

$$3p^2 + 2p(1 - p) \left[-\frac{p \ln p - 4p + 4}{p - 1} \right] + 2(1 - p)^2 (-1) \frac{p^2 \ln p - 3p^2 + 5p - 2}{(p - 1)^2}.$$

Simplificando, llegamos a

$$\begin{aligned} 3p^2 + 2p(p \ln p - 4p + 4) - 2p^2 \ln p + 6p^2 - 1p + 4 &= 3p^2 - 8p^2 + 8p + 6p^2 - 10p + 4 \\ &= p^2 - 2p + 4 \\ &= 3 + (1 - p)^2. \end{aligned}$$

4.3. Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves

Siguiendo a [Milgrom \(2004\)](#), [Vickrey \(1961\)](#) analizó situaciones en las que los agentes compiten por comprar o vender un conjunto de bienes. Posteriormente, [Clarke \(1971\)](#), [Groves \(1973\)](#) estudiaron el problema de la elección pública, en el cual los agentes deciden si emprender un proyecto colectivo —como la construcción de un puente o una autopista— cuyo costo debe ser asumido por ellos. Este análisis generaliza el de Vickrey al permitir cualquier elección dentro de un conjunto finito, lo cual se asume para evitar complicaciones técnicas derivadas de conjuntos infinitos, como la existencia de máximos. Sea $N = \{0, \dots, |N|\}$ el conjunto de participantes, donde el agente 0 es el operador del mecanismo, y sea X el conjunto finito de decisiones posibles, con $x \in X$ denotando una decisión. Un resultado es un par (x, p) , donde $p = (p_0, \dots, p_{|N|})$ representa un vector de pagos, que pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, en una subasta de primer precio con sobre cerrado, $x_i = 1$ si el agente i gana el objeto, y $p_i = -b_i$ si ganó ofertando b_i , mientras que $p_j = 0$ para los demás. Se asume que cada participante i valora los resultados mediante $u_i(x, p, \theta_i) = v_i(x, \theta_i) - p_i$, es decir, el valor que le asigna a la decisión x , dado su tipo θ_i , menos el pago que realiza. Esta especificación cuasi-lineal permite compensaciones monetarias exactas y simplifica el análisis. Se define el rendimiento del mecanismo como una función que asigna a cada perfil de tipos una decisión y un vector de pagos. El objetivo del análisis VCG es lograr eficiencia, es decir, elegir x que maximice $\sum_{i \in N} v_i(x, \theta_i)$, sujeto a que la suma neta de pagos sea cero. En algunos contextos públicos, también se desea que $p_0 \equiv 0$, generando mecanismos de presupuesto balanceado, como en entornos regulatorios o dentro de la teoría de la firma. Los mecanismos VCG son mecanismos directos e incentivo-compatibles: cada agente reporta su tipo verdadero θ_i y la estrategia de reportar la verdad es una estrategia dominante. Así, se evita el cálculo estratégico complejo, ya que la mejor acción para cada agente es ser veraz, independientemente del comportamiento de los demás. Por ejemplo, como vimos antes, en la subasta de segundo precio, ofertar el valor propio es una estrategia (débilmente) dominante. El operador del mecanismo VCG usa los tipos reportados θ para calcular el valor total máximo $V(X, N, \theta) = \max_{x \in X} \sum_{j \in N} v_j(x, \theta_j)$ y la decisión óptima $\hat{x}(X, N, \theta) = \arg \max_{x \in X} \sum_{j \in N} v_j(x, \theta_j)$.

El mecanismo VCG elimina los incentivos para mentir imponiendo a cada participante el costo de cualquier distorsión que cause. El pago VCG para el participante i se define de manera que su reporte no pueda afectar el bienestar total del resto de participantes, es decir, del conjunto $N \setminus \{i\}$. Nótese que $0 \in N \setminus \{i\}$, lo que significa que el diseñador del mecanismo (el agente 0) también está incluido en este conjunto, ya que su utilidad corresponde a los ingresos netos del mecanismo. Para derivar la fórmula del pago VCG, se introduce un *reporte nulo* o *reporte indiferente*, donde el agente i declara ser indiferente entre todas las decisiones y preocuparse únicamente por las transferencias monetarias. En este caso, el mecanismo VCG selecciona la decisión $\hat{x}(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i})$, y el valor total generado para los agentes distintos de i es $V(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i})$. El diseñador podría además recibir un pago $h_i(\theta_{-i})$ por parte del agente i . Así, si i hace el reporte nulo, la utilidad total para los agentes en $N \setminus \{i\}$ es $V(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i}) + h_i(\theta_{-i})$. El mecanismo se diseña para que esta misma utilidad se mantenga incluso si i reporta su tipo verdadero. Supongamos que el perfil reportado es $\hat{\theta}$, y que el pago del agente i es entonces $\hat{p}_i(X, N, \hat{\theta}) + h_i(\theta_{-i})$. Como la decisión $\hat{x}(X, N, \hat{\theta})$ depende del reporte de i , el bienestar del resto de los agentes es

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \hat{\theta}), \theta_j) + \hat{p}_i(X, N, \hat{\theta}) + h_i(\theta_{-i}).$$

Igualamos esto con el valor obtenido bajo el reporte nulo:

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \hat{\theta}), \theta_j) + \hat{p}_i(X, N, \hat{\theta}) = V(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i}) + h_i(\theta_{-i}).$$

Despejando, se obtiene la fórmula del pago adicional:

$$\hat{p}_i(X, N, \hat{\theta}) = V(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \hat{\theta}), \theta_j).$$

Esta expresión implica que si el reporte de i modifica la decisión final, entonces su pago compensa exactamente la pérdida de bienestar que impone al resto de participantes.

Si i no es *pivotal* (es decir, si su reporte no cambia la decisión), entonces $\hat{p}_i = 0$. El *mecanismo pivotal* es aquel en que $h_i(\theta_{-i}) = 0$ para todo i , y solo los agentes pivotaes pagan o reciben transferencias. Vickrey introdujo esta versión en el contexto de bienes divisibles, y en una subasta, los perdedores no hacen ni reciben pagos.

Milgrom (2004) verifica que las reglas del mecanismo VCG aseguran que reportar verazmente siempre es una estrategia óptima para cada participante,

independientemente de los reportes de los demás. Además, demuestra que reportar la verdad es a menudo una estrategia dominante, es decir, la única estrategia que es siempre óptima. Sin embargo, reconoce que existen circunstancias en las que, aunque reportar la verdad sea óptimo bajo el mecanismo VCG, no constituye una estrategia dominante. Por ejemplo, si dos agentes consideran compartir el alquiler de un bote que cuesta \$200, donde uno valora el bote en \$300 o \$0 (y solo puede reportar uno de esos valores) y el otro lo valora en algún monto entre \$0 y \$150 (y puede reportar cualquier valor en ese intervalo), entonces el mecanismo pivotal indica que el bote se alquile solo si el primer agente reporta \$300, en cuyo caso paga \$200, mientras que el segundo siempre paga \$0 y su reporte no influye en la decisión. Por lo tanto, cualquier reporte del segundo agente es óptimo, y también lo es cualquier reporte de \$200 o más del primero cuando su valoración es al menos \$200. Este tipo de ejemplos contruidos pueden generar situaciones donde algunas declaraciones falsas son irrelevantes, pero en contextos más generales, se espera que reportar la verdad sea una estrategia dominante.

Milgrom formaliza estas afirmaciones con las siguientes definiciones. Reportar la verdad es una estrategia siempre óptima si se cumple:

(i) para todo θ_{-i} ,

$$\theta_i \in \arg \max_{\theta'_i \in \Theta_i} \{v_i(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_i) - \hat{p}_i(X, N, \theta'_i, \theta_{-i})\}.$$

Es una estrategia dominante si además se cumple:

(ii) para todo $\theta'_i \neq \theta_i$, existe algún θ_{-i} tal que

$$\theta_i \notin \arg \max_{\theta'_i \in \Theta_i} \{v_i(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_i) - \hat{p}_i(X, N, \theta'_i, \theta_{-i})\}.$$

Para evitar ejemplos artificiales como el del bote, Milgrom impone la siguiente condición: *Todos los reportes son potencialmente pivotaes*, es decir, para todo $i \in N$ y todo $\theta'_i \in \Theta_i$, existe $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ tal que

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_j) < V(X, N, \theta),$$

donde $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$. Esta condición garantiza que para cualquier reporte falso θ'_i , existe un perfil de tipos de los demás jugadores tal que el resultado inducido por θ'_i es ineficiente. En este caso, el jugador no puede asegurar que mentir sea inocuo.

Teorema 4.3.1. En cualquier mecanismo VCG, reportar la verdad es una estrategia siempre óptima. Si todos los reportes son potencialmente pivotaes, entonces reportar la verdad es una estrategia dominante.

Demostración. Fijado un perfil $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$ de tipos verdaderos, si el jugador i reporta θ'_i , se elige la decisión $\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i})$ y su utilidad es

$$\begin{aligned} \Pi_i(\theta'_i | \theta) &= v_i(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_i) - \hat{p}_i(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}) \\ &= v_i(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_i) - \left(V(X, N \setminus \{i\}, \theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_j) \right). \end{aligned}$$

Entonces, la ganancia neta por desviarse es

$$\Pi_i(\theta'_i | \theta) - \Pi_i(\theta_i | \theta) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta, \theta_{-i}), \theta_j) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_j) \leq 0.$$

Esto demuestra que reportar la verdad es siempre óptimo.

Ahora, si todos los reportes son potencialmente pivotaes, entonces para todo $\theta'_i \neq \theta_i$ existe θ_{-i} tal que

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta'_i, \theta_{-i}), \theta_j) < \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\hat{x}(X, N, \theta, \theta_{-i}), \theta_j),$$

lo cual implica que

$$\Pi_i(\theta'_i | \theta) < \Pi_i(\theta_i | \theta).$$

Por lo tanto, reportar la verdad es una estrategia dominante. \square \square

El ejemplo más conocido del mecanismo pivotal es la *subasta de segundo precio*. En el modelo de valores privados, la valoración del postor i depende solo de si gana el bien: $v_i(x, \theta_i) = v_i$ si $x_i = 1$ y $v_i(x, \theta_i) = 0$ si $x_i = 0$. Los postores que pierden no son pivotaes, por lo que no pagan nada. Según la ecuación (2.4), el ganador paga la diferencia entre el valor total máximo sin su participación, $\max_{j \neq i} v_j$, y el valor que los demás obtienen cuando él gana (que es 0), resultando en un pago igual a la segunda mayor oferta. Por ello, este mecanismo se denomina *subasta de segundo precio*. Vickrey introdujo esta subasta como modelo de subastas ascendentes. Plataformas como eBay implementan este formato usando un sistema de *puja automática*, donde cada postor

declara un precio máximo secreto. Si todos usaran este sistema, el bien se asignaría al postor con mayor oferta máxima y pagaría aproximadamente la segunda mayor, lo que coincide con la subasta de Vickrey. Así, desde el punto de vista estratégico, la subasta inglesa con proxy y la subasta de segundo precio son equivalentes.

Teorema 4.3.2. Supóngase que para cada i , el espacio de tipos satisface $\Theta_i = [0, 1]$ (o, más generalmente, que Θ_i es conexo por trayectorias suaves), y que para cada resultado x , la función $v_i(x, \theta_i)$ es diferenciable respecto a su segundo argumento. Entonces, cualquier mecanismo directo que sea eficiente e incentivo-compatible debe ser un mecanismo VCG.

Esta versión del teorema 4.3.2 fue demostrada por primera vez por [Holmstrom \(1979\)](#), generalizando el trabajo previo de [Green and Laffont \(1977\)](#), quienes habían empleado suposiciones más restrictivas sobre el espacio de tipos.

A pesar de sus ventajas teóricas, la subasta de Vickrey presenta una serie de desventajas significativas que limitan su aplicabilidad en contextos reales. Estas desventajas pueden agruparse en tres categorías principales: prácticas, estructurales (relacionadas con la falta de monotonía en los pagos) y estratégicas (vinculadas a incentivos ex ante para fusiones e inversión).

Capítulo 5

Juegos extensivos

5.1. Introducción

En este capítulo presentamos los juegos en su representación extensiva. A diferencia de los juegos estratégicos, esta representación no asume que los jugadores eligen su plan de acción una sola vez. Un juego extensivo es una descripción explícita de la estructura secuencial de los problemas de decisión que enfrentan los jugadores en un entorno estratégico. Por este motivo, la representación extensiva es especialmente útil cuando el juego es dinámico, ya que los jugadores toman decisiones en distintos periodos de tiempo.

Definición 5.1.1. Un juego extensivo tiene *información perfecta* si, en cada punto de decisión, los jugadores conocen con exactitud todo lo que ha ocurrido previamente en el juego.¹

Para poder definir formalmente un juego extensivo con información perfecta, debemos definir algunos conceptos fundamentales.

Definición 5.1.2. Definimos el conjunto de posibles historias H como el conjunto de todas las posibles secuencias de acciones tomadas. H puede entenderse como un árbol. La historia inicial es $\emptyset \in H$ y se dice que una historia h es terminal si

¹No hay incertidumbre exógena: la naturaleza no juega. Nótese que un juego con información incompleta puede interpretarse como un juego con información imperfecta en el que la naturaleza elige inicialmente los tipos.

- ▶ $h = (a^1, \dots, a^K)$ y no hay a^{K+1} tal que $(a^1, \dots, a^K, a^{K+1}) \in H$, (es decir es una rama completa),
- ▶ o bien h es infinita.

El conjunto de historia infinitas se denota Z y se asume que los individuos tienen preferencias sobre Z .

Definición 5.1.3. Definimos la función jugador $P(h)$ como aquella que asigna a un jugador cada historia no terminal: quién juega después de cada historia $h \in H$.

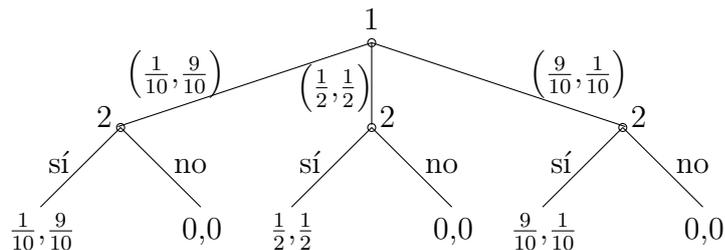
Observación 5.1.4. La raíz del árbol es \emptyset y luego:

- ▶ El jugador $P(\emptyset)$ decide una acción $a^1 \in A(\emptyset)$,
- ▶ cada acción posible a^1 es una historia,
- ▶ después de la historia $a^1 \in A(\emptyset)$, el jugador $P(a^1)$ decide una acción $a^2 \in A(a^1)$,
- ▶ (a^1, a^2) es una historia, y así sucesivamente.

Ejemplo 5.1.5. El juego del ultimátum. Considere la siguiente situación: Dos personas deben dividir un pastel y hay tres formas de hacerlo:

1. $(1/10, 9/10)$: la segunda persona toma casi todo,
2. $(1/2, 1/2)$: cada persona toma la mitad,
3. $(9/10, 1/10)$: la primera persona toma casi todo.

En este juego, la primera persona propone una división, y la segunda persona, o bien acepta la división y en dicho caso proceden a dividir el pastel, o bien el jugador dos rechaza la propuesta y ambos reciben cero (el pastel se destruye).



En este caso,

► **Jugadores:** $N = \{1, 2\}$

► **Historias:**

$$H = \{ \emptyset, (1/10, 9/10), (1/2, 1/2), (9/10, 1/10), ((1/10, 9/10), \text{sí}), ((1/10, 9/10), \text{no}), ((1/2, 1/2), \text{sí}), ((1/2, 1/2), \text{no}), ((9/10, 1/10), \text{sí}), ((9/10, 1/10), \text{no}) \}$$

► **Función jugador:**

$$P(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = \emptyset \\ 2 & \text{si } h \in \{(1/10, 9/10), (1/2, 1/2), (9/10, 1/10)\} \end{cases}$$

► **Pagos:** Los pagos dependen del nodo alcanzado y de la decisión de jugador 2.

En forma de funciones:

$$u_1(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } s = ((1/2, 1/2), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((1/2, 1/2), \text{no}) \\ \frac{1}{10} & \text{si } s = ((1/10, 9/10), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((1/10, 9/10), \text{no}) \\ \frac{9}{10} & \text{si } s = ((9/10, 1/10), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((9/10, 1/10), \text{no}) \end{cases}$$

$$u_2(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } s = ((1/2, 1/2), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((1/2, 1/2), \text{no}) \\ \frac{9}{10} & \text{si } s = ((1/10, 9/10), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((1/10, 9/10), \text{no}) \\ \frac{1}{10} & \text{si } s = ((9/10, 1/10), \text{sí}) \\ 0 & \text{si } s = ((9/10, 1/10), \text{no}) \end{cases}$$

Definición 5.1.6. Un **juego extensivo con información perfecta** consiste en:

- ▶ Un conjunto con N jugadores,
- ▶ un conjunto H de secuencias (historias) con las siguientes propiedades:
 - $\emptyset \in H$ (historia inicial),
 - si $(a^k)_{k=1, \dots, K} \in H$ y $L < K$, entonces $(a^k)_{k=1, \dots, L} \in H$,
 - si $(a^k)_{k=1, \dots, \infty}$ es una secuencia infinita tal que $(a^k)_{k=1, \dots, K} \in H$ para todo K , entonces $(a^k)_{k=1, \dots, \infty} \in H$.
- ▶ un conjunto $Z \subset H$ tal que $h \in Z$ si h es una secuencia infinita o bien si $(a^k)_{k=1, \dots, K}$ es una secuencia finita tal que $(a^k)_{k=1, \dots, K, K+1} \notin H$,
- ▶ una función jugador $P : H \setminus Z \rightarrow N$ que asigna a cada historia no terminal un jugador,
- ▶ una función de pagos $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

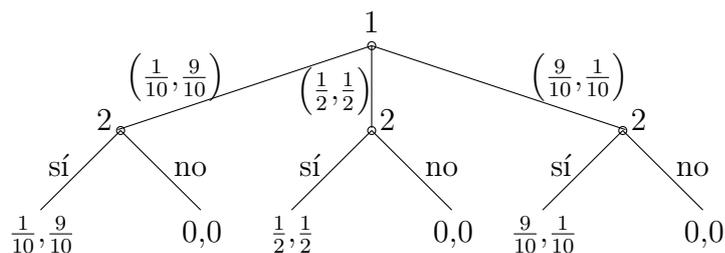
Definición 5.1.7. Una **estrategia** del jugador $i \in N$ en el juego $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ es una función s_i que asigna una acción $A(h)$ a cada historia no terminal $h \in H \setminus Z$ tal que $P(h) = i$:

$$s_i : \Omega_{iH} = \{H \setminus Z : P(h) = i\} \rightarrow A(h).$$

Observación 5.1.8. La estrategia es un plan de acción completo que incluye cómo actuar bajo cualquier circunstancia posible que el jugador pueda encontrar, incluso aquellas que están excluidas por la propia estrategia del jugador.

Observación 5.1.9. Dado un perfil de estrategias $s = (s_i)$, el resultado del perfil es la historia terminal $O(s)$ inducida por el perfil.

Ejemplo 5.1.10. En:



las estrategias del jugador 1 son:

$$\{(1/10, 9/10), (1/2, 1/2), (9/10, 1/10)\}$$

O sea, 3 estrategias, mientras que el jugador 2 tiene $2^3 = 8$ estrategias:

$$s_2 = (s_2(1/10, 9/10), s_2(1/2, 1/2), s_2(9/10, 1/10)) \in (\text{sí, no})^3.$$

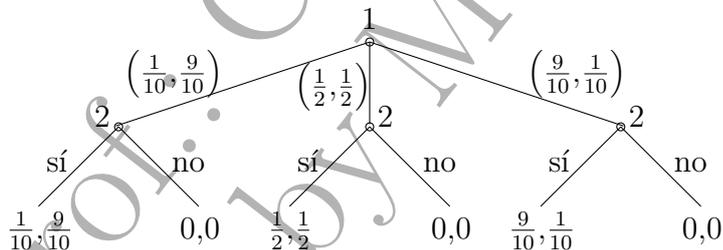
Por ejemplo, una estrategia es (sí, sí, sí).

Definición 5.1.11. Un equilibrio de Nash de un juego extensivo $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ es un perfil de estrategias s^* tal que cada jugador $i \in N$:

$$u_i(O(s_i^*, s_{-i}^*)) \geq u_i(O(s_i, s_{-i}^*)), \forall s_i \in S_i.$$

El sendero de equilibrio es el resultado $O(s^*)$ inducido por estrategias de equilibrio.

Ejemplo 5.1.12. En:



son equilibrios de Nash:

- ▶ $s_1 = (1/10, 9/10), s_2 = (\text{sí, no, no})$
- ▶ $s_1 = (1/2, 1/2), s_2 \in \{(\text{sí, sí, no}), (\text{no, sí, no})\}$
- ▶ $s_1 = (9/10, 1/10), s_2 \in \{(\text{sí, sí, sí}), (\text{no, sí, sí}), (\text{no, no, sí}), (\text{sí, no, sí})\}$

En forma estratégica:

		Jugador 1		
		(0.1, 0.9)	(0.5, 0.5)	(0.9, 0.1)
Jugador 2	NNN	0, 0	0, 0	0, 0
	SNN	0.1, 0.9	0, 0	0, 0
	SSN	0.1, 0.9	0.5, 0.5	0, 0
	NSN	0, 0	0.5, 0.5	0, 0
	NNS	0, 0	0, 0	0.9, 0.1
	SNS	0.1, 0.9	0, 0	0.9, 0.1
	NSS	0, 0	0.5, 0.5	0.9, 0.1
	SSS	0.1, 0.9	0.5, 0.5	0.9, 0.1

Cuadro 5.1 Matriz estratégica: Jugador 1 elige columnas, Jugador 2 elige filas.

- ▶ La mayoría de los equilibrios de Nash del juego no son *creíbles*, ya que presuponen que los jugadores llevarán a cabo amenazas que no resultan racionales una vez que llegue el momento de ejecutarlas.
- ▶ Solo el perfil $(s_1, s_2) = ((9/10, 1/10), (\text{sí}, \text{sí}, \text{sí}))$ constituye un equilibrio de Nash *creíble*, en el sentido de que las acciones en cada nodo son óptimas dadas las creencias y elecciones del otro jugador.
- ▶ Otros equilibrios, como $(s_1, s_2) = ((1/10, 9/10), (\text{sí}, \text{no}, \text{no}))$, dependen de amenazas poco creíbles. Por ejemplo: “acepta mi oferta o no recibirás nada”. Esta amenaza es inverosímil porque el jugador 2 preferiría aceptar una oferta que le otorga algún pago antes que obtener cero.
- ▶ El problema es que el concepto de equilibrio de Nash, basado en la forma estratégica, no considera la racionalidad secuencial: los jugadores no pueden ajustar sus decisiones después de observar lo que ha ocurrido.
- ▶ Surge entonces la necesidad de *refinar* el concepto de equilibrio de Nash para descartar aquellos sostenidos por amenazas no creíbles.

- Una solución natural en juegos extensivos con información perfecta es el *equilibrio perfecto en subjuegos*, que exige que las estrategias constituyan un equilibrio de Nash en cada posible subconjunto del juego.

Definición 5.1.13. Para eliminar amenazas no creíbles en juegos extensivos, es fundamental considerar no solo el equilibrio global del juego, sino también el comportamiento racional en cada etapa intermedia. Para ello, introducimos el concepto de *subjuego*. Sea $\langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$ un juego extensivo con información perfecta. Un *subjuego* que sigue a una historia no terminal $h \in H$ es el juego extensivo:

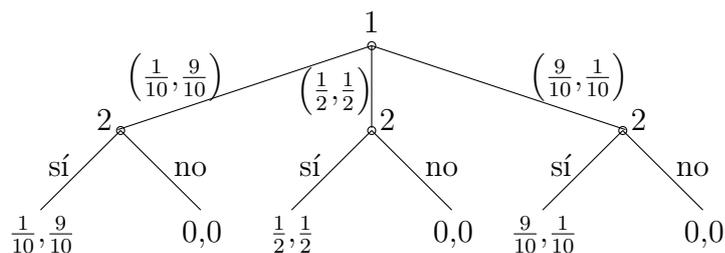
$$\langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h)_{i \in N} \rangle,$$

donde:

- $H|_h = \{h' \in H : (h, h') \in H\}$ es el conjunto de secuencias que continúan la historia h ;
- $P|_h(h') = P(h, h')$ asigna el jugador que mueve en la historia (h, h') ;
- $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ denota la función de pagos en el subjuego, heredada del juego original.

Los juegos extensivos con información perfecta presentan una *estructura recursiva*: tras cada decisión, se inicia un nuevo juego cuya estructura es idéntica a la del juego original pero restringida a las continuaciones posibles desde ese punto. Es decir, cada historia no terminal define un subjuego que debe ser considerado como una unidad estratégica en sí misma. Este enfoque permitirá definir más adelante el concepto de *equilibrio perfecto en subjuegos*, que exige que las estrategias formen un equilibrio de Nash no solo en el juego completo, sino también en cada uno de sus subjuegos.

Ejemplo 5.1.14. En el juego



hay 3 subjuegos, que son las continuaciones de las historias \emptyset , $(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{9}{10}, \frac{1}{10})$

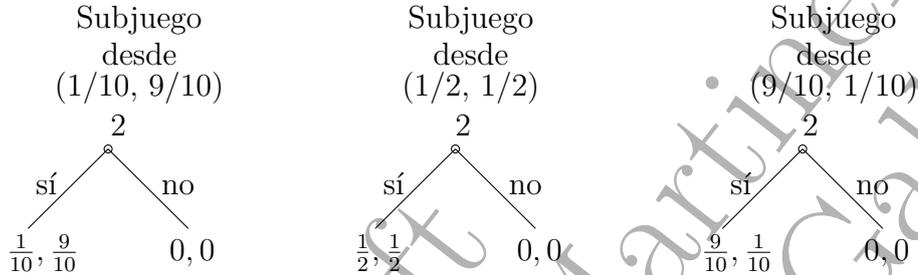


Figura 5.1 Subjuegos desde $(1/10, 9/10)$, $(1/2, 1/2)$ y $(9/10, 1/10)$.

5.2. Equilibrio perfecto en subjuegos

Definición 5.2.1. Equilibrio perfecto en subjuegos. Sea $\langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$ un juego extensivo con información perfecta.

- Dado un perfil de estrategias $s = (s_i)_{i \in N}$, definimos la *estrategia inducida* por s_i en una historia no terminal $h \in H \setminus Z$ como la restricción $s_i|_h$ sobre el subjuego que sigue a h , donde:

$$s_i|_h(h') := s_i(h, h') \quad \text{para todo } h' \in H|_h.$$

- Un perfil de estrategias $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ es un **equilibrio perfecto en subjuegos** si para toda historia no terminal $h \in H \setminus Z$, el perfil inducido $s^*|_h$ constituye un equilibrio de Nash del subjuego que comienza en h . Esto s^* tal que, para todo jugador $i \in N$ y toda historia no terminal $h \in H \setminus Z$ para la cual $P(h) = i$, se cumple que:

$$O_h(s_{-i}^*|_h, s_i^*|_h) \succeq_i |_h O_h(s_{-i}^*|_h, s_i)$$

para toda estrategia s_i del jugador i en el subjuego $\Gamma(h)$.

- Como el juego completo es en sí mismo un subjuego que sigue a la historia vacía

\emptyset , todo equilibrio perfecto en subjuegos es también un equilibrio de Nash:

$$\{\text{equilibrios perfectos en subjuegos}\} \subset \{\text{equilibrios de Nash}\}.$$

- Por tanto, el equilibrio perfecto en subjuegos actúa como un refinamiento del concepto de equilibrio de Nash, eliminando aquellos perfiles sostenidos por amenazas no creíbles.

Observación 5.2.2. En los juegos extensivos, los jugadores toman decisiones a lo largo del tiempo, y no todas las decisiones se toman al inicio. En este contexto, el equilibrio de Nash tradicional puede fallar porque:

- Solo exige que nadie quiera desviarse al principio del juego.
- No garantiza que las amenazas sean racionales si realmente llegamos a ciertos puntos del juego.

Ejemplo 5.2.3. En el juego del ultimátum:

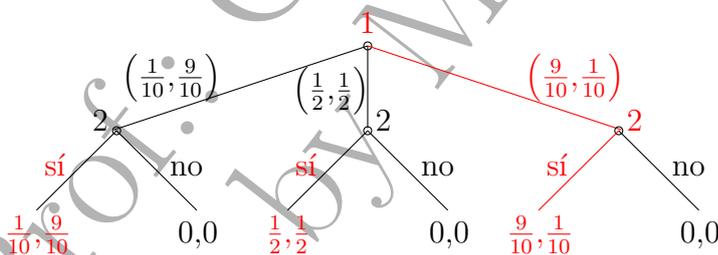


Figura 5.2 Senda de equilibrio perfecto en subjuegos: $s_1 = (9/10, 1/10)$ y $s_2 = (\text{sí}, \text{sí}, \text{sí})$.

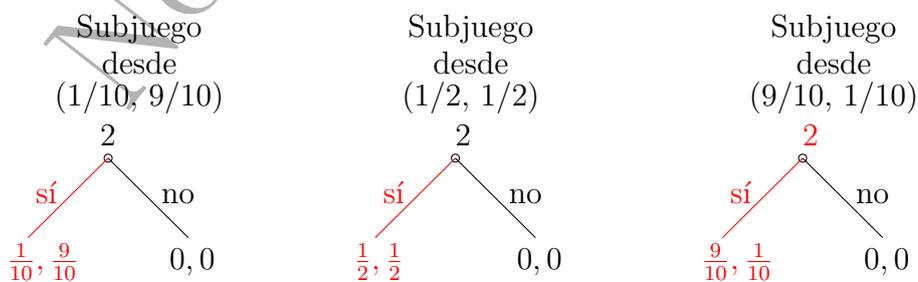


Figura 5.3 Subjuegos con decisiones racionales: jugador 2 elige “sí” en todos.

Lema 5.2.4. Principio de una sola desviación. Sea $\langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$ un juego extensivo con horizonte finito. Un perfil de estrategias s^* es un equilibrio perfecto en subjuegos si y solo si, para todo jugador $i \in N$ y toda historia no terminal $h \in H$ tal que $P(h) = i$, se cumple que:

$$u_i(O_h(s_i^*|h, s_{-i}^*|h)) \geq u_i(O_h(s_i, s_{-i}^*|h))$$

para toda estrategia s_i en el subjuego que sigue a h que difiere de $s_i^*|h$ únicamente en la acción especificada en h (la primera decisión del jugador i en ese subjuego).

Demostración. Supongamos primero que s^* es un equilibrio perfecto en subjuegos del juego extensivo finito $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$. Entonces, por definición, para todo jugador i y toda historia no terminal $h \in H \setminus Z$ tal que $P(h) = i$, se cumple que

$$u_i(O_h(s_i^*|h, s_{-i}^*|h)) \geq u_i(O_h(s_i, s_{-i}^*|h))$$

para toda estrategia s_i en el subjuego $\Gamma(h)$, incluyendo aquellas que difieren de $s_i^*|h$ únicamente en la acción inicial en h . Por tanto, la condición del lema se cumple. Ahora supongamos que s^* no es un equilibrio perfecto en subjuegos. Entonces, existe un jugador $i \in N$ y una historia no terminal $h' \in H \setminus Z$ con $P(h') = i$ tal que existe una estrategia s_i en el subjuego $\Gamma(h')$ que constituye una desviación rentable:

$$u_i(O_{h'}(s_i, s_{-i}^*|h')) > u_i(O_{h'}(s_i^*|h', s_{-i}^*|h')).$$

Entre todas esas desviaciones rentables para i en $\Gamma(h')$, elijamos una estrategia s_i que minimice el número de historias h en las que $s_i(h) \neq s_i^*|h(h)$. Dado que el juego tiene horizonte finito, este número es finito y tal estrategia existe. Sea h^* la historia más larga (más profunda) en $\Gamma(h')$ tal que $s_i(h^*) \neq s_i^*|h'(h^*)$. Sea $\Gamma(h^*)$ el subjuego que comienza en h^* . Como s_i y $s_i^*|h'$ coinciden después de h^* , entonces $s_i|_{h^*}$ difiere de $s_i^*|_{h^*}$ únicamente en la acción prescrita en h^* . Además, $s_i|_{h^*}$ también es una desviación rentable en el subjuego $\Gamma(h^*)$; de lo contrario, se podría construir una desviación rentable en $\Gamma(h')$ que difiera en menos historias que s_i , contradiciendo la minimalidad de nuestra elección. Por tanto, hemos encontrado una desviación rentable en un subjuego $\Gamma(h^*)$ que difiere de s^* únicamente en la primera acción prescrita en h^* . Esto contradice la condición del lema. Concluimos que s^* es un equilibrio perfecto en subjuegos si y solo si no existe ninguna desviación rentable que difiera de $s_i^*|h$ únicamente en la primera acción de algún subjuego $\Gamma(h)$. \square

Observación 5.2.5. La idea central de esta parte de la demostración es seleccionar, entre todas las desviaciones rentables que podría hacer un jugador en un determinado subjuego, aquella que difiera de su estrategia original en la menor cantidad de puntos posibles del árbol (es decir, en el menor número de historias). Como el juego tiene horizonte finito, este número es necesariamente finito y se puede minimizar. Al hacer esto, garantizamos que existe una última historia h^* (la más profunda) en la que la estrategia desviada difiere de la original. Como, por construcción, ambas estrategias coinciden en todas las historias posteriores a h^* , la desviación en el subjuego que comienza en h^* afecta únicamente la primera acción prescrita en ese nodo. Si dicha desviación sigue siendo rentable, entonces se ha encontrado una desviación que cambia sólo una decisión: justamente lo que el lema prohíbe si s^* fuera un equilibrio perfecto en subjuegos. Este argumento muestra que, si alguna desviación rentable existe, entonces necesariamente existe una desviación rentable que difiere del equilibrio sólo en una acción. Por lo tanto, para verificar que un perfil es un equilibrio perfecto en subjuegos, basta con comprobar que no existen desviaciones rentables que cambien únicamente una decisión en cada nodo. Por ejemplo, si queremos ver que $LLLL$ es un EPS, entonces basta compararlo con $LRLL$, $RLLL$, $LLLR$ y $LLRL$, más no con $RLRL$ o $RRRR$.

Teorema 5.2.6. Kuhn. Todo juego extensivo con un horizonte finito tiene un equilibrio perfecto en subjuegos.

Demostración. Inducción hacia atrás y el principio de una desviación: □

Proposición 5.2.7. Todo juego extensivo finito con información perfecta admite un equilibrio perfecto en subjuegos.

Demostración. Considere una función R que asocia a cada historia $h \in H$ una historia terminal $R(h) \in Z$ tal que $R(h)$ es el resultado que se obtiene si los jugadores siguen un equilibrio perfecto en subjuegos a partir de h .

Paso base: si la longitud del subjuego $\Gamma(h)$ es cero, es decir, si h ya es una historia terminal ($h \in Z$), definimos $R(h) = h$. No hay decisiones que tomar en este caso.

Paso inductivo: supongamos que $R(h)$ está definido para toda historia h tal que la longitud del subjuego $\ell(\Gamma(h)) \leq k$, para algún $k \geq 0$. Ahora, consideremos una historia

h^* tal que $\ell(\Gamma(h^*)) = k+1$, es decir, el subjuego $\Gamma(h^*)$ tiene una decisión adicional antes de llegar a los terminales. Sea $i = P(h^*)$ el jugador que toma la decisión en el nodo h^* . El conjunto de acciones disponibles es $A(h^*)$. Para cada acción $a \in A(h^*)$, la historia h^*a (la extensión de h^* con a) tiene longitud a lo sumo k , por lo que, por hipótesis de inducción, $R(h^*a)$ ya está definido. Entonces, definimos la acción $s_i(h^*) \in A(h^*)$ como aquella que maximiza la preferencia de jugador i entre los resultados posibles:

$$s_i(h^*) \in \arg \max_{a \in A(h^*)} R(h^*a) \quad \text{según } \succeq_i.$$

Es decir, el jugador i escoge en h^* la acción que lo lleva al resultado terminal más preferido entre todas las opciones disponibles, suponiendo que luego todos siguen las recomendaciones del perfil de equilibrio. Luego, definimos:

$$R(h^*) = R(h^*s_i(h^*)),$$

es decir, el resultado asociado a h^* es el resultado del camino que se sigue si en h^* el jugador i elige su mejor respuesta y a partir de allí se siguen las estrategias ya definidas inductivamente.

Aplicando esta construcción recursiva desde las hojas hasta la raíz del árbol del juego, definimos completamente una función R y un perfil de estrategias s .

Por el lema de desviación única, esta construcción garantiza que el perfil s así definido es un equilibrio perfecto en subjuegos, ya que en cada nodo se elige la mejor acción considerando que se seguirá racionalmente en lo sucesivo. \square

Teorema 5.2.8. Zermelo. El ajedrez tiene un equilibrio perfecto en subjuegos.

Observación 5.2.9. Claude Shannon estimó 10^{20} partidas. El ajedrez está determinado: hay una solución óptima en términos de resultado, aunque no sepamos cuál es (todavía), matemáticamente existe.

Ejemplo 5.2.10. La paradoja de la cadena de almacenes. Consideremos una cadena de almacenes que tiene instalaciones en las ciudades $1, \dots, K$. En cada ciudad k , hay un posible entrante, identificado como el jugador k . Al inicio de cada periodo $k \in \{1, \dots, K\}$, el jugador k decide si desea ingresar al mercado o permanecer fuera. Tras esta decisión, la cadena de almacenes responde eligiendo si desea luchar contra el

entrante o cooperar con él. Esta respuesta se observa antes de que el siguiente jugador $k + 1$ tome su decisión de entrada. En cuanto a las preferencias, la cadena de almacenes prefiere que un posible entrante se mantenga fuera del mercado antes que cooperar con él, y prefiere cooperar antes que entrar en conflicto. Por su parte, cada posible entrante prefiere cooperar con la cadena antes que mantenerse fuera, y prefiere mantenerse fuera antes que enfrentar una lucha directa.

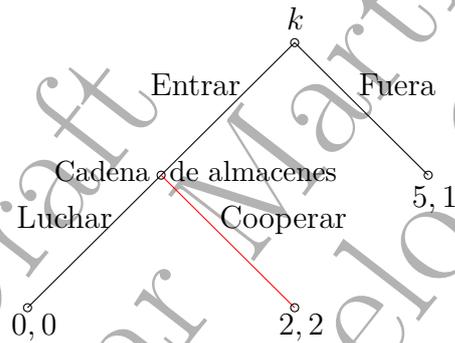


Figura 5.4 Subjuego representativo en la ciudad k

Cuadro 5.2 Forma normal del juego en la ciudad k

		Cadena de almacenes	
		Luchar	Cooperar
Jugador k	Entrar	0, 0	2, 2
	Fuera	5, 1	5, 1

Ahora bien, respecto al² equilibrio perfecto en subjuegos:

²La unicidad ocurre cuando no hay empates en preferencias.

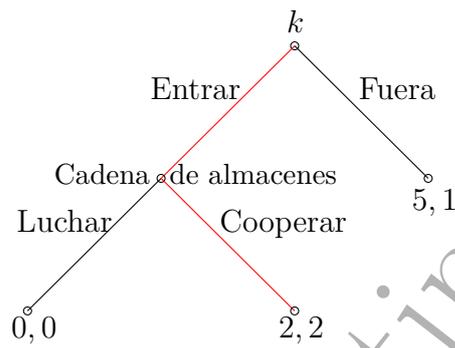


Figura 5.5 Subjuego representativo en la ciudad k con sendero de equilibrio resaltado

En un equilibrio perfecto en subjuegos (SPE), cada posible competidor decide entrar al mercado porque anticipa que la cadena de almacenes cooperará, independientemente de lo que haya sucedido en el pasado. Esta lógica corresponde a un *comportamiento prospectivo*, consistente con el razonamiento por *inducción hacia atrás*, donde cada jugador mira hacia adelante y razona desde el futuro hacia el presente. Sin embargo, uno podría cuestionar esta conclusión preguntando: ¿qué debería hacer un posible entrante si observa que, en el pasado, la cadena de almacenes ha luchado contra otros entrantes? ¿No sería razonable adoptar un *comportamiento retrospectivo*, es decir, aprender del pasado y anticipar que la cadena también podría luchar en el futuro? Este razonamiento corresponde a una *inducción hacia adelante*, en la que los jugadores forman creencias a partir de la conducta observada. Para capturar formalmente esta idea de aprendizaje histórico y ajuste de expectativas, es necesario introducir la noción de [reputación](#). Modelar la reputación dentro de un juego requiere extender la estructura del juego extensivo para incluir *información imperfecta*, donde los jugadores ya no observan directamente todas las acciones pasadas, sino actualizan creencias sobre el tipo o comportamiento de los demás a lo largo del tiempo.

Observación 5.2.11. El conjunto de historias del juego de la cadena de almacenes con múltiples ciudades se define como

$$H = \left(\bigcup_{k=0}^K Q^k \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{K-1} Q^k \times \{\text{Entrar}\} \right),$$

donde $Q = \{\text{Fuera}, (\text{Entrar}, C), (\text{Entrar}, L)\}$ representa los posibles resultados en cada

ciudad. La primera parte del conjunto, $\bigcup_{k=0}^K Q^k$, corresponde a las historias completas: secuencias de k decisiones pasadas, donde cada decisión incluye tanto la acción del competidor (entrar o no) como la respuesta de la cadena (cooperar o luchar si hubo entrada). Por ejemplo, un elemento de Q^2 podría ser (Fuera, (Entrar, C)), que representa una historia en la cual el primer jugador eligió no entrar y el segundo sí entró, y fue tratado cooperativamente por la cadena. La segunda parte del conjunto, $\bigcup_{k=0}^{K-1} Q^k \times \{\text{Entrar}\}$, representa las historias incompletas: aquellas en las que ya han ocurrido k etapas completas, y en la etapa $k + 1$ el jugador eligió Entrar, pero aún se espera la respuesta de la cadena. Por ejemplo, el elemento (Fuera, Entrar) $\in Q^1 \times \{\text{Entrar}\}$ describe una historia en la que el primer jugador eligió Fuera, y el segundo acaba de decidir entrar, aunque la cadena aún no ha respondido. Esta unión garantiza que el conjunto H contiene todos los nodos del árbol del juego: tanto aquellos en los que debe actuar un nuevo competidor (después de historias completas), como aquellos en los que debe actuar la cadena (después de una decisión de entrada).

Por otro lado, la función jugador $P(h)$ asigna a cada historia el jugador que debe tomar una decisión en ese punto del juego. Formalmente, se define como:

$$P(h) = \begin{cases} k + 1 & \text{si } h \in Q^k \\ \text{CS} & \text{si } h \in Q^k \times \{\text{Dentro}\} \end{cases}$$

Esto quiere decir que si la historia actual h contiene k decisiones completas previas (es decir, pertenece a Q^k), entonces le corresponde jugar al siguiente competidor, el jugador $k + 1$. En cambio, si la historia termina con una decisión de entrada Entrar del jugador $k + 1$, pero aún no se ha observado la respuesta de la cadena de almacenes, entonces el turno es de la cadena (CS). Así, la función P refleja con precisión la estructura secuencial del juego: primero decide el competidor, y si entra, luego responde la cadena.

La función jugador $P(h)$ indica quién debe tomar una decisión en cada historia h del juego. Si $h \in Q^k$, es decir, si la historia contiene k decisiones completas (cada competidor ya decidió si entrar o no, y la cadena ya respondió en cada caso), entonces le corresponde jugar al siguiente competidor, el jugador $k + 1$. Por ejemplo, si $h = (\text{Fuera}, (\text{Dentro}, C)) \in Q^2$, entonces es el turno del jugador 3. En cambio, si $h \in Q^k \times \{\text{Dentro}\}$, significa que el jugador $k + 1$ decidió entrar, pero la cadena aún no ha respondido; por tanto, en ese caso $P(h) = \text{CS}$ y le corresponde jugar a la cadena

de almacenes.

Ejemplo 5.2.12. El juego del ciempiés. Debido a [Rosenthal \(1981\)](#):

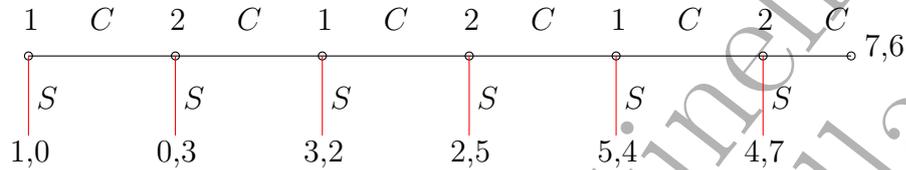


Figura 5.6 Juego del ciempiés (centipede game) con sendero de equilibrio resaltado

Desde una perspectiva teórica, el juego del ciempiés admite una única solución en equilibrio perfecto en subjuegos (SPE), en la que ambos jugadores eligen detenerse (S) en su primer turno. Formalmente, las historias del juego están dadas por secuencias $C(t) = (C, \dots, C)$ de longitud t para $0 \leq t \leq T$, y secuencias $S(t) = (C, \dots, C, S)$ con $t - 1$ repeticiones de C seguidas por una única salida S , para $1 \leq t \leq T$. La función jugador está definida como $P(C(t)) = 1$ si t es par y $t \leq T - 2$, y $P(C(t)) = 2$ si t es impar. En este contexto, cada jugador prefiere salir lo más tarde posible, siempre que sea él quien lo haga, y el jugador activo en t prefiere $S(t + 3) \succ S(t + 1) \succ S(t + 2)$ para $t \leq T - 3$.

En este modelo, el equilibrio SPE predice que cada jugador elige salir en cuanto le corresponde actuar, con lo cual el juego termina inmediatamente. Lo notable es que este resultado coincide con el de cualquier equilibrio de Nash del juego. De hecho, si asumimos que algún jugador sale en un periodo $t \geq 2$, entonces su oponente habría tenido un incentivo para salir en $t - 1$, obteniendo un mejor resultado. Por tanto, toda estrategia en equilibrio debe implicar que el jugador 1 salga en el primer periodo y que el jugador 2 esté dispuesto a salir en el segundo. Sin embargo, esto contradice la experiencia experimental.

Este contraste entre teoría y observación refleja una tensión central del concepto de equilibrio perfecto en subjuegos: se asume que los jugadores mantienen creencias según las cuales el otro se detendrá en la siguiente oportunidad, incluso si ha continuado varias veces antes. Esta hipótesis de racionalidad estricta no resulta intuitiva cuando se han observado múltiples actos de cooperación. En contextos reales, ambos jugadores podrían actualizar sus creencias sobre la disposición del otro a seguir, sobre todo

después de largas secuencias cooperativas. Así, como en el juego de la cadena de almacenes, el equilibrio SPE impone una rigidez en las expectativas que no siempre se ajusta a la conducta humana.

Observación 5.2.13. En el juego del cien pies, los equilibrios de Nash en estrategias puras son las combinaciones $\{(S, *, *), (S, *, *)\}$.

5.3. Duopolio de Stackelberg

Consideremos un mercado con dos empresas que producen un bien homogéneo. La demanda inversa está dada por

$$p(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } Q \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } Q \geq \alpha, \end{cases}$$

donde $Q = q_1 + q_2$. Cada empresa enfrenta costos lineales $C_i(q_i) = cq_i$, con $0 < c < \alpha$. La empresa 1 es el *líder* (mueve primero) y la empresa 2 es el *seguidor*. Dada esta formulación, tenemos que:

- ▶ $H = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}_+\} \cup \{\mathbb{R}_+^2\}$, siendo $Z = \mathbb{R}_+^2$.
- ▶ $P(\emptyset) = 1$
- ▶ $P(q_1) = 2$.

Luego, el juego se resuelve por inducción hacia atrás. Dado q_1 , la empresa 2 elige q_2 para maximizar su beneficio:

$$\max_{q_2 \geq 0} u_2(q_1, q_2) = q_2(\alpha - q_1 - q_2) - cq_2.$$

La condición de primer orden provee (vamos a asumir unicidad)

$$\alpha - q_1 - 2q_2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1),$$

siempre que $q_1 \leq \alpha - c$. Así, la mejor respuesta³ del seguidor es:

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1) & \text{si } q_1 \leq \alpha - c, \\ 0 & \text{si } q_1 > \alpha - c. \end{cases}$$

³Las estrategias de 2 son funciones $b_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, mientras que para 1, es escoger el $q_1 \in \mathbb{R}_+$.

El líder anticipa esto y elige q_1 para maximizar su beneficio:

$$u_1(q_1) = q_1 \cdot (\alpha - q_1 - b_2(q_1)) - cq_1 = \frac{1}{2}q_1(\alpha - c - q_1).$$

La solución de primer orden da:

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c), \quad q_2^* = b_2(q_1^*) = \frac{1}{4}(\alpha - c).$$

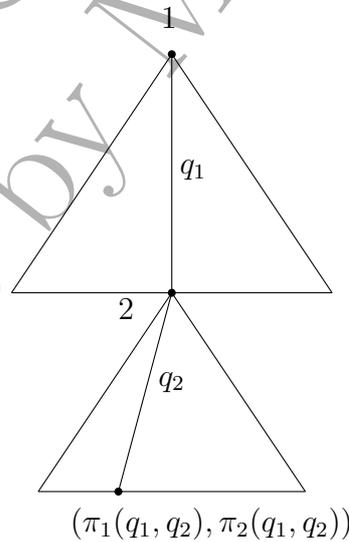
Las ganancias en el equilibrio son:

$$\pi_1^* = \frac{1}{8}(\alpha - c)^2, \quad \pi_2^* = \frac{1}{16}(\alpha - c)^2.$$

En contraste, en el equilibrio de Nash de Cournot, donde $b_1(q_2) = q_1$ y $b_2(q_1) = q_2$, (decisiones simultáneas), ambas empresas eligen $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}(\alpha - c)$, y obtienen:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}(\alpha - c)^2.$$

En conclusión, en Stackelberg, el líder se beneficia al moverse primero (mayor producción y ganancia), el seguidor queda peor, y los consumidores se benefician con un menor precio $Q_S > Q_C$. Esto es intuitivo pues el líder podría escoger la cantidad en Cournot, y como no lo hace, debe ser porque mejora.



5.4. Movimientos simultáneos

Definición 5.4.1. Un juego extensivo on información perfecta con movimientos simultáneos se especifica mediante los siguientes elementos:

- ▶ Un conjunto N de **jugadores**.
- ▶ Un conjunto H de secuencias o **historias**, con las siguientes propiedades:
 - $\emptyset \in H$ (la **historia inicial**).
 - Si $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ y $L < K$, entonces $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$.
 - Si $(a^k)_{k=1,\dots}$ es una secuencia infinita tal que $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ para todo K , entonces $(a^k)_{k=1,\dots} \in H$.
- ▶ Un subconjunto $Z \subset H$ de **historias terminales**, tal que $h \in Z$ si:
 - h es una secuencia infinita, o
 - $h = (a^k)_{k=1,\dots,K}$ es una secuencia finita y no existe $K + 1$ tal que $(a^k)_{k=1,\dots,K+1} \in H$.
- ▶ Una **correspondencia jugador** $P : H \setminus Z \rightrightarrows N$ que asigna a cada historia no terminal un **conjunto no vacío de jugadores**, tal que existe una colección de conjuntos $\{A_i(h)\}_{i \in P(h)}$ donde:

$$A(h) = \{a : (h, a) \in H\} = \bigotimes_{i \in P(h)} A_i(h) \quad .$$

El conjunto de historias que sigue están creadas por ese producto.
- ▶ Una **función de pagos** $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ para cada jugador $i \in N$.

Observación 5.4.2. En este contexto:

- ▶ Una **historia** es una secuencia finita (o infinita) de vectores (la dimensión depende de $|P(h)|$) de acciones:

$$h = (a^1, a^2, \dots, a^{k-1}),$$

donde cada a^ℓ es un vector cuyas componentes corresponden a las acciones elegidas por los jugadores que tomaron decisiones en la etapa ℓ . En particular, el vector a^k es elegido por los jugadores en $P(h)$, es decir, quienes juegan justo después de la historia $h = (a^1, \dots, a^{k-1})$.

- ▶ En cada etapa k , los jugadores que deben actuar lo hacen simultáneamente, eligiendo acciones que se agrupan en un vector $a^k = (a_i^k)_{i \in P(h)}$.

- ▶ Para cada historia no terminal h , el conjunto de acciones disponibles para un jugador $i \in P(h)$ es denotado por $A_i(h)$.
- ▶ Desde una historia h , los jugadores en $P(h)$ eligen simultáneamente una acción en sus respectivos conjuntos $A_i(h)$. Se asume que todos observan completamente la historia h antes de actuar (información perfecta).
- ▶ El conjunto total de acciones posibles desde h es:

$$A(h) = \{a : (h, a) \in H\} = \bigotimes_{i \in P(h)} A_i(h),$$

lo cual representa todas las combinaciones conjuntas de acciones factibles por los jugadores activos en ese punto.

- ▶ Una **estrategia** para el jugador i es una función que asigna una acción $a_i(h) \in A_i(h)$ a cada historia no terminal h en la que $i \in P(h)$. Esto representa un plan completo de contingencia que le indica al jugador qué hacer en cada nodo donde le corresponde tomar una decisión.
- ▶ Esta estructura permite modelar juegos con múltiples decisiones simultáneas y en distintas etapas del tiempo. A menudo se los llama **juegos multi-etapa**, donde todas las historias de la misma longitud pertenecen a una misma *etapa temporal*. En la etapa k , los jugadores observan la historia acumulada $h = (a^1, \dots, a^{k-1})$ y deciden en consecuencia.

El resultado o historia inducida por un perfil de estrategias s se denota $O(s)$. Luego, un equilibrio de Nash es, como antes, un perfil de estrategias s^* tal que para todo $i \in N$ y posible estrategias s_i de i : $u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(s_i, s_{-i}^*))$. Aquí, $O(s^*)$ es el sendero de equilibrio asociado al equilibrio de Nash s^* .

Definición 5.4.3. Un equilibrio perfecto en subjuegos es un perfil de estrategias s^* tal que para todo $i \in N$ y para cada historia no terminal $h \in H \setminus Z$ tal que $i \in P(h)$, $s^*|_h$ es un equilibrio de Nash en el subjuego que le sigue a h .

5.5. Acciones aleatorias en juegos extensivos

Definición 5.5.1. Una estrategia mixta de un jugador $i \in N$ en un juego extensivo

$$\langle N, H, P, (u_i) \rangle$$

es una distribución de probabilidades sobre el conjunto de estrategias puras.

Definición 5.5.2. Una estrategia de comportamiento de un jugador i es una colección $(\beta_i(h))_{h:i \in P(h)}$ de distribuciones de probabilidad independientes, donde $\beta_i(h)$ es una distribución de probabilidades sobre $A_i(h)$.

Observación 5.5.3. Una **estrategia de comportamiento** para el jugador $i \in N$ es una colección

$$(\beta_i(h))_{h:i \in P(h)},$$

donde cada $\beta_i(h)$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones disponibles $A_i(h)$ en la historia h . Es decir, en lugar de seleccionar una estrategia completa al inicio del juego, el jugador toma decisiones aleatorias *localmente*, en cada historia donde debe actuar. Las decisiones son independientes entre sí: el jugador lanza un dado diferente en cada historia h , de acuerdo a la distribución $\beta_i(h)$. Esta estructura permite una representación más flexible de la aleatoriedad.

Interpretación:

- ▶ En una estrategia *mixta*, el jugador elige aleatoriamente una estrategia pura al comienzo del juego y luego la sigue sin cambiarla. Por ejemplo, en Stackelberg, una estrategia mixta para 1 es una distribución de probabilidades sobre \mathbb{R}_+ , mientras que para 2 es una distribución sobre el espacio de funciones $\{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+\}$.
- ▶ En una estrategia *de comportamiento*, el jugador elige aleatoriamente una acción en cada uno de los nodos donde le corresponde jugar, incluso si ya ha tomado decisiones anteriormente.

Observación 5.5.4. Dado un perfil de estrategias mixtas (o de comportamiento) σ , un resultado $O(\sigma)$ es la lotería sobre historias terminales inducida por el perfil σ .

Definición 5.5.5. Una estrategia mixta es **equivalente en resultados** a una estrategia de comportamiento si para cada perfil de estrategias puras de los otros jugadores, ambas inducen el mismo resultado (loterías sobre historias terminales).

Ejemplo 5.5.6. Considere la siguiente situación: El jugador 1 elige U o D , luego el jugador 2 elige A o B si $h = U$ y C o D si $h = D$.

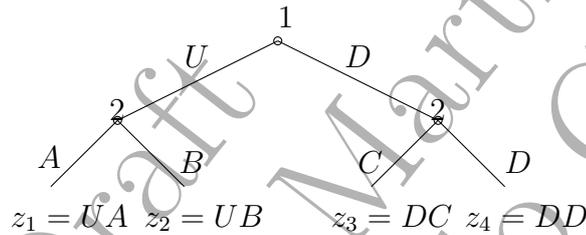


Figura 5.7 Juego extensivo: el jugador 1 elige U o D , luego el jugador 2 responde según la historia.

Entonces hay cuatro hojas o historias terminales:

$$z_1 = UA, \quad z_2 = UB, \quad z_3 = DC, \quad z_4 = DD.$$

Una **estrategia pura** del jugador 2 consiste en seleccionar una acción en cada subárbol donde debe jugar. Por ejemplo, una estrategia pura podría ser:

“Elegir A si U , y C si D ”.

Ahora consideremos dos **estrategias mixtas** del jugador 2:

- La estrategia

$$\sigma_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

consiste en elegir aleatoriamente una de las cuatro estrategias puras posibles (una para cada combinación de decisiones en U y D) con igual probabilidad.

- La estrategia

$$\sigma'_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$$

consiste en elegir con probabilidad $1/2$ la estrategia pura “ A si U , C si D ” y con probabilidad $1/2$ la estrategia “ B si U , D si D ”.

Estas dos estrategias mixtas inducen la misma **estrategia de comportamiento**, porque generan la misma probabilidad sobre las acciones en cada nodo:

- En el nodo $h \triangleq U$, el jugador 2 elige A con probabilidad $1/2$.
- En el nodo $h \triangleq D$, el jugador 2 elige C con probabilidad $1/2$.

Definición 5.5.7. Un **equilibrio de Nash en estrategias mixtas** en un juego extensivo es un perfil de estrategias mixtas σ^* tal que para todos los jugadores i y para cada estrategia σ_i posible para i :

$$u_i(O(\sigma^*)) \geq u_i(O(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)).$$

Definición 5.5.8. Un **equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento** es un perfil de estrategias de comportamiento $\beta^* = (\beta_i^*)_{i \in N}$ tal que para todo jugador $i \in N$, y para toda estrategia de comportamiento alternativa β_i , se cumple:

$$u_i(O(\beta^*)) \geq u_i(O(\beta_i, \beta_{-i}^*)).$$

Observación 5.5.9. En aplicaciones prácticas, es común referirse a “estrategias mixtas” incluso cuando en realidad se utilizan *estrategias de comportamiento*. Esto ocurre porque, en juegos extensivos con información perfecta y horizonte finito, ambas son equivalentes en términos de los resultados que inducen (según el teorema de Kuhn). Dado que las estrategias de comportamiento definen decisiones aleatorias *localmente* en cada nodo, su estructura recursiva permite definir naturalmente un **equilibrio perfecto en subjuegos**. Sin embargo, cuando se introduce aleatoriedad en el árbol, es importante especificar si:

- ▶ La *distribución de probabilidad* utilizada por un jugador forma parte de la historia, o
- ▶ Solamente se observa la *acción realizada*, sin conocimiento de si fue elegida de forma determinista o aleatoria.

Esta distinción es crucial, ya que afecta cómo se definen los subjuegos. Si el azar forma parte de la historia, cada realización lleva a un subjuego diferente. Si no, múltiples realizaciones pueden confluir en un mismo nodo informacional. Por ello, en juegos

extensivos con aleatoriedad, se debe dejar claro cómo se modela la evolución del juego y qué información es observable.

Ejemplo 5.5.10. Supongamos un juego de un solo jugador. En el nodo inicial, el jugador lanza una moneda para decidir entre dos acciones: A o B .

- ▶ Si sale *cara*, elige la acción A .
- ▶ Si sale *cruz*, elige la acción B .

Ahora comparemos dos formas de modelar el juego:

El azar es parte de la historia. En este caso, la historia incluye no solo la acción elegida, sino también la realización del azar. Las historias posibles son:

$$\emptyset \rightarrow \text{moneda} = \text{cara} \rightarrow A, \quad \emptyset \rightarrow \text{moneda} = \text{cruz} \rightarrow B.$$

Cada camino incluye información explícita sobre la realización aleatoria. Si un segundo jugador observa esta historia, puede condicionar su decisión a si salió *cara* o *cruz*, incluso si la acción observada es la misma.

Solo se observa la acción (el azar no está en la historia). En este caso, la historia simplemente registra la acción tomada, sin revelar si fue elegida de forma determinista o aleatoria. Las historias posibles son:

$$\emptyset \rightarrow A, \quad \emptyset \rightarrow B.$$

El jugador observa solamente A o B , sin saber si proviene de una decisión estratégica o de un sorteo. Esto implica que solo hay dos historias terminales distintas y, por tanto, menos subjuegos.

Observación 5.5.11. En un juego extensivo, una **estrategia** va más allá del concepto informal de “plan de acción” que se ejecuta según lo que efectivamente ocurra en el juego. En cambio, debe especificar **acciones en todos los nodos donde el jugador podría llegar a tomar decisiones**, incluso si esas historias no ocurren bajo su propio plan. **Ejemplo:**

- ▶ $P(\emptyset) = 1, A_1(\emptyset) = \{A, B\}$.

- ▶ Si el jugador 1 elige A , entonces $P(A) = 2$, $A_2(A) = \{C, D\}$.
- ▶ Si el jugador 2 elige C , entonces $P(AC) = 1$ y $A_1(AC) = \{E, F\}$.
- ▶ Pagos:

$$u(B) = (2, 1), \quad u(AD) = (0, 1), \quad u(ACE) = (0, 0), \quad u(ACF) = (1, 2).$$

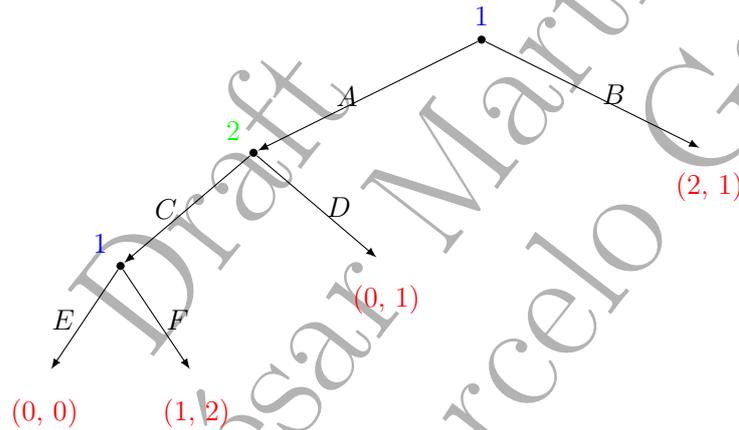


Figura 5.8 Árbol del juego extensivo con decisiones de los jugadores y pagos terminales.

Incluso si el jugador 1 planea jugar B desde el inicio, su estrategia debe especificar qué haría si, contra lo previsto, llega al nodo AC . Este nodo no está en el *sendero de equilibrio* si B es su elección, pero es necesario completar la estrategia para que el juego esté bien definido y se puedan aplicar conceptos como el equilibrio perfecto en subjuegos. Por ende, lo que importa no es solo lo que hace el jugador 1, sino lo que *cree* el jugador 2 que haría el jugador 1 en escenarios contrafactuales. Estas creencias afectan la racionalidad de las respuestas incluso fuera del camino previsto. Esto plantea una cuestión fundamental: *¿por qué las creencias de los jugadores sobre acciones fuera del sendero de equilibrio deberían ser correctas?* Este es precisamente uno de los motivos que da lugar a refinamientos del equilibrio de Nash, como el equilibrio perfecto en subjuegos, que exige consistencia racional incluso en nodos que no se alcanzan con probabilidad positiva.

Observación 5.5.12. Juegos extensivos con incertidumbre exógena. En muchas situaciones estratégicas, los jugadores enfrentan incertidumbre que no proviene de las decisiones de otros jugadores, sino de factores externos. Para modelar esta

incertidumbre exógena, se introduce en el juego la posibilidad de que ciertos nodos estén controlados por la naturaleza (también llamada “chance”). Un **juego extensivo con información perfecta y movimientos de la naturaleza** se define como una tupla $\langle N, H, P, f_c, (\succeq_i) \rangle$, donde:

- ▶ N es el conjunto finito de jugadores.
- ▶ H es el conjunto de historias, como en el modelo estándar.
- ▶ $P : H \setminus Z \rightarrow N \cup \{c\}$ es la función jugador, que asigna a cada historia no terminal quién decide a continuación. Si $P(h) = c$, entonces quien elige es la naturaleza.
- ▶ Para cada historia h tal que $P(h) = c$, se asigna una medida de probabilidad $f_c(\cdot | h)$ sobre el conjunto de acciones disponibles $A(h)$. Es decir, $f_c(a | h)$ representa la probabilidad de que la naturaleza elija la acción a luego de la historia h . Estas probabilidades se asumen independientes entre distintos nodos de la naturaleza.
- ▶ Para cada jugador $i \in N$, la preferencia \succeq_i se define sobre loterías (distribuciones de probabilidad) sobre las historias terminales.

La noción de estrategia para cada jugador sigue siendo la misma: una estrategia especifica qué acción tomar en cada historia no terminal donde el jugador está llamado a actuar. El resultado de un perfil de estrategias es ahora una lotería sobre historias terminales, inducida tanto por las decisiones estratégicas como por los movimientos aleatorios de la naturaleza. Finalmente, el equilibrio perfecto en subjuegos se define tal como en el modelo sin incertidumbre exógena: cada estrategia debe ser óptima no solo globalmente, sino también en cada subjuego (incluso después de las jugadas de la naturaleza).

Observación 5.5.13. Creencias en juegos extensivos. En un juego extensivo, los jugadores toman decisiones en distintos puntos del árbol de juego, (en las historias no terminales). En estos puntos, un jugador debe preguntarse:

“¿Cómo llegué hasta aquí? ¿Qué decisiones tomaron los demás?”

Esto lleva a la noción de creencia condicional, que refleja la interpretación que un jugador tiene sobre el camino recorrido hasta ese punto.

Definición 5.5.14. Una **creencia** del jugador i , denotada μ_i , es una función que asigna a cada historia no terminal $h \in H \setminus Z$ tal que $i \in P(h)$, una distribución de probabilidad sobre los eventos pasados o sobre las estrategias de los otros jugadores, consistente con lo que el jugador cree que ha ocurrido hasta llegar a h . Informalmente, $\mu_i(h)$ representa la *creencia condicional* del jugador i en el nodo h : qué acciones tomaron los demás para que el juego haya llegado hasta allí.

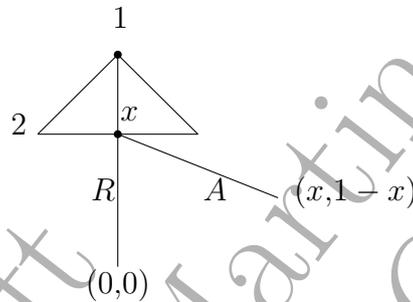
Con base en estas creencias, el jugador elige su mejor acción.

- ▶ En un **equilibrio de Nash**, las creencias suelen ser implícitas: cada jugador actúa de forma óptima dado el perfil completo.
- ▶ En un **equilibrio perfecto en subjuegos**, las creencias se asumen correctas en *todos los nodos*, incluso los que no se alcanzan en equilibrio.
- ▶ En un **equilibrio auto-confirmado**, las creencias solo deben ser correctas en *los nodos que efectivamente ocurren*; fuera de ellos, pueden ser incorrectas (supersticiones racionales). En el juego del cienpies, puede observarse $\{(SSS), (CCC)\}$ en el laboratorio pues, el jugador 1 nunca le da la oportunidad al jugador 2 de mostrar que es cooperativo.

Ejemplo 5.5.15. Juego del ultimátum y aprendizaje. Consideremos el juego del ultimátum donde el jugador 1 debe proponer una fracción $x \in [0, 1]$ de una suma total para quedarse, y el jugador 2 puede aceptar (A) o rechazar (R). Si acepta, los pagos son $(x, 1 - x)$; si rechaza, ambos jugadores reciben cero.

El equilibrio perfecto en subjuegos (SPE) predice que el jugador 1 ofrece $x = 1$ y el jugador 2 acepta. Esto se debe a que, ante una oferta de $x = 1$, el jugador 2 es indiferente entre aceptar (recibe 0) y rechazar (también recibe 0), por lo que aceptar es igualmente una mejor respuesta. A su vez, la mejor respuesta de 1 ante que 2 acepte cualquier oferta $x < 1$, sería ofrecer la $x \rightarrow 1$. Sin embargo, justo en $x = 1$ hay una discontinuidad en el juego si el jugador 2 decidiera rechazar $x = 1$. Por ende, el jugador

1 no tendría una mejor respuesta, pues cualquier $x + \varepsilon < 1$ con $1 - x > \varepsilon$ le daría un mejor pago que x pero al llegar a 1, la utilidad cae.

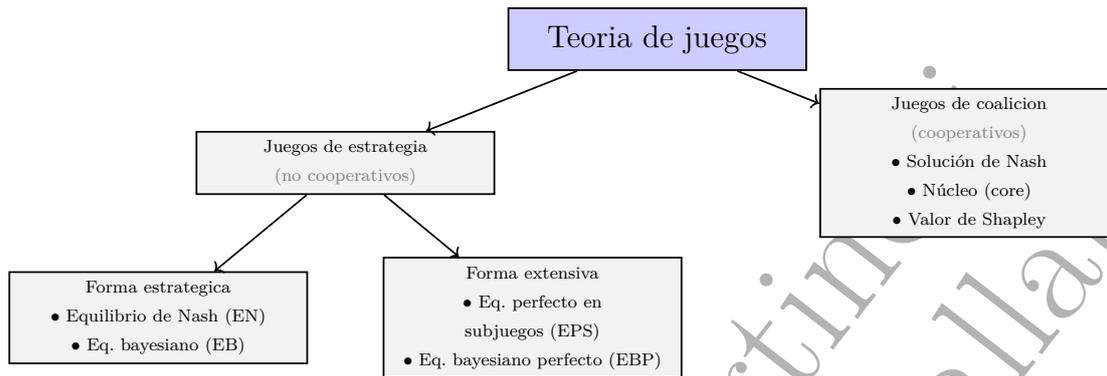


Sin embargo, los experimentos en laboratorio muestran que el jugador 1 suele ofrecer cerca de 0.5, y que ofertas muy bajas suelen ser rechazadas. Esto contradice la predicción del SPE y sugiere que los jugadores actúan influenciados por factores psicológicos o sociales. [Fudenberg and Levine \(1997\)](#) demuestran que esta desviación se debe principalmente a que los jugadores tienen *creencias equivocadas* sobre las probabilidades de que el otro rechace por rencor. Es decir, el jugador 1 teme que el jugador 2 se comporte de manera vengativa, incluso si eso le causa una pérdida, y por tanto ofrece más de lo estrictamente necesario. Por ende, el temor al rencor puede tener un mayor peso en la formación de estrategias que el rencor mismo. Más aún, en [Henrich \(2000\)](#), se encuentra que los Machiguenga del Amazonas peruano se comportan de forma significativamente distinta a los sujetos de sociedades industrializadas en el juego del ultimátum: hacen ofertas más bajas y rara vez rechazan ofertas.

Capítulo 6

Negociación

El análisis de la negociación se sitúa en la intersección entre los juegos de estrategia y los juegos coalicionales. Por un lado, los modelos estratégicos destacan el papel de las decisiones individuales, donde cada jugador selecciona un plan de acción anticipando las posibles respuestas de los demás. En este contexto, conceptos como el equilibrio de Nash, el equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) y el equilibrio bayesiano (EB), permiten incorporar elementos como la revisión de estrategias y la información privada. Por otro lado, el enfoque coalicional o cooperativo introduce la posibilidad de que los jugadores formen alianzas, enfocándose en cómo deben distribuirse los beneficios de la cooperación para garantizar tanto la estabilidad interna de las coaliciones (a través de principios como la eficiencia, equidad y poder de negociación) como su estabilidad externa (frente a desviaciones individuales o de subgrupos). En este capítulo, abordamos modelos de negociación que integran elementos de ambas perspectivas, resaltando cómo los resultados dependen críticamente de las reglas del juego, la información disponible y el poder de las partes para comprometerse o desvincularse de acuerdos.



La negociación ha sido desde hace mucho tiempo un tema central en las ciencias sociales, debido a su presencia transversal en múltiples contextos donde intervienen conflictos de interés, toma de decisiones conjunta y acuerdos entre partes. Las aplicaciones son diversas: desde el regateo en mercados sin precios fijos, hasta negociaciones internacionales sobre comercio, migración o disputas territoriales. Incluso dentro de un hogar, surgen procesos de negociación implícitos sobre quién asume ciertas tareas o responsabilidades. No obstante, en sus orígenes, la teoría económica evitaba tratar directamente estos procesos. En lugar de analizar cómo se llegaba a un acuerdo, se limitaba a estudiar las condiciones de equilibrio una vez que la negociación se había resuelto. Un ejemplo temprano de interés por formalizar estos procesos se debe a Edgeworth, quien propuso ver el equilibrio competitivo como el resultado límite de una serie de procesos de negociación entre agentes.

El análisis formal y sistemático de la negociación comienza con John Nash, quien en su influyente artículo publicado en *Econometrica* en 1950, propone un enfoque axiomático del problema (Nash, 1950). En este enfoque, típicamente asociado a la teoría de juegos cooperativos, Nash busca caracterizar una solución para problemas de negociación mediante un conjunto de principios normativos o axiomas. La llamada solución de negociación de Nash se construye a partir de tres postulados fundamentales: eficiencia (la solución debe pertenecer a la frontera de Pareto), simetría (los jugadores idénticos deben recibir resultados idénticos) y la independencia de alternativas irrelevantes (la solución no debe depender de opciones no elegidas si estas no afectan la elección racional). Un axioma adicional que se considera, aunque no es explícitamente mencionado en (Nash, 1950), es que las preferencias son de tipo vNM.

Una observación importante es que esta solución axiomática de Nash no está

directamente relacionada con el concepto de equilibrio de Nash que desarrolló en el mismo año, salvo por el hecho de haber sido propuestos por el mismo autor. Reconociendo esta brecha, Nash planteó una pregunta crucial: ¿existe un juego no cooperativo cuya solución en equilibrio coincida con la solución de negociación que él propuso en su marco cooperativo? Esta inquietud, conocida como el programa de Nash, motiva el desarrollo posterior del enfoque estratégico de la negociación. Décadas después, este programa fue formalmente resuelto por Ariel Rubinstein, quien modeló la negociación como un juego dinámico de ofertas alternadas, mostrando que, bajo ciertas condiciones, su solución coincide con la solución de negociación de Nash.

6.1. La solución de Nash

Consideremos la siguiente situación:

- ▶ Dos jugadores con preferencias sobre loterías a las von Neumann-Morgenstern.
- ▶ Un conjunto de posibles *acuerdos* $A = \{a', a'', a''', \dots\}$.
- ▶ Cada acuerdo genera pagos a los jugadores $(u_1(a), u_2(a)) \in \mathbb{R}^2$, $a \in A$.
- ▶ Los jugadores pueden ponerse de acuerdo en loterías: el conjunto de posibles pagos que es un conjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^2 .
- ▶ Uno de los puntos de dicho conjunto es $(u_1(d), u_2(d))$ que corresponde a los pagos del desacuerdo: $d \in A$.
- ▶ Dado que trabajamos con preferencias sobre loterías a la vNM, podemos renormalizar:

$$(u'_1(a), u'_2(a)) = (u_1(a) - u_1(d), u_2(a) - u_2(d))$$

de forma que el desacuerdo es el punto $(0, 0)$. Ver figura 6.1.

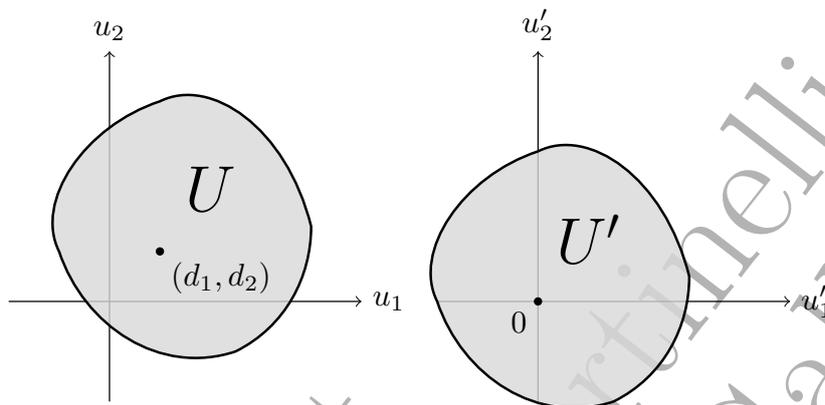


Figura 6.1 Normalización.

Definición 6.1.1. Concepto de solución. Dado el conjunto de problemas de negociación

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R}^2 : U \text{ es compacto y convexo con } 0 \in U\}$$

definimos el concepto de solución como la asignación

$$F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $F(U) \in U$, $F(U)$ se interpreta como una predicción o recomendación.

Ejemplo 6.1.2. Solución igualitarista o Rawlsiana.

$$R(U) = \operatorname{argm\acute{a}x}_{u \in U} \min\{u_1, u_2\}.$$

Es única dado que U es compacto y convexo.

Ejemplo 6.1.3. Solución utilitarista o de Bentham.

$$B(U) = \operatorname{argm\acute{a}x}_{u \in U} (u_1 + u_2).$$

La unicidad no está garantizada. Para ello se requiere selección. Por ejemplo, selección igualitarista $R(B(U))$.

Ejemplo 6.1.4. Solución de Nash.

$$N(U) = \operatorname{argm\acute{a}x}_{u \in U} u_1 u_2.$$

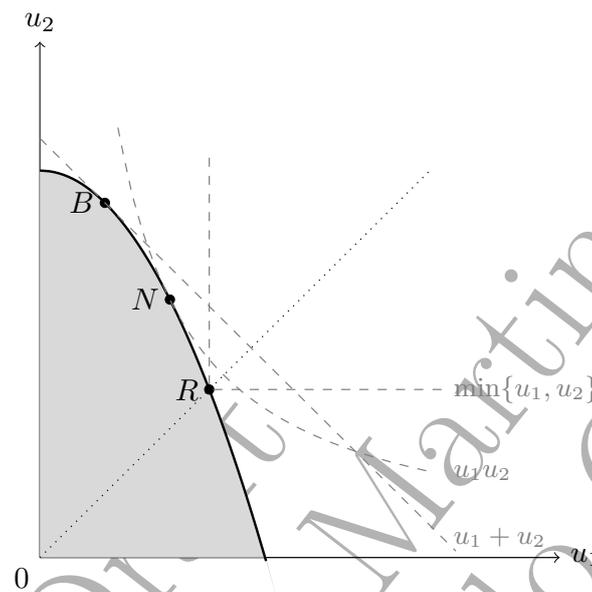


Figura 6.2 Conceptos de solución: Nash, Bentham y Rawls.

La pregunta que naturalmente surge es: ¿cuál solución deberíamos considerar como la mejor predicción del acuerdo entre las partes? Para responderla, se han propuesto criterios normativos que toda solución razonable debería cumplir. Estos criterios pueden formalizarse mediante axiomas que una correspondencia de solución F debe satisfacer. En su artículo clásico, [Nash \(1950\)](#) identificó cuatro axiomas fundamentales. El

- ▶ **Eficiencia:** el acuerdo alcanzado no sea dominado por otro disponible para ambas partes, capturando así la idea de **óptimo de Pareto**.
- ▶ **Simetría:** establece que si los agentes se encuentran en una situación simétrica, entonces deben recibir un tratamiento equivalente, lo cual refleja el principio de **anonimidad**.
- ▶ **Independencia de alternativas irrelevantes:** si desaparecen opciones que no iban a ser elegidas, la solución no debería cambiar siempre que el punto de desacuerdo se mantenga.
- ▶ **Independencia de escala:** solo importan las preferencias ordinales sobre loterías, de modo que las transformaciones afines de las funciones de utilidad no deben alterar la solución. Con estos cuatro axiomas, Nash logró caracterizar de manera única su famosa solución de negociación.

Definición 6.1.5. Eficiencia. Si existe $u \in U$ tal que $u > u'$, entonces $F(U) \neq u'$.

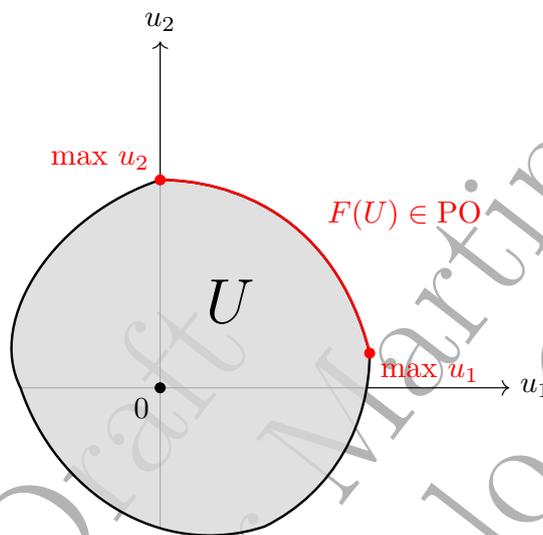


Figura 6.3 Eficiencia.

Definición 6.1.6. Simetría. Si $(v, u) \in U$ para todo $(u, v) \in U$, entonces $F(U) = (u, u)$ para algún $(u, u) \in U$.

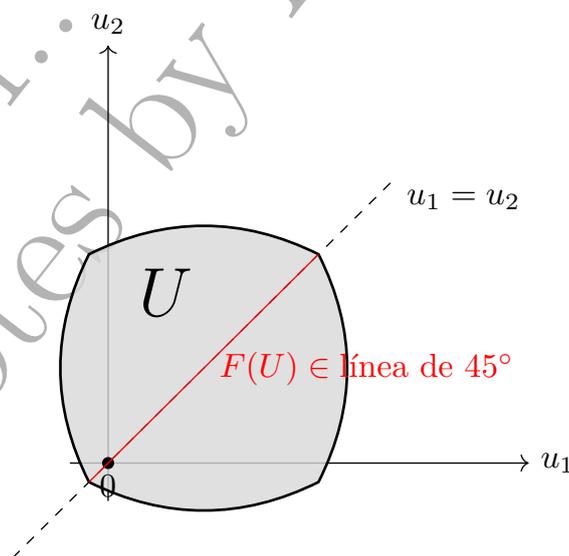


Figura 6.4 Simetría.

Definición 6.1.7. Independencia de alternativas irrelevantes. $F(U) \in U' \subset U \implies F(U') = F(U)$.

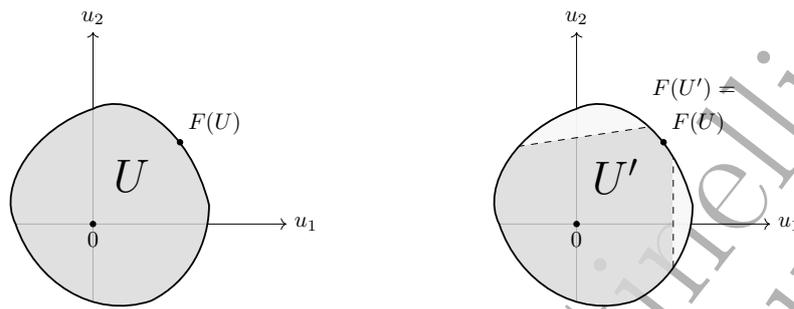


Figura 6.5 Independencia de alternativas irrelevantes.

Definición 6.1.8. Independencia de escala. Si $(u_1, u_2) \in U \iff (\alpha u_1, \beta u_2) \in U'$ para $\alpha, \beta > 0$, entonces $F(U) = (u_1^*, u_2^*) \iff F(U') = (\alpha u_1^*, \beta u_2^*)$.

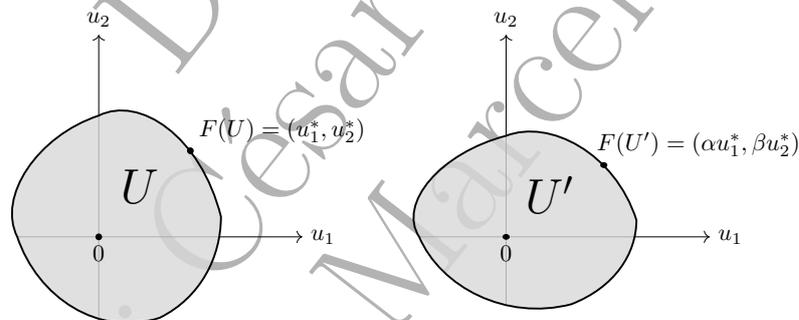


Figura 6.6 Independencia de escala.

Teorema 6.1.9. Teorema de negociación de Nash. Existe una única asignación (que resulta ser una función)

$$F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } F(U) \in U$$

que satisface los axiomas de eficiencia, simetría, independencia de alternativas irrelevantes e independencia de escala, y es la solución de negociación de Nash.

Demostración. Es sencillo notar que la solución de Nash cumple los cuatro axiomas. Además, también es fácil ver que Bentham y Rawls no cumplen los axiomas (independencia de escala). Ahora bien, el trabajo consiste en demostrar que para cualquier conjunto la solución es solo la de Nash. Para ello, consideremos un conjunto factible de utilidades $U \subseteq \mathbb{R}_+^2$ con punto de desacuerdo en 0, y supongamos que la

solución de Nash es $N(U) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$. Aplicando el axioma de independencia de escala, transformamos el conjunto U en un nuevo conjunto U' mediante la transformación coordenada:

$$(u_1, u_2) \in U \iff \left(\frac{u_1}{\hat{u}_1}, \frac{u_2}{\hat{u}_2} \right) \in U'.$$

Por construcción, el punto correspondiente a $N(U)$ en U' es $(1,1)$, y como la solución de Nash maximiza el producto $u_1 \cdot u_2$, la frontera de U' debe tener una pendiente tangente de -1 en ese punto.

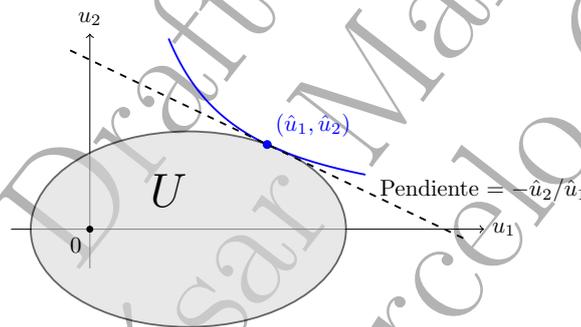


Figura 6.7 Pendiente = -1 .

A continuación, construimos un conjunto U'' que es un cuadrado simétrico alrededor de U' , conteniendo a U' y compartiendo el punto $(1,1)$ como frontera. Por simetría y eficiencia, se tiene que $F(U'') = (1,1)$. Luego, por independencia de alternativas irrelevantes, como U' y U'' comparten el mismo punto solución y el resto de alternativas en $U'' \setminus U'$ no son elegidas, se sigue que $F(U') = (1, 1)$.

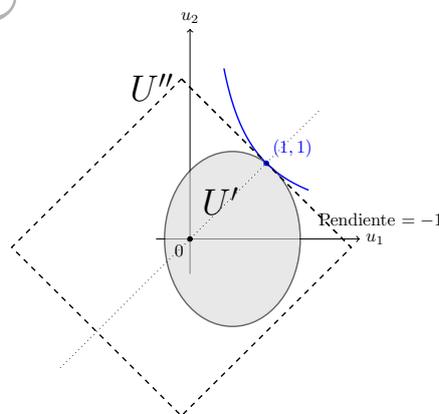


Figura 6.8 Transformación $U' \rightarrow U'' = \square$.

Finalmente, revirtiendo el escalamiento inicial y usando nuevamente el axioma de independencia de escala, se concluye que $F(U) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) = N(U)$. Así, toda función F que satisfaga los cuatro axiomas coincide necesariamente con la solución de Nash en cualquier conjunto U , lo que demuestra la unicidad. \square

Ejemplo 6.1.10. Basado en Nash (1950). José y Lucía pueden intercambiar los siguientes bienes:

Bienes	Utilidad para José	Utilidad para Lucía
<i>Bienes de José</i>		
libro	2	4
soga	2	2
pelota	2	1
bate	2	2
caja	4	1
<i>Bienes de Lucía</i>		
lapicero	10	1
juguete	4	1
cuchillo	6	2
gorro	2	2

Cuadro 6.1 Utilidades de los bienes para José y Lucía.

Así, las posibilidades de utilidades netas para ambos son (utilidades netas significa que se descuenta la utilidad que ya poseen inicialmente, 12 José y 6 Lucía):

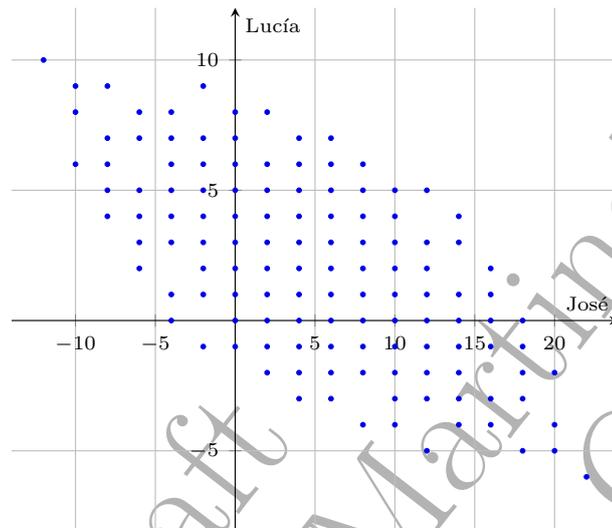


Figura 6.9 Posibilidades de utilidad neta.

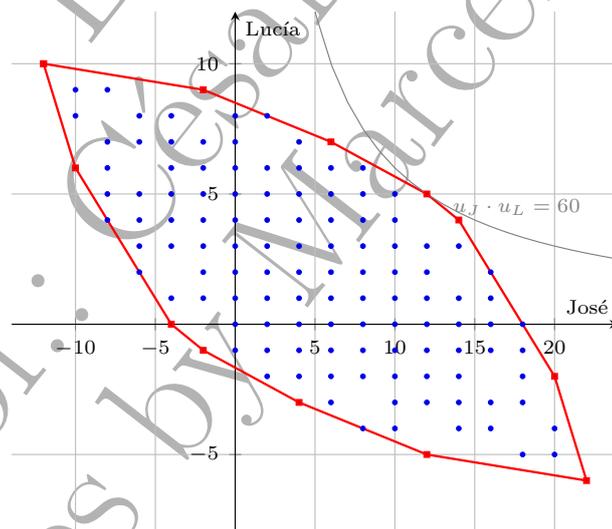


Figura 6.10 Envoltura convexa y soluciónn de Nash.

Recordemos que la *envoltura convexa* de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $\text{conv}(X)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en X , es decir:

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

En este contexto, $\text{conv}(X)$ representa todas las combinaciones factibles de utilidades que José y Lucía pueden alcanzar mediante intercambios o promedios entre combinaciones discretas, y permite identificar la frontera eficiente de Pareto sobre la cual se ubican las soluciones de negociación.

Usando el concepto de solución de Nash, se resuelve el problema de intercambio eficiente entre José y Lucía maximizando el producto de sus ganancias respecto al punto de desacuerdo. En este caso, la solución consiste en encontrar el punto dentro de la envolvente convexa de combinaciones posibles que maximiza el producto $\text{Ganancia José} \times \text{Ganancia Lucía}$. Como resultado, se alcanza un valor óptimo de $12 \times 5 = 60$, correspondiente al intercambio en el cual José entrega a Lucía el libro, la sogá, la pelota y el bate, y Lucía entrega a José el lapicero, el juguete y el cuchillo. Esta asignación constituye el acuerdo mutuamente beneficioso según la solución de negociación de Nash.

¿Y si consideramos la solución de Bentham?

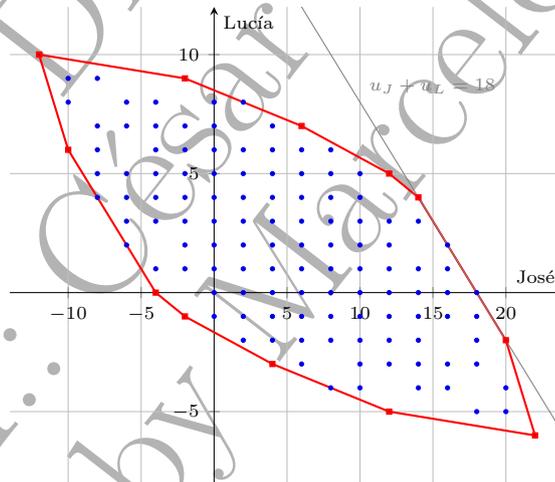


Figura 6.11 Envolvente convexa y solución de Bentham.

La solución utilitarista de Bentham consiste en maximizar la suma total de las ganancias de utilidad de ambas personas como resultado del intercambio. En este caso, el objetivo es maximizar $u_J + u_L$. Se evalúa cada bien y se asigna a quien le otorga mayor utilidad. Por ejemplo, el libro proporciona una utilidad de $4 > 2$ a Lucía, por lo que debe transferirse desde José hacia ella. De igual forma, el lapicero, el juguete y el cuchillo tienen mayor valor para José que para Lucía, por lo que deben transferirse en la otra dirección. Hay bienes con igual utilidad para ambos (soga, bate, gorro), los cuales pueden asignarse arbitrariamente sin afectar el total agregado, y por ello hay varias soluciones. Con estas decisiones, la ganancia total alcanza su valor máximo posible, $12 + 6 = 18$, siendo esta la asignación utilitarista eficiente según Bentham.

Introducir dinero en el modelo permite convertir las ganancias de los agentes en una unidad común y transferible, haciendo que las utilidades sean comparables y que sea posible redistribuir el valor generado por el intercambio. Al incorporar dinero, el conjunto factible deja de ser discreto y pasa a ser convexo, ya que cualquier distribución del excedente total es alcanzable mediante transferencias monetarias. Por ejemplo, si la ganancia total por intercambiar bienes es 18, entonces cualquier combinación (u_1, u_2) tal que $u_1 + u_2 = 18$ con $u_1, u_2 \geq 0$ es factible:

$$U = \{(u_1, u_2) : u_1 + u_2 \leq 18, u_1, u_2 \geq 0\}.$$

Esto permite separar la eficiencia (maximizar el total de ganancias) de la equidad (cómo repartirlas), lo que da sentido a soluciones como la de Nash, que propone una distribución igualitaria del excedente, por ejemplo $(9, 9)$, sin sacrificar eficiencia.

Observación 6.1.11. Roth (1977) demuestra que el axioma de eficiencia de Nash puede reemplazarse por el axioma más débil de racionalidad individual (IR), que simplemente exige $F(U) > (0, 0)$. Con simetría, dependencia de alternativas irrelevantes e independencia de escala, Roth prueba que esta combinación caracteriza de manera equivalente la *solución de Nash*.

Por otro lado, la solución de negociación de Nash no satisface el axioma de *monotonicidad*, que exige que si se amplía el conjunto factible sin reducir el máximo que puede alcanzar el otro jugador, ningún participante debería resultar perjudicado.

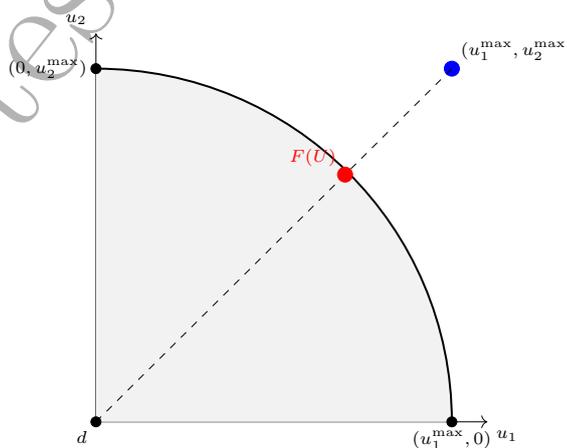


Figura 6.12 Solución de Kalai-Smorodinsky.

Reemplazando la dependencia irrelevante de alternativas por esta *monotonidad*, se obtiene la *solución de Kalai–Smorodinsky* (Kalai and Smorodinsky, 1975) que consiste en escoger el punto máximo en U en la línea conectando al origen al punto en el que cada jugador obtiene su máximo (ver figura 6.12).

La solución de negociación de Nash proporciona una caracterización elegante basada en axiomas normativos, como eficiencia, simetría e independencia de alternativas irrelevantes. Sin embargo, esta formulación es esencialmente estática y no explica cómo los agentes podrían llegar efectivamente a ese resultado. Para abordar esta limitación, el enfoque estratégico propuesto por Rubinstein (1982) modela la negociación como un proceso dinámico de ofertas alternadas en el tiempo. Este modelo permite derivar la solución de negociación como el equilibrio de un juego extensivo, incorporando de manera explícita la impaciencia de los jugadores y las estrategias individuales. Así, se conecta el resultado de Nash con un proceso de interacción realista y secuencial entre partes racionales.

6.2. Modelo de negociación de Rubinstein

En el modelo de Rubinstein (1982), dos jugadores alternan propuestas, y cada uno puede aceptar o rechazar la propuesta del otro. Si se llega a un acuerdo, el juego termina; si no, continua al siguiente periodo, con la utilidad de los jugadores descontada por factores δ_1 y δ_2 respectivamente, donde $\delta_i \in (0, 1)$ representa la impaciencia del jugador i . El modelo es un modelo de negociación estratégico con información completa y horizonte de tiempo infinito.

Formalmente, sean $N = \{1, 2\}$ los dos jugadores. El conjunto factible de acuerdos que se considera es de la forma:

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 : u_2 \leq g(u_1)\},$$

donde $g : [0, b_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función continua, cóncava, estrictamente decreciente, tal que $g(0) = b_2 > 0$ y $g(b_1) = 0$. Los puntos $(b_1, 0)$ y $(0, b_2)$ representan las utilidades máximas posibles para cada jugador si tuvieran poder absoluto para imponer su preferencia.

Observación 6.2.1. Los supuestos son más fuertes que los originales hechos por Nash.

Luego,

■ las posibles historias son:

1. \emptyset (historia inicial) o $(u^0, R, u^1, R, \dots, u^t, R)$ donde $u^s \in U$ y R significa rechazo (historias donde le toca a un jugador hacer una propuesta)
2. $(u^0, R, u^1, R, \dots, u^t)$ (historias donde le toca a un jugador contestar una propuesta)
3. $(u^0, R, u^1, R, \dots, u^t, A)$ (historias terminales donde se acepta la propuesta u^t en el período t)
4. (u^0, R, u^1, R, \dots) (historias terminales donde nunca se acepta una propuesta)

■ función jugador

- si h es tipo (1) y h es vacía o t es impar, $P(h) = 1$ y $A(h) = U$
- si h es tipo (1) y t es cero o par, $P(h) = 2$ y $A(h) = U$
- si h es tipo (2) y t es impar, $P(h) = 1$ y $A(h) = \{A, R\}$
- si h es tipo (2) y t es cero o par, $P(h) = 2$ y $A(h) = \{A, R\}$.

Cada jugador i tiene un factor de descuento $\delta_i \in (0, 1)$. Si h es de tipo (3), $u_1(h) = \delta_1^t u_1^t$ y $u_2(h) = \delta_2 u_2^t$. Así, los individuos descuentan el futuro de manera exponencial. Si h es de tipo (4), $u_1(h) = u_2(h) = 0$.

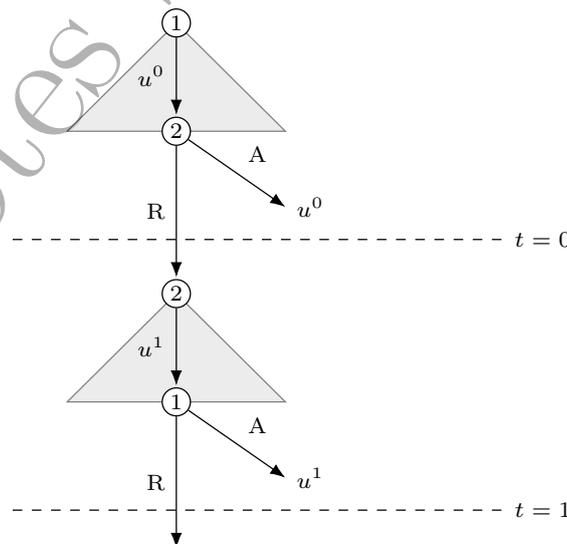


Figura 6.13 Árbol del juego.

Rubinstein demostró que, bajo este entorno, existe un único equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) en estrategias puras y estacionarias, y que dicho equilibrio conduce a un acuerdo inmediato en el primer periodo. Consideremos a continuación $\delta_i = \delta \in (0, 1)$.

Sean $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ y $v^* = (v_1^*, v_2^*)$ dos propuestas de reparto tales que:

- $u_2^* = g(u_1^*)$ y $v_2^* = g(v_1^*)$ (ambos puntos se encuentran sobre la frontera del conjunto factible U),
- $v_1^* = \delta u_1^*$, y $u_2^* = \delta v_2^*$.

Estas condiciones reflejan que si el jugador 1 propone u^* , el jugador 2 es indiferente entre aceptar o rechazar y hacer la contraoferta v^* , y viceversa. Para que estas propuestas constituyan un equilibrio perfecto en subjuegos, debe cumplirse que las estrategias de ambos jugadores sean mutuamente óptimas dados los descuentos intertemporales. Sustituyendo las condiciones anteriores, se deduce que u_1^* debe satisfacer la ecuación:

$$f(u_1^*) \equiv g(u_1^*) - \delta g(\delta u_1^*) = 0.$$

Para analizar la existencia y unicidad de soluciones, observamos lo siguiente:

- $f(0) = g(0) - \delta g(0) = (1 - \delta)b_2 > 0$, ya que $g(0) = b_2 > 0$ y $\delta \in (0, 1)$;
- $f(b_1) = g(b_1) - \delta g(\delta b_1) = 0 - \delta g(\delta b_1) < 0$, pues $g(b_1) = 0$ y g es positiva en el intervalo $(0, b_1)$;
- Como g es una función cóncava y continua en el intervalo $[0, b_1]$, se concluye (véase [Folland \(1999\)](#)) que g es diferenciable en casi todo punto de su dominio. Por tanto, f también es diferenciable casi en todo punto. De este modo, podemos escribir: $f'(x) = g'(x) - \delta^2 g'(\delta x) < 0$, donde la desigualdad se deduce del hecho que g es cóncava y $\delta \in (0, 1)$: $g'(x) \leq g'(\delta x) < 0$ y $\delta^2 < 1$. Finalmente, se concluye que, al set $f' < 0$ en casi todo punto, como es absolutamente continua en el compacto $[0, b_1]$, por el teorema fundamental del cálculo, f es estrictamente decreciente:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(s) ds < 0, \quad y > x.$$

Así, la ecuación $f(u_1^*) = 0$ admite una única solución en $(0, b_1)$.

Teorema 6.2.2. En el modelo de negociación de Rubinstein hay un único equilibrio perfecto en los subjuegos. Sea x la solución de

$$g(x) = \delta g(\delta x).$$

En todo equilibrio perfecto en los subjuegos, el jugador 1 siempre propone $(x, g(x))$ y acepta cualquier propuesta $(x', g(x'))$ tal que $x' \geq \delta x$; el jugador 2 siempre propone $(\delta x, g(\delta x))$ y acepta cualquier propuesta $(x', g(x'))$ tal que $x' \leq x$.

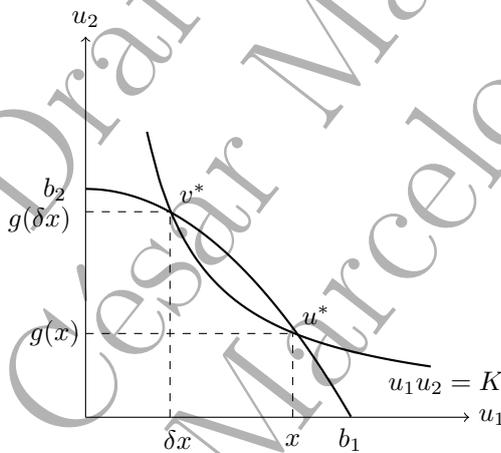


Figura 6.14 Las propuestas están en la misma *curva de indiferencia*.

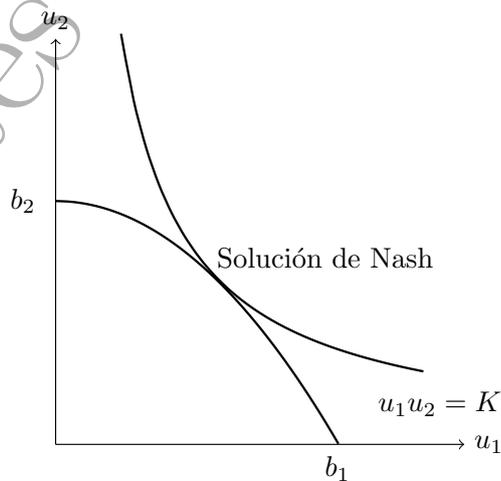


Figura 6.15 $\delta \rightarrow 1$.

Demostración. Sea M el mayor pago que el jugador 1 puede obtener en el subjuego que inicia en el período 2. En tal caso, en el período 1 el jugador 1 estará dispuesto a aceptar cualquier oferta que le proporcione al menos δM , por lo que el jugador 2 debe recibir al menos $g(\delta M)$. Esto implica que, en el período 0, el jugador 2 no aceptará menos de $\delta g(\delta M)$, y por lo tanto el jugador 1 podrá obtener como máximo $g^{-1}(\delta g(\delta M))$. Dado que los juegos en los períodos 0 y 2 son idénticos, se requiere que $M = g^{-1}(\delta g(\delta M))$, lo que implica que $g(M) = \delta g(\delta M)$. De manera análoga, si se define m como el pago mínimo que el jugador 1 puede obtener en el período 2, entonces en el período 1 el jugador 1 no aceptará menos de δm , y el jugador 2 no podrá recibir más de $g(\delta m)$. Esto implica que en el período 0 el jugador 2 no aceptará menos de $\delta g(\delta m)$, por lo que el jugador 1 podrá obtener al menos $g^{-1}(\delta g(\delta m))$. Nuevamente, por simetría del problema, se debe cumplir que $m = g^{-1}(\delta g(\delta m))$, es decir, $g(m) = \delta g(\delta m)$. Por tanto, concluimos que $M = m$, y que el equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) es único. Sea u^* el pago del jugador 1 y $v^* = g(u^*)$ el del jugador 2. \square

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo para una forma específica de $g(\cdot)$.

Ejemplo 6.2.3 (Reparto lineal de una tarta). Supóngase que $g(x_1) = 1 - x_1$, es decir, el jugador 2 recibe lo que el jugador 1 no recibe. La condición de unicidad del EPS se escribe como $x = g^{-1}(\delta g(\delta x)) = 1 - \delta(1 - \delta x)$, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \delta + \delta^2 x \\ x(1 - \delta^2) &= 1 - \delta \\ x &= \frac{1 - \delta}{1 - \delta^2} = \frac{1}{1 + \delta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el jugador 1 recibe $\frac{1}{1+\delta}$ y el jugador 2 recibe $g(x) = \frac{\delta}{1+\delta}$. Conforme $\delta \rightarrow 1$, ambos jugadores convergen a un reparto equitativo de la tarta: $(1/2, 1/2)$.

Observación 6.2.4. Este equilibrio tiene varias propiedades destacadas: (i) es eficiente, pues se alcanza acuerdo inmediato y en la frontera de Pareto; (ii) las estrategias son estacionarias, es decir, no dependen del período; (iii) si el juego es simétrico, el jugador que hace la primera oferta (jugador 1) tiene ventaja, pero esta ventaja se desvanece conforme $\delta \rightarrow 1$, y se cumple que $x/g(x) \rightarrow 1$; (iv) en el caso lineal, esto implica convergencia al reparto equitativo $(1/2, 1/2)$.

Observación 6.2.5. De forma general, podemos definir las preferencias de los individuos sobre $(X \times T) \times D$, donde X es el conjunto de acuerdos, $T = \mathbb{Z}_+$ y D es el conjunto de historias. La relación de preferencias \succeq_i satisface lo siguiente:

- ▶ $(x, t) \succeq_i D$ para todo $(x, t) \in X \times T$.
- ▶ El tiempo es valioso: $(x, t) \succeq_i (x, t + 1)$ para todo $t \in T$ y para cualquier acuerdo $x \in X$. Además, $(x, 0) \succ_i D$.
- ▶ Las preferencias son estacionarias: $(x, t) \succeq_i (y, t + 1)$ si y solo si $(x, 0) \succeq_i (y, 2)$, y $(x, t) \succeq_i (y, t)$ si y solo si $(x, 0) \succeq_i (y, 0)$.
- ▶ Continuidad: si $x_n \in X$ e $y_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ e $\{y_n\}$ converge a $y \in X$, y $(x_n, t) \succeq_i (y_n, s)$ para todo n , entonces $(x, t) \succeq_i (y, s)$.

Estos supuestos implican que para cualquier $\delta \in (0, 1)$ existe $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que \succeq_i queda representada sobre $X \times T$ por $\delta^t u_i(x)$ en el sentido que

$$(x, t) \succeq_i (y, s) \Leftrightarrow \delta^t u_i(x) \geq \delta^s u_i(y).$$

Esto se demuestra en (Fishburn and Rubinstein, 1982).

Observación 6.2.6. Si $\delta^t u_i(x)$ representa \succeq_i , entonces para todo $\epsilon \in (0, 1)$, la función $\epsilon^t v_i(x)$ con $v_i(x) = (u_i(x))^{(\ln \epsilon)/(\ln \delta)}$ también representa \succeq_i . En efecto,

$$\alpha = \frac{\ln \epsilon}{\ln \delta} > 0.$$

Luego,

$$\epsilon^t = (\delta^t)^\alpha \implies \epsilon = \delta^\alpha \implies \alpha = \frac{\ln \epsilon}{\ln \delta}.$$

Así, como $z \rightarrow z^\alpha$ es estrictamente creciente para $\alpha > 0$, concluimos.

Observación 6.2.7. Si $\delta^t u_i(\cdot)$ y $\epsilon^t v_i(\cdot)$ representan dos relaciones de preferencias y $\delta > \epsilon$, no podemos decir que la primera relación es más *paciente* que la segunda, salvo que $v_i = u_i$.

Ejemplo 6.2.8. Consideramos un juego de dividir la torta en el que cada jugador i tiene preferencias representadas por la función $\delta_i^t x_i$, con $\delta_i \in (0, 1)$. Ahora no

imponemos que los δ_i sean iguales. A partir del sistema de ecuaciones que debemos tener en el equilibrio (donde u^* es la oferta que hace J1 y v^* la que hace J2):

$$\begin{cases} u_2^* &= g(u_1^*) \\ v_2^* &= g(v_1^*) \\ v_1^* &= \delta_1 u_1^* \\ u_2^* &= \delta_2 v_2^* \end{cases}$$

con $g(x) = 1 - x$. Se sigue que

$$\frac{u_2^*}{\delta_2} = v_2^* = g(\delta_1 u_1^*)$$

$$u_2^* = \delta_2 g(\delta_1 u_1^*)$$

$$g(u_1^*) - \delta_2 g(\delta_1 u_1^*) = 0$$

$$1 - u_1^* - \delta_2(1 - \delta_1 u_1^*) = 0$$

$$1 - u_1^* - \delta_2 + \delta_2 \delta_1 u_1^* = 0$$

$$u_1^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

Prof.: César Martinelli
Notes by Marcelo Gallardo

Capítulo 7

Juegos repetidos

Para este capítulo, seguimos fundamentalmente a [Mailath and Samuelson \(2006\)](#) y [Osborne \(2003\)](#). Los juegos repetidos examinan la lógica de las interacciones de largo plazo. Los jugadores toman en cuenta efectos de su conducta actual sobre la conducta futura de los otros jugadores. Así, temas como la cooperación, la vergüenza, las amenazas o la reputación son de interés en estos juegos. En particular, los juegos repetidos son un caso especial de los juegos extensivos con información completa y jugadas simultáneas.

7.1. Conceptos fundamentales

Definición 7.1.1. Juego infinitamente repetido. Sea $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estratégico (el juego de cada etapa), y sea $A = \otimes_{i \in N} A_i$. Un juego infinitamente repetido de G es un juego extensivo con información perfecta y jugadas simultáneas $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ en el que

- ▶ las historias no terminales: $H \setminus Z$ son $\cup_{t=0}^K A^t$, $K \in \mathbb{N}_0$, donde $A^0 = \emptyset$ es la historia inicial,
- ▶ la función jugador: $P(h) = N$ para todo $h \in H \setminus Z$,
- ▶ historias terminales: $Z = A^\infty$,

► función de pagos:

$$U(h) = (1 - \delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(a^t), \quad \delta \in (0, 1)$$

Definición 7.1.2. Una estrategia pura del jugador i es una función

$$s_i : H \setminus Z \rightarrow A_i$$

donde H es el conjunto de historias, Z las historias terminales y A_i el espacio de acciones de i .

Observación 7.1.3. Por lo general, o bien el conjunto A_i es finito y se consideran estrategias de conducta (distribuciones de probabilidad sobre A_i)¹, o bien A_i es un conjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^k . En el último caso, se asume que las funciones de pago u_i son continuas y cuasicóncavas.

Definición 7.1.4. Una estrategia de conducta del jugador i es una función

$$\sigma_i : H \setminus Z \rightarrow \Delta(A_i).$$

En algunas ocasiones, se introduce una *lotería pública*, que sirve para hacer que todos los pagos de la envoltura convexa de $u(A)$ sean factibles.

Observación 7.1.5. En algunas ocasiones se escribe

$$U_i(\sigma) = U_i(h),$$

donde h es la historia inducida por el perfil de estrategias σ .

Definición 7.1.6. Un perfil de estrategias σ es un equilibrio de Nash si para todo i y toda estrategia σ'_i

$$U_i(\sigma) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}).$$

Definición 7.1.7. Un perfil σ es un equilibrio perfecto en los subjuegos si para toda $h \in H \setminus Z$, $\sigma|_h$ es un equilibrio de Nash del juego repetido.

Observación 7.1.8. En un juego repetido, todo subjuego es idéntico al juego repetido original.

¹Notar que esto es distinto a estrategias mixtas.

7.2. Autómatas y enfoque recursivo

Ejemplo 7.2.1. Consideremos el dilema del prisionero repetido:

		jugador 2	
		<i>cooperar</i>	<i>desertar</i>
jugador 1	<i>cooperar</i>	3,3	0,4
	<i>desertar</i>	4,0	1,1

Podemos considerar en este contexto, lo que llamamos **estrategia sombría**: *cooperar en el primer período, y en cada período siempre que los dos jugadores hayan cooperado hasta entonces. Desertar en cualquier otra circunstancia.*

Entonces, si $-i$ juega la estrategia sombría, e i también, entonces el pago es

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (3) &= (1 - \delta)3 + (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t (3) \\
 &= (1 - \delta)3 + (1 - \delta)\delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t 3 \\
 &= (1 - \delta)3 + \delta 3 = 3.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, si i se desvía, el pago del periodo es 4, y en cada periodo futuro a lo más 1, pues el otro jugador deserta y, por como se definió la estrategia, lo óptimo es desertar siempre a continuación. De este modo, el pago del desvío es

$$(1 - \delta)4 + \delta(1) = 4 - 3\delta.$$

Por lo tanto, para

$$3 \geq 4 - 3\delta \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{3},$$

la estrategia sombría es un equilibrio perfecto: ¡la cooperación es posible en el sendero de equilibrio!²

²Si el juego se repite solo finitas veces, el único EPS es jugar el EN en cada periodo por inducción hacia atrás.

Observación 7.2.2. Podemos pensar en:

$$(1 - \delta)3 + 3\delta \geq 4(1 - \delta) + 1(\delta)$$

\Leftrightarrow

$$\underbrace{\delta(3 - 1)}_{\text{Castigo}} \geq \underbrace{(1 - \delta)(4 - 3)}_{\text{Beneficio del crimen.}}$$

Observación 7.2.3. Estrategias como autómatas finitos. Una estrategia en un juego repetido puede representarse como un autómata finito $(\Omega, \omega^0, f, \tau)$, donde:

- Ω es el conjunto finito de *estados*, que resume las historias no terminales del juego $H \setminus Z$; ³
- $\omega^0 \in \Omega$ es el *estado inicial*;
- $f : \Omega \rightarrow A$ es la *función de recomendación*, que indica qué jugada se realiza en cada estado;
- $\tau : \Omega \times A \rightarrow \Omega$ es la *función de transición*, que determina cómo evoluciona el estado según las acciones observadas y el estado.

Primero, extendemos el dominio de la función de transición de $\Omega \times A$ a $\Omega \times H - \{\emptyset\}$ como sigue (de forma recursiva):

$$h^t = (a^0, \dots, a^{t-1})$$

$$h^{t-1} = (a^0, \dots, a^{t-2})$$

$$\tau(\omega, h^t) = \tau(\tau(\omega, h^{t-1}), a^{t-1}).$$

Con esta definición, una estrategia s puede describirse como sigue:

$$s(\emptyset) = f(\omega^0)$$

$$s(h^t) = f(\tau(\omega, h^t)).$$

Definición 7.2.4. Estado accesible. Un estado $\omega' \in \Omega$ es accesible desde otro estado $\omega \in \Omega$ si existe una secuencia de perfiles de acción tal que partiendo de ω se llega a ω' . Formalmente, existe h^t tal que $\omega' = \tau(\omega, h^t) = \tau(\tau(\omega, h^{t-1}), a^{t-1})$.

³El conjunto Ω es una partición de H/Z , agrupando las historias que tienen la misma estrategia de continuación.

Definición 7.2.5. Perfil de continuación. Cuando un perfil de estrategias σ es descrito por un autómata $(\Omega, \omega^0, f, \tau)$, el perfil de estrategia de continuación luego de la historia h^t , $\sigma|_{h^t}$ es descrito por el autómata que se obtiene usando $\tau(\omega^0, h^t)$ como estado inicial. Esto es:

$$(\Omega, \tau(\omega^0, h^t), f, \tau).$$

Ejemplo 7.2.6. Dilema del prisionero usando autómata: estrategia. Una estrategia sombría (grim-trigger) puede representarse con:

- $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, donde ω_0 es el estado de cooperación y ω_1 el estado de castigo eterno, esto es una partición por como se ha definido;
- $f(\omega_0) = (C, C), f(\omega_1) = (D, D)$;
- función de transición:

$$\tau(\omega, a) = \begin{cases} \omega_0, & \text{si } \omega = \omega_0 \text{ y } a = (C, C), \\ \omega_1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

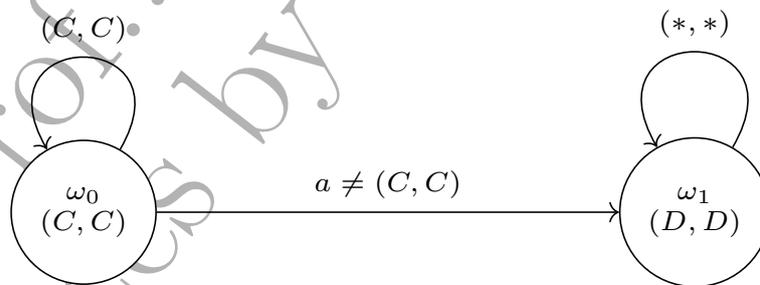


Figura 7.1 Perfil de estrategias sombrías como autómata.

Este tipo de representación permite verificar si un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS), al asegurar que no existen desvíos unilaterales rentables desde ningún estado $\omega \in \Omega$. Además, facilita la visualización mediante diagramas de estados y transiciones.

Ejemplo 7.2.7. Dilema del prisionero usando autómata: función valor. Con relación al perfil de estrategias sombrías, el valor de cada estado (figura 7.1) viene dado por

$$V(\omega_0) = (1 - \delta)3 + \delta V(\omega_0) \implies V(\omega_0) = 3$$

$$V(\omega_1) = (1 - \delta)1 + \delta V(\omega_1) \implies V(\omega_1) = 1.$$

Luego, no hay desviaciones unilaterales ventajosas en ω_0 si

$$(1 - \delta)(4) + \delta V(\omega_1) \leq V(\omega_0) \Leftrightarrow (1 - \delta)(4) + \delta(1) \leq 3 \Leftrightarrow \delta \geq 1/3.$$

Análogamente, para ω_1 :

$$(1 - \delta)0 + \delta V(\omega_1) \leq V(\omega_1) \implies 0 \leq 1.$$

Así, el perfil de estrategias sombría es un EPS si y solo si $\delta \geq 1/3$.

Ejemplo 7.2.8. Cournot repetido. Se tienen n empresas que escogen cantidades (las acciones) $a_i \in [0, \bar{q}]$, donde $\bar{q} \leq 1$. La función de demanda inversa viene dada por

$$P(Q) = \max \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n a_i, 0 \right\}$$

con costo marginal $c < 1$ y beneficios

$$u_i(a) = \pi_i(a) = a_i \left(\max \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n a_i, 0 \right\} - c \right).$$

Ahora bien, bajo colusión,

$$\max_{\sum_i a_i} \left\{ \sum_i a_i \left(1 - \sum_i a_i - c \right) \right\}$$

provee

$$a_i = \frac{1 - c}{2n}$$

$$u_i = \frac{(1 - c)^2}{4n}.$$

En efecto, la CPO provee

$$1 - 2Q^* - c = 0$$

$$Q^* = \frac{1 - c}{2}$$

$$q_i^* = \frac{1 - c}{2n}.$$

Por otro lado, el equilibrio de Nash del juego en una etapa (Cournot) es (ver subsección 3.1.1)

$$a_i = \frac{1-c}{n+1}$$

$$u_i = \frac{(1-c)^2}{(n+1)^2}.$$

En este caso, la estrategia sombría corresponder a coludir en todos los periodos, i.e. producir $(1-c)/2n$ si todos han hecho eso en cada período pasado, y si no, producir la cantidad de Cournot $(1-c)/(n+1)$.

La pregunta natural es: ¿es la estrategia sombría es un equilibrio perfecto si δ está suficientemente cerca de 1? Veamos. Si los otros jugadores juegan colusión e i se desvía, produce

$$a_i^* \in \operatorname{argmax} \left\{ a_i \left(1 - \frac{(n-1)(1-c)}{2n} - c - a_i \right) \right\}.$$

Se obtiene fácilmente aplicando CPO

$$a_i^* = \frac{(n+1)(1-c)}{4n}.$$

Por lo tanto, el pago de la desviación óptima es menor o igual al pago de la colusión si:

$$(1-\delta) \underbrace{\left(\frac{(n+1)(1-c)}{4n} \right)}_{u_i \left(\frac{(n+1)(1-c)}{4n}, \frac{1-c}{2n} \right)} + \delta \frac{(1-c)^2}{(n+1)^2} \leq \frac{(1-c)^2}{4n}. \quad (7.1)$$

Por lo tanto, de (7.1) concluimos que si

$$\delta \geq \bar{\delta}(n) = \frac{1 - \frac{4n}{(n+1)^2}}{1 - \left(\frac{4n}{(n+1)^2} \right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4n}{(n+1)^2}},$$

entonces la colusión es un equilibrio.

Observación 7.2.9. No es inmediato que haya competencia con varios competidores, aunque el número de competidores hace la colusión más difícil ($\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\delta}(n) = 1$).

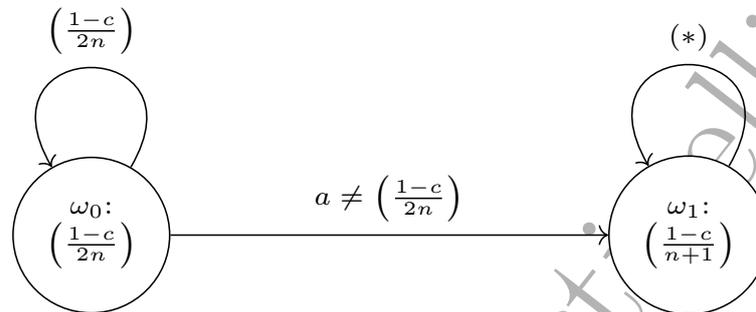


Figura 7.2 Perfil de estrategias sombrías en Cournot como autómata.

Ejemplo 7.2.10. Bertrand repetido. Consideramos n empresas que deciden en precios $a_i \in [0, \infty)$. La demanda es $\max\{1 - \min_i a_i, 0\}$ y el costo marginal de cada empresa es $c < 1$. Bajo colusión, debemos resolver

$$\max_p \left\{ \underbrace{\sum_i (1-p)(p-c)}_{n(1-p)(p-c)} \right\} \rightarrow \max_p (1-p)(p-c).$$

La CPO provee que se debe cobrar $p = \frac{1+c}{2}$. Por ende, para cada produce:

$$a_i^* = \frac{1-c}{2n}$$

y obtiene beneficios iguales a

$$u_i^* = \frac{(1-c)^2}{4n}.$$

Por otro lado, en el equilibrio de Nash,

- $p \geq c$ con igualdad para al menos dos competidores,
- $u_i = 0$.

La estrategia sombría en este caso es vender al precio $(1+c)/2$ si todos han hecho eso en cada período anterior, y si no, a precio c . Para encontrar el $\delta > 0$ tal que la estrategia sombría es preferida, analizamos el desvío. En este caso, es vender a precio

$p = (1 + c)/2 - \epsilon$ (ϵ arbitrariamente chico), y quedarse con todo el mercado. En dicho caso, los pagos por la desviación son

$$(1 - \delta) \frac{(1 - c)^2}{4} + \delta(0).$$

Así,

$$(1 - \delta) \frac{(1 - c)^2}{4} + \delta(0) \leq \frac{(1 - c)^2}{4n}. \quad (7.2)$$

(7.2) ocurre si y solo si

$$\delta \geq \tilde{\delta}(n) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Observación 7.2.11. Para $n \geq 2$, $\tilde{\delta}(n) > \bar{\delta}(n)$:⁴ por lo tanto, la colusión es más fácil en competencia a la Cournot que a la Bertrand.

Lema 7.2.12. Si a^* es un equilibrio de Nash del juego G , entonces s^* , dada por $s_i(h) = a_i$ para toda $h \in H \setminus Z$ para todo i es un equilibrio perfecto en los subjuegos del juego G repetido infinitas veces, G^∞ .

Demostración. Desviarse en un período no puede beneficiar en ese período pues a^* es un equilibrio de Nash del juego G , y no puede beneficiar en períodos siguientes pues las estrategias de los demás son independientes de la historia \square

Teorema 7.2.13. Teorema Folk. Sea a un perfil de acciones tal que $u(a) \geq u(a^*)$ para algún equilibrio estático de Nash a^* . Entonces existe $\underline{\delta} \in (0, 1)$ tal que para todo $\delta > \underline{\delta}$ existe un equilibrio perfecto en los subjuegos del juego repetido de G con sendero de equilibrio $a^t = a$ para todo t .

⁴ Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} &\geq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 4n} \\ ((n+1)^2 + 4n)(n-1) &\geq n(n+1)^2 \\ (n^2 + 6n + 1)(n-1) &\geq (n+1)^2 n \\ n^3 + 6n^2 + n - n^2 - 6n - 1 &\geq n^3 + 2n^2 + n \\ 5n^2 - 5n - 1 &\geq 2n^2 + n \\ 3n^2 - 6n &\geq 1 \\ 3n(n-2) &\geq 1. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ un equilibrio de Nash del juego estático G con pagos $e = (e_1, \dots, e_n)$ y sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ un perfil de acciones tal que $u_i(a) = x_i \geq e_i$ para todo jugador i . Supongamos que cada jugador representa su estrategia mediante un autómata finito de dos estados:

- ω_0 : estado de cooperación, donde se juega $f(\omega_0) = a$;
- ω_1 : estado de castigo, donde se juega $f(\omega_1) = a^*$.

La transición $\tau : \Omega \times A \rightarrow \Omega$ está definida por:

$$\tau(\omega, a') = \begin{cases} \omega_0, & \text{si } \omega = \omega_0 \text{ y } a' = a, \\ \omega_1, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esta estrategia sombría juega a en el primer periodo. Si en todos los periodos anteriores se jugó a , se continúa en ω_0 y se juega a nuevamente. Si en algún periodo se observa un desvío (es decir, $a' \neq a$), se transita a ω_1 y se juega a^* para siempre. Sea $d_i = \max_{a'_i \in A_i} u_i(a_{-i}, a'_i)$ el pago que obtiene el jugador i por desviarse unilateralmente en el primer periodo. Si el jugador i desvía, obtiene d_i en el primer periodo, y a partir del siguiente se juega a^* indefinidamente, con valor presente δe_i . Así, el valor total de desviarse es:

$$U_i^{\text{desvío}} = (1 - \delta)d_i + \delta e_i.$$

Si en cambio sigue la cooperación:

$$U_i^{\text{cooperación}} = x_i.$$

Para que no sea rentable desviarse, se requiere:

$$x_i \geq (1 - \delta)d_i + \delta e_i.$$

Despejando δ :

$$\delta \geq \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}.$$

Definiendo

$$\underline{\delta} := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} \right\},$$

se tiene que para todo $\delta > \underline{\delta}$, ningún jugador tiene incentivos a desviarse del equilibrio propuesto. Queda probar que se trata de un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS). \square

Ejemplo 7.2.14. El dilema del prisionero revisitado. La paciencia de los jugadores es una condición necesaria, pero no suficiente, para sostener la cooperación en juegos repetidos. En particular, existen perfiles no Pareto eficientes ni simétricos que pueden sostenerse como equilibrio perfecto en subjuegos si los jugadores son suficientemente pacientes. Considérese la *estrategia sombría par*, definida de la siguiente manera:

- En el primer periodo, y en todos los periodos pares, ambos jugadores ejercen esfuerzo (juegan C).
- En los periodos impares, ambos jugadores eligen ocio (juegan D).
- Si en cualquier periodo el outcome no es el prescrito (es decir, algún jugador desvía), se entra a un estado de castigo permanente consistente en jugar el equilibrio de Nash estático a^* .

En los periodos impares, no hay incentivos a desviarse, ya que el plan prescribe D para ambos jugadores. El análisis relevante se centra en los periodos pares, donde un jugador podría obtener un pago mayor mediante una desviación unilateral.

Valor de seguir la estrategia: en los periodos pares se recibe un pago de 3 y en los impares un pago de 1. El valor presente de este flujo es:

$$\begin{aligned}
 U_i^{\text{seguir}} &= (1 - \delta) (3 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 3 + \delta^3 \cdot 1 + \dots) \\
 &= (1 - \delta) \left[3 \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} + \delta \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} \right] \\
 &= (1 - \delta) \left[3 \frac{1}{1 - \delta^2} + \frac{\delta}{1 - \delta^2} \right] \\
 &= \frac{3 + \delta}{1 + \delta}.
 \end{aligned}$$

Valor de desviarse en un periodo par: si un jugador desvía en un periodo par, recibe un pago de 4 ese periodo, y luego se entra a castigo permanente con pago 1:

$$U_i^{\text{desviar}} = 4(1 - \delta) + \delta \cdot \frac{1}{1 - \delta} = 4 - 3\delta.$$

Condición de incentivo: se requiere:

$$\frac{3 + \delta}{1 + \delta} \geq 4 - 3\delta.$$

Multiplicando ambos lados por $1 + \delta$:

$$3 + \delta \geq (4 - 3\delta)(1 + \delta) = 4 + \delta - 3\delta^2,$$

lo que implica:

$$3 + \delta - (4 + \delta - 3\delta^2) \geq 0 \Rightarrow 3\delta^2 \geq 1 \Rightarrow \delta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por tanto, la estrategia sombría par constituye un equilibrio perfecto en subjuegos siempre que:

$$\delta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Este ejemplo demuestra que la cooperación parcial o alternada también puede sostenerse en equilibrio bajo amenazas creíbles de castigo, incluso si no se alcanza el óptimo de Pareto simétrico.

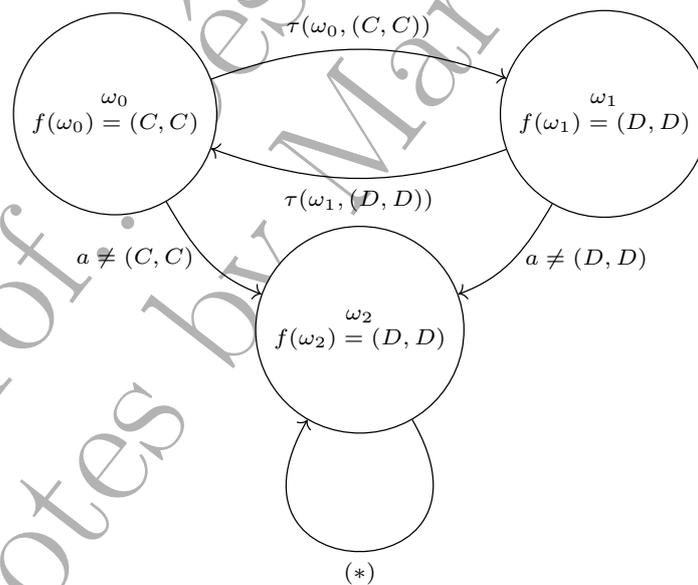


Figura 7.3 Perfil de estrategias sombrías pares como autómata.

Desde el enfoque del autómata (figura 7.3):

$$V(\omega_0) = (1 - \delta)(3) + \delta V(\omega_1)$$

$$V(\omega_1) = (1 - \delta)(1) + \delta V(\omega_0)$$

$$V(\omega_0) = \frac{3 + \delta}{1 + \delta}$$

$$V(\omega_1) = \frac{1 + 3\delta}{1 + \delta}$$

$$V(\omega_2) = 1.$$

Luego, analizamos desviaciones:

$$V(\omega_0) \geq (1 - \delta)(4) + \delta V(\omega_2) \implies \delta \geq 1/\sqrt{3}$$

$$V(\omega_1) \geq (1 - \delta)(0) + \delta V(\omega_2) \text{ siempre se cumple para } \delta \leq 1$$

$$V(\omega_2) \geq (1 - \delta)(0) + \delta V(\omega_2) \text{ siempre se cumple.}$$

Ejemplo 7.2.15. Tit-for-tat (ojo por ojo). Considere la siguiente situación: se empieza cooperando, y luego cooperar si el otro jugador coopera en el período anterior, y desertar si el otro jugador desertó en el período anterior. ¿Es tit-for-tat EPS? Consideremos primero los pagos:

		jugador 2	
		<i>cooperar</i>	<i>desertar</i>
jugador 1	<i>cooperar</i>	3, 3	-1, 4
	<i>desertar</i>	4, -1	1, 1

- ▶ Sean $a_i \in \{C, D\}$.
- ▶ Sea V la función valor para J1 (si bien no tenemos la simetría perfecta, los jugadores son intercambiables).
- ▶ Denotamos $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\omega_{CC}, \omega_{DD}, \omega_{CD}, \omega_{DC}\}$.

► $\omega_0 = \omega_{CC}$.

► Luego,

$$f(\omega_{a_1 a_2}) = (a_1, a_2)$$

y

$$\tau(\omega_{a_1 a_2}, (a_1, a_2)) = \omega_{a_2 a_1}.$$

► Así,

$$\begin{cases} V(\omega_{CC}) = 3 \\ V(\omega_{DD}) = 1 \\ V(\omega_{CD}) = (1 - \delta)(-1) + \delta V(\omega_{DC}) \\ V(\omega_{DC}) = 4(1 - \delta) + \delta V(\omega_{CD}). \end{cases}$$

Resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} V(\omega_{CC}) \\ V(\omega_{DD}) \\ V(\omega_{CD}) \\ V(\omega_{DC}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \delta - 1 \\ 4(1 - \delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{4\delta - 1}{1 + \delta} \\ \frac{4 - \delta}{1 + \delta} \end{bmatrix}.$$

Evaluamos ahora si hay desvíos rentables en los distintos estados del autómata.

Caso 1: En ω_{CC} se prescribe cooperación. Para que esta sea óptima, debe cumplirse:

$$V(\omega_{CC}) \geq \underbrace{(1 - \delta) \cdot 4 + \delta V(\omega_{CD})}_{=V(\omega_{DC})} = 4(1 - \delta) + \delta \cdot \frac{4\delta - 1}{1 + \delta}.$$

Sustituimos $V(\omega_{CC}) = 3$, y resolvemos:

$$3 \geq 4(1 - \delta) + \frac{\delta(4\delta - 1)}{1 + \delta}.$$

Esto es equivalente a:

$$\delta \geq \frac{1}{4}.$$

Caso 2: Para que la respuesta sea óptima, se requiere que

$$V(\omega_{CD}) \geq \underbrace{(1 - \delta) \cdot 1 + \delta \cdot 1}_{=V(\omega_{DD})} = 1.$$

Sustituyendo:

$$\frac{4\delta - 1}{1 + \delta} \geq 1 \Rightarrow \delta \geq \frac{2}{3}.$$

Caso 3: En ω_{DC} , para evitar desviaciones debemos tener

$$V(\omega_{DC}) \geq \underbrace{(1 - \delta) \cdot 3 + \delta \cdot 3}_{=V(\omega_{CC})} = 3.$$

Sustituyendo:

$$\frac{4 - \delta}{1 + \delta} \geq 3 \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{4}.$$

Con los casos 1-3 llegamos a que no existe ningún valor de $\delta \in (0, 1)$ que satisfaga simultáneamente:

$$\delta \geq \frac{1}{4}, \quad \delta \geq \frac{2}{3}, \quad \delta \leq \frac{1}{4}.$$

En particular, la última condición contradice las anteriores. Por lo tanto, tit-for-tat no es un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS), ya que no es un equilibrio en todos los estados alcanzables por la estrategia. Sin embargo, puede ser un equilibrio de Nash del juego repetido si $\delta \geq \frac{1}{3}$, como se mostró en un análisis separado.

Ejemplo 7.2.16. Tit-for-tat (otros pagos). Consideremos ahora los siguientes pagos:

		jugador 2	
		<i>cooperar</i>	<i>desertar</i>
jugador 1	<i>cooperar</i>	3,3	0,4
	<i>desertar</i>	4,0	1,1

Del análisis en el ejemplo 7.2.15, deducimos que se tienen los siguientes valores de estado simétricos:

$$V(\omega_0) = (1 - \delta)(3) + \delta V(\omega_0) \Rightarrow V(\omega_0) = 3$$

$$V(\omega_1) = (1 - \delta)(1) + \delta V(\omega_1) \Rightarrow V(\omega_1) = 1$$

y los siguientes valores de estados antisimétricos

$$V_1(\omega_2) = (1 - \delta)(0) + \delta V_1(\omega_3)$$

$$V_2(\omega_2) = (1 - \delta)(4) + \delta V_2(\omega_3)$$

$$V_1(\omega_3) = (1 - \delta)(4) + \delta V_1(\omega_2)$$

$$V_2(\omega_3) = (1 - \delta)(0) + \delta V_2(\omega_2).$$

Por lo tanto, se deduce que

$$V_1(\omega_2) = \frac{4\delta}{1 + \delta} \quad V_1(\omega_3) = \frac{4}{1 + \delta}$$

$$V_2(\omega_2) = \frac{4}{1 + \delta} \quad V_2(\omega_3) = \frac{4\delta}{1 + \delta}.$$

Las desviaciones relevantes (dado que los jugadores son inter-cambiables) son:

$$V(\omega_0) \geq (1 - \delta)(4) + \delta V_1(\omega_2)$$

$$V(\omega_1) \geq (1 - \delta)(0) + \delta V_1(\omega_3)$$

$$V_1(\omega_3) \geq (1 - \delta)(3) + \delta V(\omega_0)$$

$$V_1(\omega_2) \geq (1 - \delta)(1) + \delta V(\omega_1).$$

Entonces,

$$3 \geq (1 - \delta)(4) + \delta \frac{4\delta}{1 + \delta} \implies \delta \geq 1/3$$

$$1 \geq \delta \frac{4}{1 + \delta} \implies \delta \leq 1/3$$

$$\frac{4}{1 + \delta} \geq 3 \implies \delta \leq 1/3$$

$$\frac{4\delta}{1 + \delta} \geq 1 \implies \delta \geq 1/3.$$

De este modo, tit-for-tat es un equilibrio perfecto si y solo si $\delta = 1/3$.

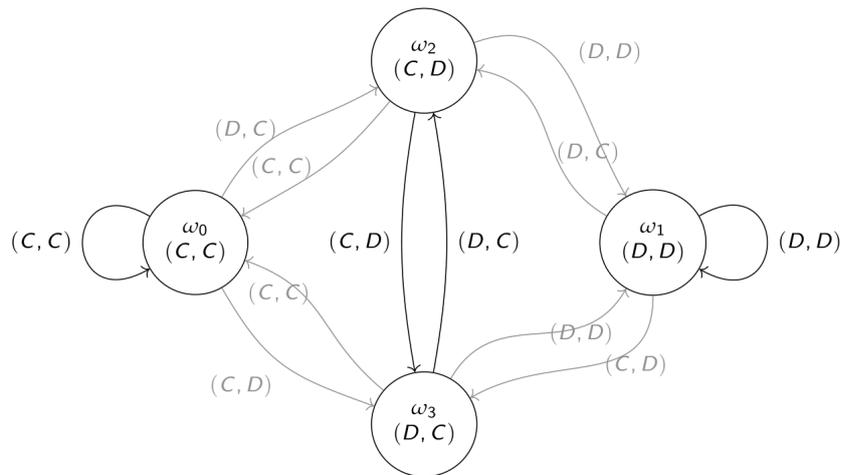


Figura 7.4 Tit for tat, autómata, sin desviaciones dobles.

7.3. Enfoque del minmax

El rombo a continuación constituye el conjunto factible (mediante secuencias de acciones cuando el factor de descuento se acerca a uno, o mediante una lotería pública para un factor de descuento fijo).

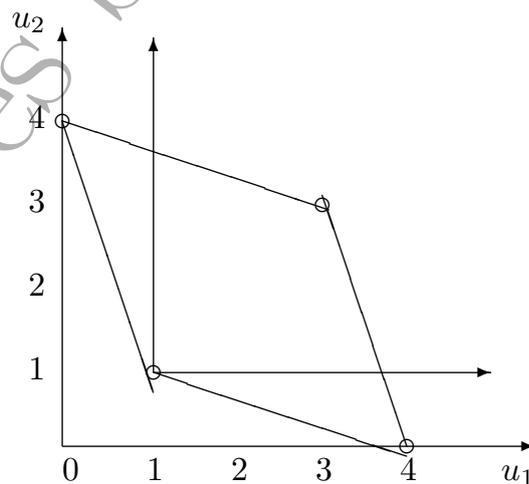


Figura 7.5 Conjunto factible.

El área sobre $(1, 1)$ es el área **individualmente racional**, pues $(1, 1)$ es el **minimax**, donde cada jugador hace lo mejor posible si el otro minimiza los pagos del primero. Véase el anexo **B**. En un equilibrio de Nash, los jugadores no pueden obtener menos que el minmax. De modo converso, cuando $\delta \rightarrow 1$, toda el área sobre $(1, 1)$ puede alcanzarse como pago en equilibrio perfecto (por el teorema de Folk).

Definición 7.3.1. El **pago minimax** del jugador i en el juego $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es el pago mínimo que los demás jugadores pueden imponerle:

$$v_i \equiv \min_{\sigma_{-i} \in A_{-i}} \max_{\sigma_i \in A_i} u_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) = \max_{\sigma_i \in \Delta(A_i)} \min_{\sigma_{-i} \in \Delta(A_{-i})} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}). \quad (7.3)$$

Observación 7.3.2. La igualdad en (7.3) se demuestra usando el teorema de separación de conjuntos convexos en el anexo **B**. Alternativamente, es fácil ver que:

$$\underline{v}_i = \min_{\sigma_{-i}} \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \min_{\sigma_{-i}} u(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = \bar{w}_i.$$

Luego, supongamos que $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Entonces,

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= \max_{\sigma_i} u(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \\ u_{-i}(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= \max_{\sigma_{-i}^*} u_{-i}(\sigma_i^*, \sigma_{-i}). \end{aligned}$$

Como el juego es de suma cero,

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = -u_{-i}(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -u_{-i}(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= \max_{\sigma_{-i}} \{-u_{-i}(\sigma_i^*, \sigma_{-i})\} \\ u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \min_{\sigma_{-i}} \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) &\leq \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \\ u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &\leq \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \leq \max_{\sigma_i} \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\underline{v}_i \leq \bar{w}_i$, con lo cual concluimos.

Definición 7.3.3. Un perfil de pagos w en G es **individualmente racional** si $w_i \geq v_i$ para todo $i \in N$ (estrictamente si $w_i > v_i$ para todo $i \in N$). Decimos que $a \in A$ es tal que $u(a)$ es individualmente racional, entonces a es un resultado individualmente racional de G .

Observación 7.3.4. Si p_{-i} resuelve el problema de minimización (7.3), entonces es el peor castigo que los demás jugadores pueden infligir al jugador i en G .

Lema 7.3.5. Todo perfil de pagos correspondiente a un equilibrio de Nash de un juego repetido de G es individualmente racional en G .

Demostración. Si w es un perfil de pagos que no es individualmente racional, entonces existe i tal que $w_i < v_i$. Sea s_i la estrategia dada por la mejor respuesta estática luego de cada historia $s_i(h) = b_i(s_{-i}(h))$. Como $b_i(s_{-i}(h)) \geq v_i$, para todo perfil s_{-i} de estrategias de los demás, s_i garantiza un pago mayor o igual a v_i . Entonces w no puede ser un pago de equilibrio de Nash pues i gana desviándose a s_i . \square

Observación 7.3.6. A fortiori, todo perfil de pagos de equilibrio perfecto en los subjuegos es individualmente racional.

Teorema 7.3.7. Teorema de Folk a la Nash. Sea w un pago estrictamente individualmente racional de G . Existe un $\underline{\delta} \in (0, 1)$ tal que w es un perfil de pagos de Nash del juego repetido de G para cualquier descuento $\delta \geq \underline{\delta}$.

Demostración. Dado que w es estrictamente individualmente racional, existe una lotería pública sobre perfiles de acciones $a \in A$ tal que $\mathbb{E}[u(a)] = w$. Consideremos una estrategia en la que todos los jugadores siguen esa lotería en cada periodo. Si algún jugador i se desvía, los demás juegan a partir del siguiente periodo un perfil que le garantiza a i su valor minimax \underline{v}_i para siempre. El valor de cooperar para el jugador i es $V_i^{\text{coop}} = w_i$. Si i se desvía, recibe como mucho $(1 - \delta)d_i + \delta \cdot \underline{v}_i$, donde d_i es su pago máximo posible en el juego de etapa. Para que no convenga desviarse se requiere:

$$w_i \geq (1 - \delta)d_i + \delta \cdot \underline{v}_i.$$

Como $w_i > \underline{v}_i$, esta desigualdad se satisface para todo δ suficientemente cercano a 1. Así, existe $\underline{\delta} \in (0, 1)$ tal que para todo $\delta \geq \underline{\delta}$, ningún jugador tiene incentivos a desviarse, y el perfil de pagos w es sostenible como equilibrio de Nash. \square

Observación 7.3.8. En dilema del prisionero todo pago estrictamente individualmente racional es un pago de Nash para un juego repetido con δ suficientemente grande. Más aun, en este caso no hace falta que sea estrictamente racional: En el dilema del prisionero, pago minimax de cada quien se alcanza en un mismo perfil, y es un equilibrio estático de Nash, esto permite un resultado muy fuerte.

Observación 7.3.9. Equilibrios perfectos en los subjuegos mediante códigos penales. Todo resultado de un equilibrio perfecto en los subjuegos (EPS) puede ser implementado mediante estrategias que castigan a quien se desvía con el peor EPS disponible para ese jugador. Estas estrategias funcionan de la siguiente manera:

- Si un jugador i se desvía del plan de equilibrio, los demás jugadores responden ejecutando el peor EPS posible contra i desde ese momento en adelante.
- Si durante el castigo, otro jugador deja de castigar a i , entonces este nuevo jugador pasa a ser castigado con su propio castigo correspondiente (el peor EPS contra él).
- Si el jugador originalmente castigado vuelve a desviarse durante el castigo, el castigo se reinicia desde cero.
- Estos castigos dependen únicamente de la identidad del jugador que desvió primero, no de la historia completa del juego.

El conjunto de castigos preestablecidos para cada jugador se denomina **código penal**. Este código especifica qué castigo aplicar a cada jugador en caso de desviación y permite implementar perfiles de pago como EPS en juegos repetidos con monitoreo perfecto.

Teorema 7.3.10. Principio de una sola desviación. Un perfil de estrategias σ es un equilibrio perfecto en los subjuegos (EPS) si y sólo si no existe ninguna desviación ventajosa de una sola vez para ningún jugador en ninguna historia.

Definición 7.3.11. Desviación de una sola vez. Una desviación de una sola vez para el jugador i respecto de una estrategia σ_i es una estrategia $\hat{\sigma}_i$ tal que existe una única historia finita \tilde{h} en la que $\hat{\sigma}_i(\tilde{h}) \neq \sigma_i(\tilde{h})$, y $\hat{\sigma}_i(h) = \sigma_i(h)$ para toda otra historia $h \neq \tilde{h}$.

Proposición 7.3.12. Dada una estrategia fija σ_{-i} para los demás jugadores, una desviación de una sola vez $\hat{\sigma}_i$ es ventajosa si:

$$U_i(\hat{\sigma}_i|\tilde{h}, \sigma_{-i}|\tilde{h}) > U_i(\sigma_i|\tilde{h}, \sigma_{-i}|\tilde{h}).$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que σ es un equilibrio perfecto en los subjuegos. Entonces, por definición, para toda historia \tilde{h} y todo jugador i , la estrategia σ_i debe ser óptima en el juego a partir de \tilde{h} dado σ_{-i} . Por tanto, cualquier desviación, incluida una desviación de una sola vez, no puede mejorar el pago de i en el subjuego iniciado en \tilde{h} .

(\Leftarrow) Supongamos ahora que no existen desviaciones ventajosas de una sola vez, pero que σ no es un equilibrio perfecto en los subjuegos. Entonces, existe alguna historia \tilde{h} y algún jugador i tal que existe una estrategia $\tilde{\sigma}_i$ con:

$$U_i(\tilde{\sigma}_i|\tilde{h}, \sigma_{-i}|\tilde{h}) > U_i(\sigma_i|\tilde{h}, \sigma_{-i}|\tilde{h}).$$

Como los pagos son descontados, existe un entero T suficientemente grande tal que seguir $\tilde{\sigma}_i$ por T periodos después de \tilde{h} , y luego volver a σ_i , proporciona un pago estrictamente mayor que seguir σ_i desde el principio. Formalmente, definimos la estrategia:

$$\hat{\sigma}_i^{(T)}(h) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_i(h), & \text{si } h \text{ ocurre en los primeros } T \text{ periodos tras } \tilde{h}, \\ \sigma_i(h), & \text{en adelante.} \end{cases}$$

Por inducción hacia atrás, existe algún primer periodo en que la desviación de $\tilde{\sigma}_i$ es estrictamente mejor que seguir σ_i . Esto implica que hay una única historia h^* tal que modificar la acción prescrita por σ_i en h^* mejora el pago esperado, es decir, existe una desviación ventajosa de una sola vez, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, σ debe ser un equilibrio perfecto en los subjuegos. \square

7.4. Perfiles de estrategias como automatas

En esta sección establecemos de forma general el enfoque de perfiles de estrategias utilizando autómatas finitos. Como vimos en los ejemplos 7.2.7, 7.2.14, y 7.2.16, este

enfoque permite representar de manera estructurada estrategias en juegos repetidos, facilitando el estudio de sus propiedades de equilibrio.

Definición 7.4.1. Un **autómata en estrategias mixtas** es una tupla $(\Omega, \omega^0, f, \tau)$ compuesta por los siguientes elementos:

- un conjunto finito de *estados* Ω ,
- un estado *inicial* $\omega^0 \in \Omega$,
- una *función de recomendación* $f : \Omega \rightarrow \otimes_i \Delta A_i$, que asigna a cada estado un perfil mixto de acciones,
- una *función de transición* $\tau : \Omega \times A \rightarrow \Omega$, que indica el estado siguiente dado el estado actual y el perfil de acciones jugado.

Si $f(\omega)$ es una lotería degenerada (es decir, un perfil puro de acciones), denotamos directamente por $f(\omega)$ el perfil. Si no es degenerada, usamos $f^\omega(a)$ para indicar la probabilidad asignada al perfil $a \in A$, cumpliendo que $\sum_{a \in A} f^\omega(a) = 1$.

Definición 7.4.2. El perfil de estrategias inducido por el autómata $(\Omega, \omega^0, f, \tau)$ es un equilibrio perfecto en los subjuegos si, para todo estado ω accesible desde ω^0 , el autómata $(\Omega, \omega, f, \tau)$ constituye un equilibrio de Nash del juego repetido.

Observación 7.4.3. Usando el *principio de una sola desviación*, basta verificar que en cada estado accesible ω las recomendaciones $f(\omega)$ son mejores respuestas, considerando como pago de continuación $V_i(\tau(\omega, a))$ en caso de que se juegue a en dicho estado.

Definición 7.4.4. La **función valor** del jugador i en un estado ω es:

- En estrategias puras:

$$V_i(\omega) = (1 - \delta) \cdot u_i(f(\omega)) + \delta \cdot V_i(\tau(\omega, f(\omega))).$$

- En estrategias mixtas:

$$V_i(\omega) = (1 - \delta) \sum_{a \in A} u_i(a) f^\omega(a) + \delta \sum_{a \in A} V_i(\tau(\omega, a)) f^\omega(a).$$

Proposición 7.4.5. Un perfil de estrategias inducido por un autómata es:

- un equilibrio de Nash si para todo ω en la senda de equilibrio, seguir $f(\omega)$ es una mejor respuesta dado el valor futuro $V_i(\tau(\omega, a))$;
- un equilibrio perfecto en los subjuegos si esto ocurre para todo ω accesible desde ω^0 .

7.5. Aplicaciones

En esta sección vamos a estudiar las aplicaciones de los juegos repetidos. Se sigue el capítulo 6 de [Mailath and Samuelson \(2006\)](#).

7.5.1. Guerra de precios de Rotemberg-Saloner

Consideramos un mercado con n firmas que producen un bien homogéneo. En cada periodo, juegan un juego extensivo repetido donde la naturaleza escoge primero un estado $s \in S$ y se les revela a las firmas. Los estados son independientes y la probabilidad de sortear el estado s es $q(s)$.

Luego de observar los estados, las firmas escogen simultáneamente precios p_1, \dots, p_n . Así, la cantidad demandada es

$$s - \min_{1 \leq i \leq n} p_i.$$

El juego estático tiene un único equilibrio de Nash donde cada firma fija $p = 0$. En contraste, fijar el precio monopólico $p = s/2$, que resulta de maximizar $(s - p)p$, provee un beneficio de $(s/2)^2$. Así, es más lucrativo coludir cuando la demanda es alta, pero también, es más lucrativo desviarse.

Asumimos que el factor de descuento δ es el mismo para todas las firmas. Vamos a considerar el equilibrio más colusivo, en el que las firmas fijan $p(s) \leq s/2$. Si denotamos v^* el valor del pago esperado de dicha estrategia:

$$v^* = \frac{1}{n} \sum_{\hat{s} \in S} p(\hat{s})(\hat{s} - p(\hat{s}))q(\hat{s}), \quad (7.4)$$

entonces una condición necesaria y suficiente para que el perfil de estrategias sea un equilibrio es

$$\frac{1}{n}(1 - \delta)p(s)(s - p(s)) + \delta v^* \geq (1 - \delta)p(s)(s - p(s)), \quad \forall s \in S. \quad (7.5)$$

La ecuación 7.5 asegura que la firma prefiere el precio $p(s)$ que desviarse a un precio infinitesimalmente menor (se toma el supremo del lado derecho).

Nos interesa entonces $p(s)$ que maximiza \hat{v} sujeto a (7.4) y (7.5). Para δ suficientemente grande, se maximiza en $p(s) = s/2$. Esto sale de las CPO. ¿Qué sucede si δ no es tan alto? Podemos re-escribir (7.5) como sigue:

$$\frac{n\delta v^*}{(n-1)(1-\delta)} \geq p(s)(s - p(s)). \quad (7.6)$$

Viendo a la ecuación (7.6) con igualdad como una ecuación cuadrática en p , como las raíces del polinomio aumentan conforme s aumenta, existe $\hat{s} < \max_{s \in S} s$ tal que para $s > \hat{s}$, $p(s)$ es la menor raíz de

$$sp(s) - p(s)^2 - \frac{n\delta v^*}{(n-1)(1-\delta)} = 0.$$

Y, en caso $s \leq \bar{s}$, entonces $p(s) = s/2$. Se sigue que para $s > \bar{s}$, $p(s)$ es decreciente en s , dando una colusión contra-cíclica para *estados altos*.

Observación 7.5.1. La raíz mayor es mayor a $s/2$, el precio de monopolio, y no es sostenible.

Los shocks de demanda se suponen independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) a lo largo del tiempo. Esta independencia implica que las trayectorias futuras del equilibrio son independientes del valor actual del shock de demanda, lo cual simplifica la restricción de incentivos. No obstante, este supuesto entra en tensión con la interpretación del modelo como una descripción de guerras de precios en expansiones económicas o cambios en las políticas de precios a lo largo del ciclo económico. Es más realista suponer que los shocks de demanda exhiben cierta persistencia. Si esta persistencia es lo suficientemente fuerte, la colusión puede dejar de ser contracíclica. Aunque sigue siendo especialmente rentable desviarse del acuerdo colusivo cuando la demanda es alta, en ese caso también lo son los beneficios de continuar con la colusión, haciendo más costosa la desviación. Para ilustrarlo, se presenta un ejemplo con dos

empresas. La demanda puede ser alta ($s = 2$) o baja ($s = 1$), y el factor de descuento es $\delta = 11/20$.

- Con demanda baja, el precio colusivo es $1/2$ y cada firma gana $1/8$.
- Con demanda alta, el precio colusivo es 1 , y cada firma gana $1/2$.

En un equilibrio colusivo con shocks independientes y equiprobables:

- En estado de baja demanda, se fija precio $1/2$.
- En estado de alta demanda, se fija un precio \tilde{p} tal que se satisface la restricción de incentivos:

$$\sup_{p < \tilde{p}} (1 - \delta)p(2 - p) \leq (1 - \delta) \cdot \frac{1}{2}\tilde{p}(2 - \tilde{p}) + \delta \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\tilde{p}(2 - \tilde{p}) \right)$$

Resolviendo esta desigualdad se obtiene $\tilde{p} = 0,22$.

Esto implica que la colusión es (nuevamente) contracíclica: los precios son más bajos en el estado de alta demanda, ya que los incentivos a desviarse son mayores y solo se pueden disuadir haciendo que la colusión sea menos rentable. Ahora bien, si el estado sigue un proceso de Markov:

- El estado en t es igual al de $t-1$ con probabilidad $1-\varphi$, y cambia con probabilidad φ .
- Cuando φ es pequeño (alta persistencia), los valores de continuación se estabilizan en:
 - $1/8$ si la demanda es baja,
 - $1/2$ si la demanda es alta.

Las restricciones de incentivo se vuelven:

$$\sup_{p < 1/2} (1 - \delta)p(1 - p) \leq 1/8, \quad \sup_{p < 1} (1 - \delta)p(2 - p) \leq 1/2.$$

Estas se satisfacen si y solo si $\delta \geq 1/2$. Como $\delta = 11/20$, existe un $\varphi^* > 0$ tal que, si $\varphi \leq \varphi^*$, existe un equilibrio en el que se fija el precio monopolístico miope en cada

periodo. Así, con shocks persistentes, la colusión puede volverse procíclica, ya que los precios y beneficios son más altos cuando la demanda es alta. Los juegos repetidos permiten estudiar patrones de colusión a lo largo del ciclo económico, pero los resultados dependen críticamente de la naturaleza del mismo.

7.5.2. Consistencia temporal: modelo de Stanley Fischer

En este modelo, inspirado en Stanley Fischer (Fischer, 1980), se analiza el problema de la consistencia temporal de las políticas fiscales en un entorno con dos tipos de agentes: un gobierno benevolente y un continuo de consumidores/inversores anónimos y pequeños. Este continuo se comporta como un agente miope que juega siempre su mejor respuesta, lo cual es equivalente a tener un jugador 2 *miope* en un juego repetido.

- ▶ Cada consumidor posee una unidad del bien de consumo que puede destinar a consumo c o a inversión en capital $1 - c$. El capital rinde $R(1 - c)$, donde $R > 1$.
- ▶ El gobierno impone un impuesto t , recauda $tR(1 - c)$ y produce $G = \gamma tR(1 - c)$ unidades del bien público, con $R - 1 < \gamma < R$.
- ▶ La utilidad del consumidor viene dada por:

$$u(c, t) = c + (1 - t)R(1 - c) + 2\sqrt{G} = c + (1 - t)R(1 - c) + 2\sqrt{\gamma tR(1 - c)}.$$

Aunque el gobierno es benevolente, se genera un conflicto con los consumidores debido a su comportamiento miope. En equilibrio de Nash, los consumidores anticipan impuestos altos y consumen todo ($c = 1$), lo cual impide la inversión y la provisión eficiente de bienes públicos. En efecto, cada consumidor maximiza

$$c + (1 - t)R(1 - c),$$

Entonces, la mejor respuesta es

$$c = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \frac{R-1}{R} \\ 1, & \text{si } t > \frac{R-1}{R} \\ \{0, 1\} & \text{si } t = \frac{R-1}{R} \end{cases}.$$

Cada consumidor escoge c . Luego, la mejor respuesta del gobierno es escoger t tal que maximiza $u(c, t)$. Aplicando CPO se obtiene

$$t = \min \left\{ \frac{\gamma}{R(1-c)}, 1 \right\}.$$

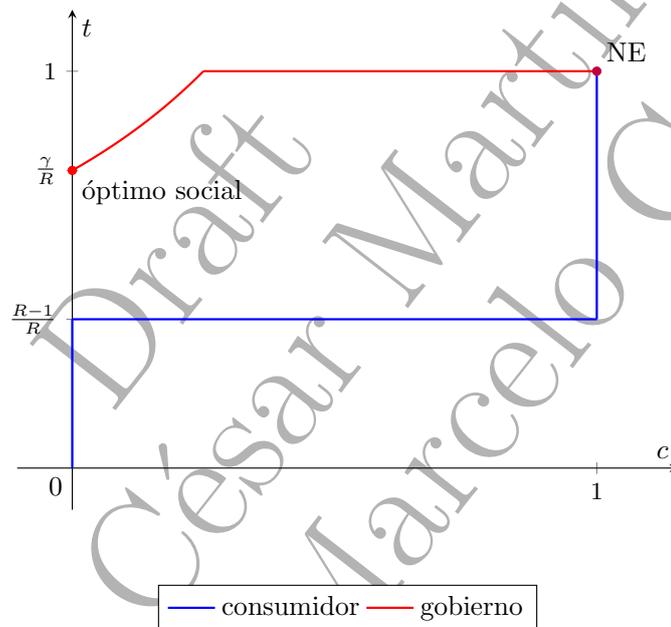


Figura 7.6 Curvas de mejor respuesta del consumidor y del gobierno. El equilibrio de Nash es $(c = 1, t = 1)$, mientras que el óptimo social es $(c = 0, t = \gamma/R)$.

Óptimos y restricciones:

- ▶ El **óptimo social** se alcanza en $c = 0$ y $t = \gamma/R$, pero este punto no es un equilibrio porque el consumidor no está jugando una mejor respuesta.
- ▶ El **óptimo restringido**, sujeto a racionalidad del consumidor, es $c = 0$ y $t^* = (R - 1)/R$, ya que este es el valor máximo de t compatible con que el consumidor quiera invertir todo.

Para implementar el óptimo restringido, el gobierno necesita un mecanismo de compromiso creíble. Este se introduce mediante un juego infinitamente repetido.

Estrategia dinámica con reputación:

- ▶ Se define un juego repetido con estados ω_L (cooperación) y ω_H (castigo).

- ▶ Recomendaciones:

$$f(\omega_L) = (0, t^*)$$

$$f(\omega_H) = (1, 1).$$

- ▶ Transición de estados:

$$\tau(\omega, (t, c)) = \begin{cases} \omega_L & \text{si } \omega = \omega_L \text{ y } t = t^* \\ \omega_H & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- ▶ Valores de continuación:

$$V(\omega_L) = 1 + 2\sqrt{\gamma(R-1)}$$

$$V(\omega_H) = 1.$$

- ▶ La desviación más atractiva para el gobierno es $t = \gamma/R$, que da $u(0, \gamma/R) = \gamma + R$. No nos fijamos en desviaciones de los consumidores pues son un continuo.

- ▶ La estrategia es sostenible si:

$$(1 - \delta)(\gamma + R) + \delta \cdot 1 \leq 1 + 2\sqrt{\gamma(R-1)}.$$

- ▶ Esto se cumple si:

$$\delta \geq \tilde{\delta} \equiv 1 - \frac{2\sqrt{\gamma(R-1)}}{\gamma + R - 1}.$$

- ▶ Como $\tilde{\delta} \in (0,1)$, existe un margen para que la reputación discipline al gobierno.

Proposición 7.5.2. Existe un valor $\delta \in (0, 1)$ tal que, para todo $\delta \in [\tilde{\delta}, 1)$, el perfil de estrategias $(\Omega, \omega_L, f, \tau)$ representado en la figura 7.7 constituye un equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido, en el que se implementa la asignación eficiente restringida en todos los periodos.

Demostración. Dado $c = 0$, la desviación más rentable por parte del gobierno consiste en aplicar la tasa impositiva óptima de corto plazo $t = \gamma/R$. El incremento de utilidad derivado de esta desviación es:

$$\underbrace{\left[R \left(1 - \frac{\gamma}{R} \right) + 2\gamma \right]}_{u(c=0, \gamma/R)} - \underbrace{\left[R \left(1 - \frac{R-1}{R} \right) + 2\sqrt{\gamma(R-1)} \right]}_{u(c=0, t=(R-1)/R)} \equiv \Delta > 0.$$

La estrategia presentada en la figura 7.7 es un equilibrio si la ganancia presente por desviarse no supera la pérdida futura de valor de continuación, es decir, si se cumple:

$$(1 - \delta)\Delta \leq \delta(\bar{v}_1 - v_1),$$

donde v_1 es el valor minmax del gobierno. Esta desigualdad se cumple para todo δ suficientemente cercano a 1. □

- Siguiendo a Chari y Kehoe, los *planes sostenibles* son autómatas que resuelven problemas de inconsistencia temporal.
- En entornos más complejos (como modelos con decisiones intertemporales o deuda soberana), ya no se trata de juegos repetidos con estructura fija, sino de juegos dinámicos.
- A pesar de esto, la intuición permanece: el gobierno (jugador paciente) enfrenta un continuo de consumidores (miopes), lo cual permite sostener resultados eficientes mediante reputación o mecanismos dinámicos.

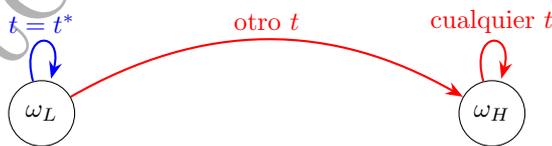


Figura 7.7 Autómata que sostiene un plan sostenible con reputación.

7.5.3. Reparto de riesgos

Esta sección se basa en el trabajo de Kocherlakota (1996) y Ligon et al. (2002), también analizado en Ljungqvist and Sargent (2004) (capítulos 19 y 20) y Mailath

and Samuelson (2006) (capítulo 6). Condicionando en el consumo agregado, el nivel de consumo individual está positivamente correlacionado con el nivel actual y pasado del ingreso, la gente consume más cuando gana más, y cuando ha ganado más en el pasado. Esto suena natural, los ricos consumen más que los pobres, pero el consumo de tanto ricos como pobres es sensitivo al ingreso pasado y presente. Es natural suponer que tanto ricos y pobres son adversos al riesgo. Pero entonces, ¿Por qué no se aseguran completamente contra fluctuaciones del ingreso? Dos posibles respuestas son:

- ▶ Monitoreo imperfecto: puede ser difícil asegurar un agente contra choques de ingresos si y sólo este observa los choques.
- ▶ Compromiso imperfecto: los agentes pueden *renegar* del contrato si no les conviene cumplirlo.

El modelo es el siguiente:

- ▶ Dos agentes, 1 y 2 viven períodos $t = 0, 1, \dots$
- ▶ En cada período, las dotaciones son $e(1) = (\bar{y}, \underline{y})$ o $e(2) = (\underline{y}, \bar{y})$ con $\bar{y} = 1 - \underline{y} \in (1/2, 1)$. Ambos estados $s \in \{1, 2\}$ son igualmente probables.
- ▶ Después de observar $e(i)$, los consumidores efectúan transferencia no negativas al otro y consumen $c_1(i), c_2(i)$, evaluando de acuerdo a una función cóncava y estrictamente creciente $u(\cdot)$ y factor de descuento δ .
- ▶ Una historia ex ante en período t es una secuencia de dotaciones y consumos previos

$$h^t = ((e^0, c_1^0, c_2^0), \dots, (e^{t-1}, c_1^{t-1}, c_2^{t-1})).$$
- ▶ Una historia ex post en el período t es una combinación historia ex con $\tilde{h}^t = (h^t, e^t)$.
- ▶ Una estrategia es $\sigma_i : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow [0, y_i]$ especificando transferencia al otro agente, siendo \tilde{H}^t el conjunto de historias ex post hasta t .

Definición 7.5.3. Un perfil de estrategias exhibe un seguro completo si todos los períodos el agente 1 consume c y el agente 2 consume $1 - c$.

La pregunta que nos hacemos es ¿cuándo es el seguro completo simétrico $c = 1/2$ sostenible como un equilibrio perfecto en los subjuegos?

Observación 7.5.4. En autarquía (minmax),

$$\underline{v} = \frac{1}{2}u(\underline{y}) + \frac{1}{2}u(\bar{y}). \tag{7.7}$$

Esto cumple el rol de la *amenaza*.

De este modo, según (7.7), la compatibilidad de incentivos impone

$$u(1/2) \geq (1 - \delta)u(\bar{y}) + \delta\underline{v}$$

O sea,

$$\delta \geq \delta^* = 2 \left(\frac{u(\bar{y}) - u(1/2)}{u(\bar{y}) - u(\underline{y})} \right) \in (0, 1).$$

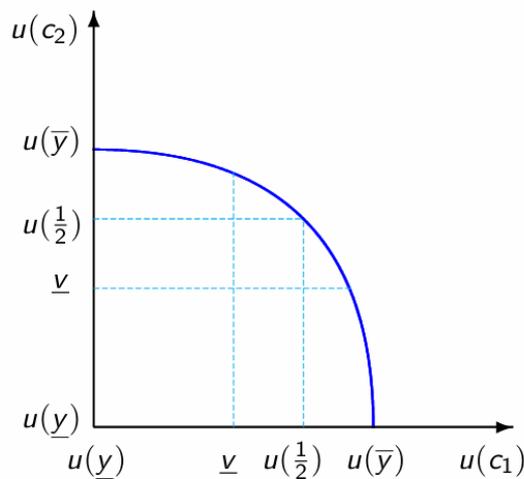


Figura 7.8 Seguro completo.

Ahora supongamos que $\delta < \delta^*$ es imposible. ¿Será factible un seguro parcial? Considere $(\bar{y} - \epsilon, \underline{y} + \epsilon)$ en estado $e(1)$ y $(\underline{y} + \epsilon, \bar{y} - \epsilon)$ en $e(2)$, con $0 < \epsilon < (\bar{y} - \underline{y})/2$. En este caso, la compatibilidad de incentivos provee

$$(1 - \delta)u(\bar{y}) + \delta\underline{v} \leq (1 - \delta)u(\bar{y} - \epsilon) + \delta \left(\frac{u(\bar{y} - \epsilon) + u(\underline{y} + \epsilon)}{2} \right).$$

En este caso,

$$\delta \geq \delta(\epsilon) = 2 \left(\frac{u(\bar{y}) - u(\bar{y} - \epsilon)}{u(\bar{y}) - u(\bar{y} - \epsilon) + u(\underline{y} + \epsilon) - u(\underline{y})} \right).$$

Notar que $\delta(\epsilon)$ es creciente en ϵ y $\delta(0) = \frac{2}{1 + \frac{u'(\underline{y})}{u'(\bar{y})}} < \delta^* = \delta\left(\frac{\bar{y} - \underline{y}}{2}\right)$. $\delta \geq \delta[\epsilon]$ implica que la asignación parcialmente asegurada es sostenible como equilibrio perfecto en los subjuegos. Así, incluso si $2/(1 + u'(\underline{y})/u'(\bar{y})) < \delta < \delta^*$, puede existir un seguro parcial simétrico compatible con incentivos: $(\bar{y} - \epsilon^*, \underline{y} + \epsilon^*)$ en el estado 1, $(\underline{y} + \epsilon, \bar{y} - \epsilon)$ en el estado 2, con ϵ^* tal que $\delta[\epsilon^*] = \delta$. De hecho, podemos escribir el pago del mejor equilibrio perfecto simétrico como

$$U(\hat{\sigma}) = (1/2)\bar{u} + (1/2)\underline{u},$$

donde

$$\bar{u} = (1 - \delta)u(\bar{y} - \epsilon^*) + \delta U(\hat{\sigma})$$

$$\underline{u} = (1 - \delta)u(\underline{y} + \epsilon^*) + \delta U(\hat{\sigma}).$$

En el límite, cuando $\delta \downarrow \delta(0)$, se requiere que $\epsilon \downarrow 0$, lo que implica que la asignación converge al perfil sin seguro (\bar{y}, \underline{y}) , con utilidad promedio convergiendo a \underline{u} .

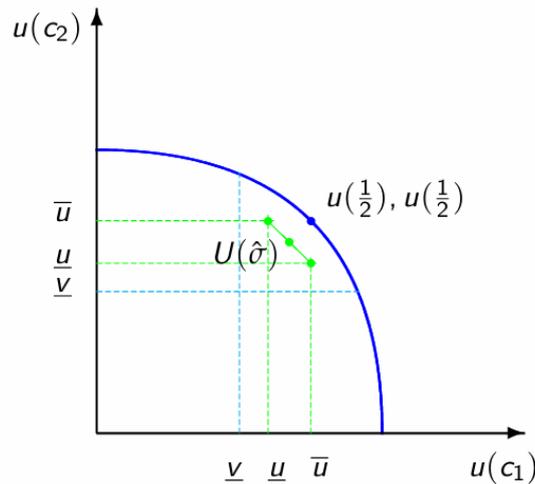


Figura 7.9 Seguro parcial.

Observación 7.5.5. Supongamos ahora que hay tres estados: $e(1)$ y $e(2)$ como antes, y un nuevo estado $e(m)$ con distribución $e(m) = (1/2, 1/2)$. El valor de minimax bajo

autarquía es

$$\underline{v} = \frac{1}{3} (u(\bar{y}) + u(\underline{y}) + u(1/2)).$$

Con seguro completo, no hay transferencias en $e(m)$, y en los estados $e(i)$ el agente i transfiere

$$\epsilon = \frac{\bar{y} - \underline{y}}{2}$$

al otro agente. Supongamos que los agentes no son suficientemente pacientes para sostener el seguro completo, pero sí pueden sostener un seguro parcial. Definimos:

$$\bar{u} \equiv (1 - \delta)u(\bar{y} - \epsilon) + \delta \cdot \frac{1}{3} (u(\bar{y} - \epsilon) + u(\underline{y} + \epsilon) + u(1/2)).$$

Como antes, la condición de compatibilidad de incentivos es:

$$\bar{u} = (1 - \delta)u(\bar{y}) + \delta \underline{v},$$

la cual permite encontrar el mejor valor posible de ϵ consistente con incentivos.

Pero ahora podemos mejorar este esquema utilizando la historia pasada. Definimos una historia como de *categoría i* si el último estado distinto de $e(m)$ fue $e(i)$, es decir, el agente i fue el último en realizar transferencias. En una historia de categoría i , en el estado neutral $e(m)$ se asigna consumo diferenciado: el agente i consume $1/2 + \zeta$ y el otro agente $1/2 - \zeta$, con $\zeta > 0$ suficientemente pequeño para no violar las restricciones de incentivos. Este ajuste incrementa el valor de continuación del agente i en el estado $e(i)$, y por tanto, su disposición a transferir al otro agente. Así, el agente que recibe ingreso alto en un período no solo tiene consumo alto en ese período, sino que también espera mayor consumo en el futuro, fortaleciendo la sostenibilidad del seguro parcial dinámico.

Capítulo 8

Juegos extensivos con información imperfecta

8.1. Introducción

En este capítulo se estudia los juegos extensivos con información imperfecta (acción oculta). Las referencias principales son los capítulos 11 y 12 de [Osborne and Rubinstein \(1994\)](#) y el capítulo 9 de [Fudenberg and Tirole \(1991\)](#).

Definición 8.1.1. Juego extensivo con información imperfecta.

- $N = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de jugadores,
- H secuencias o historias, $Z \subset H$ las historias terminales,
- función de jugador $P : H \setminus Z \rightrightarrows N \cup \{c\}$, (aunque podemos acomodar el juego siempre de forma que $P : H \setminus Z \rightarrow N \cup \{c\}$) asignando a cada historia no terminal un conjunto de jugadores, donde $P(h) \ni c$ significa que la Naturaleza juega (azar),
- una función $f_c(\cdot|h)$ de probabilidad sobre $A(h)$ para cada h tal que $P(h) = c$,
- una partición de información \mathcal{I}_i de $\{h \in H : P(h) = i\}$ tal que $A(h) = A(h')$ si h y h' están en el mismo elemento de la partición $I_i \in \mathcal{I}_i$,
- función de pagos $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 8.1.2. Las historias en el mismo conjunto de información $I_i \in \mathcal{I}_i$ son indistinguibles para el jugador i . No significa necesariamente que no haya podido observar toda la secuencia de historias. De manera más general, podemos decir, en términos de medibilidad, que el σ -álgebra es el mismo (similar a las filtraciones con los procesos estocásticos (Gall, 2022)).

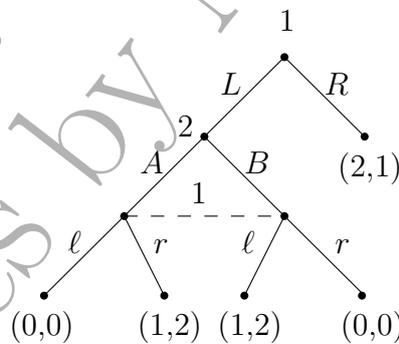
Ahora bien, si el jugador i llega a una historia $h \in I_i$, sabe que está en una historia contenida en I_i pero no sabe cuál. La condición

$$h \in I_i \text{ y } h' \in I_i \Rightarrow A(h) = A(h')$$

refleja la idea de que el jugador no puede identificar la historia solo observando sus acciones disponibles.

Observación 8.1.3. Los juegos extensivos con información completa son un caso especial en el que los elementos de \mathcal{I}_i son las singletons $\{h\}$ para todos los h tales que $P(h) = i$.

Ejemplo 8.1.4. Consideremos el siguiente juego:



Entonces, las particiones de información son:

$$\mathcal{I}_1 = \{\{\emptyset\}, \{LA, LB\}\}, \quad \mathcal{I}_2 = \{\{L\}\}.$$

Definición 8.1.5. Estrategia. Una estrategia para el jugador $i \in N$ en un juego extensivo $\langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i), (u_i) \rangle$ es una función que asigna una acción en $A(I_i)$ para cada $I_i \in \mathcal{I}_i$.

Definición 8.1.6. Estrategia de comportamiento. Una estrategia de comportamiento para el jugador $i \in N$ en un juego extensivo $\langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i), (u_i) \rangle$ es una colección $(\beta_i(I_i))$ de distribuciones independientes donde $\beta_i(I_i)$ tiene soporte en $A(I_i)$.

Ejemplo 8.1.7. En el ejemplo 8.1.4, una estrategia para 1 es $s_1 \in \{L, R\} \times \{\ell, r\}$, una estrategia pura para 2 es $s_2 \in \{A, B\}$.

Ejemplo 8.1.8. Una estrategia de comportamiento para 1 es $\sigma_1 = (\mathbb{P}(L), \mathbb{P}(\ell)) \in [0, 1]^2$, una estrategia de comportamiento para 2 es $\sigma_2 = \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

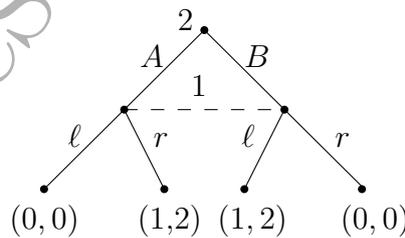
Definición 8.1.9. Un equilibrio de Nash es un perfil σ^* de estrategias de comportamiento tal que para todo $i \in N$,

$$u_i(O(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)) \geq u_i(O(\sigma_i, \sigma_{-i}^*))$$

para cualquier estrategia σ_i del jugador i .

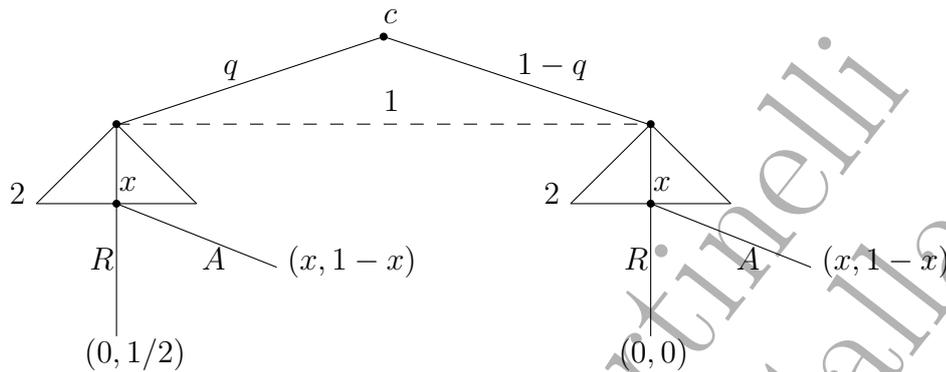
Ejemplo 8.1.10. En el ejemplo 8.1.4, estos son todos los equilibrios de Nash en estrategias de comportamiento: $\sigma_1 = (0, p)$, $\sigma_2 = q$ para todo $p \in [0, 1]$, $q \in [0, 1]$. Sin embargo, muchos son increíbles; por ejemplo, si el jugador 1 elige L y $q < 1/2$, entonces la mejor respuesta del jugador 1 es $p = 1$... podemos imponer perfección en subjuegos.

Ejemplo 8.1.11. En el ejemplo 8.1.4, el único sub-juego es



Esto es equivalente a un juego simultáneo entre 1 y 2, los equilibrios de Nash en el subjuego son (A, r) y (B, ℓ) , equilibrio de Nash en estrategias mixtas $(1/2, 1/2)$.

Ejemplo 8.1.12. Juego del ultimátum revisitado. Con probabilidad q , la jugadora 2 es “rencorosa” y no aceptará menos de $1/2$, mientras que con probabilidad $1 - q$, la jugadora 2 es “normal” y acepta 0 o más.



Consideramos tres subjuegos: el juego original, los subjuegos que comienzan después de que la Naturaleza realice su tirada y $J1$ escoja (pues $J2$ conoce entonces toda la historia). En el último movimiento, $J2$ de tipo rencoroso acepta la oferta x si y solo si $x \leq \frac{1}{2}$, mientras que $J2$ normal acepta cualquier $x \in [0, 1]$. En concreto, de acuerdo con las reglas del backward induction, el jugador 1 elegirá

$$x^* = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } q > \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } q < \frac{1}{2}, \\ \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}, & \text{si } q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

El pago esperado del jugador 1 viene dado por (varía con q), x para $x \in [0, 1/2]$ y $(1 - q)x$ para $x > 1/2$ hasta $x = 1$:

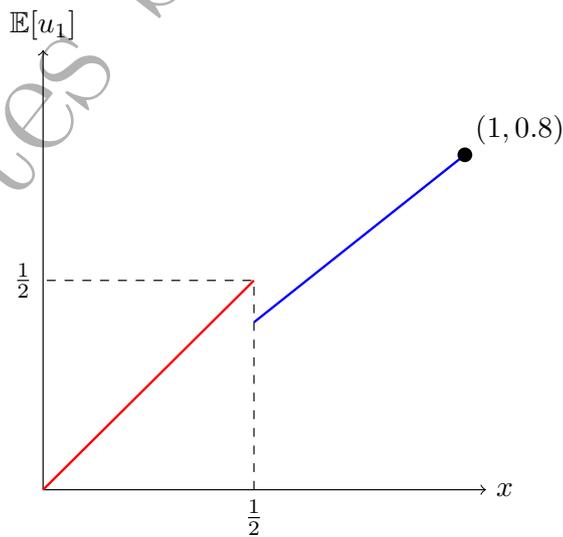
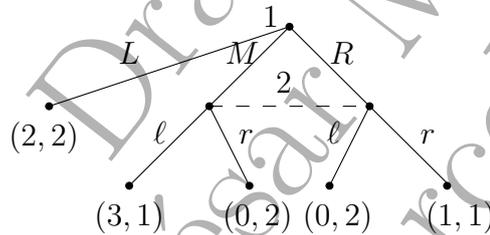


Figura 8.1 $q = 0,2$.

Si $q > \frac{1}{2}$, el jugador 1 ofrece $x = \frac{1}{2}$ y la jugadora 2 (sea normal o rencorosa) acepta. Si $q < \frac{1}{2}$, el jugador 1 ofrece $x = 1$; la jugadora normal acepta, pero la rencorosa rechaza. Finalmente, los pay-offs en equilibrio (valor esperado) son

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \text{si } q > \frac{1}{2}, \\ \left(1 - q, \frac{q}{2}\right), & \text{si } q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observación 8.1.13. La perfección en subjuegos puede no ser suficiente. La perfección en los subjuegos no siempre es suficiente para predecir en juegos extensivos de información imperfecta; por ejemplo, consideremos:



(L, r) es un equilibrio de Nash ... al no haber subjuegos propios, es un EPS, ... pero si el jugador 2 se encuentra en el conjunto de información $\{M, R\}$, necesita formar expectativas después de un evento de probabilidad cero. En $\{M, R\}$ no hay un EN en estrategias (de comportamiento) puras.

8.2. Equilibrio secuencial

Definición 8.2.1 (Equilibrio secuencial, [Kreps and Wilson \(1982b\)](#)). Sea

$$G = \langle N, H, P, f_c, \{I_i\}, \{\succeq_i\} \rangle$$

un juego extensivo con recuerdo perfecto¹, donde cada conjunto de información contiene un número finito de historias. Una **evaluación** (*assessment*) es un par (β, μ) tal que:

- $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$ es un perfil de estrategias de comportamiento (behavioral strategies).
- μ es un *sistema de creencias*, es decir, una función que asigna a cada conjunto de información I una medida de probabilidad $\mu(I)$ sobre las historias en I .

¹ Los jugadores recuerdan, distinguen qué acciones escogen.

La evaluación (β, μ) es un **equilibrio secuencial** (definición 8.2.2) si se cumplen:

1. **Racionalidad secuencial:** Para cada jugador i y cada conjunto de información $I_i \in \mathcal{I}_i$, la estrategia β_i maximiza la utilidad esperada de i dada la distribución de resultados $O(\beta, \mu \mid I_i)$.
2. **Consistencia:** Existen secuencias de estrategias $\beta^k \rightarrow \beta$ ($\beta_j^k \neq 0$) tales que las creencias μ^k inducidas por la regla de Bayes con base en β^k convergen a μ como límite.

Definición 8.2.2 (Racionalidad secuencial). En el juego extensivo con recuerdo perfecto $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, \{I_i\}, \{\Sigma_i\} \rangle$, donde (β, μ) es una evaluación. Denotemos por $O((\beta, \mu) \mid I)$ la distribución sobre historias terminales condicionada a que el juego haya llegado al conjunto de información I . Si $h^* = (a_1, \dots, a_K)$ es un historial terminal y $h = (a_1, \dots, a_L) \in I$ es la subhistoria de longitud $L < K$, entonces

$$O((\beta, \mu) \mid I)(h^*) = \begin{cases} 0, & \text{si no hay subhistoria de } h^* \text{ en } I, \\ \mu(I)(h) \prod_{k=L}^{K-1} \beta_{P(h_{1:k})}(a_{k+1} \mid h_{1:k}), & \text{si } h \in I \text{ es subhistoria de } h^*. \end{cases}$$

- El caso 0 indica que la historia terminal h^* es incompatible con I , por lo que su probabilidad condicionada es cero.
- En caso contrario, $h = (a_1, \dots, a_L)$ es la subhistoria exacta en I que precede a las acciones posteriores.
- El factor $\mu(I)(h)$ representa la creencia de que el juego se encuentre en la historia h dentro de I .
- La productoria $\prod_{k=L}^{K-1} \beta_{P(h_{1:k})}(a_{k+1} \mid h_{1:k})$ multiplica las probabilidades de cada acción a_{k+1} según las estrategias de comportamiento, asumiendo independencia condicional gracias al recuerdo perfecto. Se descompone en:
 - ▶ β : la estrategia de comportamiento (behavioral strategy) del jugador.
 - ▶ $P(h_{1:k})$: el jugador que toma la decisión en el nodo de información que sigue a la historia parcial $h_{1:k}$.
 - ▶ a_{k+1} : la acción elegida en ese nodo.

- ▶ la barra “|” indica condicionamiento, es decir, dado que la historia hasta ese punto es exactamente $h_{1:k}$.
- ▶ Cada término en la productoria es la probabilidad que ese jugador asigna a la acción a_{k+1} en el contexto de la historia $h_{1:k}$.
- En conjunto, la expresión cuantifica la probabilidad de alcanzar h^* partiendo de I : primero se selecciona h con probabilidad $\mu(I)(h)$; luego se realiza la secuencia de acciones hasta h^* .

Decimos que la evaluación (β, μ) es secuencialmente racional si, para cada jugador i y cada conjunto de información $I_i \in \mathcal{I}_i$, la estrategia $\beta_i(\cdot | I_i)$ maximiza su utilidad esperada condicionada a I_i :

$$\beta_i(\cdot | I_i) \in \arg \max_{\sigma_i} \left\{ \sum_{h^*} u_i(h^*) O((\beta_{-i}, \sigma_i), \mu | I_i)(h^*) \right\}.$$

Ejemplo 8.2.3. Considérese el juego de la observación 8.1.13, y las estrategias para los los jugadores:

- Jugador 1 elige L con probabilidad $1 - 2\epsilon$, M con ϵ y R con ϵ (con $\epsilon > 0$ pequeño).
- Jugador 2, en su conjunto de información $\{M, R\}$, adopta la estrategia pura r .

Definamos el sistema de creencias μ_ϵ en el conjunto de información del jugador 2 por

$$\mu_\epsilon(M) = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(R)} = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon} = \frac{1}{2} \quad \mu_\epsilon(R) = \frac{1}{2}.$$

Al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, el perfil $(\beta^\epsilon, \mu_\epsilon)$ converge a:

- $\beta^0 = (\mathbb{P}(L) = 1, \mathbb{P}(M) = 0, \mathbb{P}(R) = 0; r)$,
- $\mu^0(M) = \mu^0(R) = \frac{1}{2}$.

Demostremos que (β^0, μ^0) es un equilibrio secuencial:

1. **Consistencia:** Por construcción μ_ϵ se obtiene aplicando la regla de Bayes² a β^ϵ y, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, converge a μ^0 .

²El sistema de creencias μ en un juego extensivo con recuerdo perfecto es estructuralmente consistente si, para cada conjunto de información I , existe un perfil de estrategias β tal que I se alcanza con probabilidad positiva bajo β y $\mu(I)$ se deriva de β mediante la regla de Bayes.

2. Racionalidad secuencial:

- En el nodo inicial, L garantiza un pago $(2, 2)$ y domina cualquier otra mezcla, por lo que es óptimo.
- En el conjunto de información de jugador 2, con $\mu^0(M) = \mu^0(R) = 1/2$, aceptar r da utilidad esperada

$$\frac{1}{2} u_2(r | M) + \frac{1}{2} u_2(r | R) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2},$$

mientras rechazar (o jugar l) transporta al menos uno de $(0,0)$ o $(1,1)$ con probabilidad 1, con expectativa menor.

Por lo tanto, (β^0, μ^0) es un equilibrio secuencial del juego.

Observación 8.2.4. Se tiene la siguiente inclusión (con las definiciones que hemos adoptado):

Equilibrio de Nash \supseteq Equilibrio Perfecto en Subjuegos \supseteq Equilibrios secuenciales.

8.3. Juegos extensivos con información incompleta

Definición 8.3.1. Un juego bayesiano extensivo con acciones observables pero información incompleta es

- ▶ un juego en forma extensiva $\langle N, H, P \rangle$,
- ▶ un conjunto de tipos Θ_i para cada jugador,
- ▶ una distribución p sobre los perfiles de tipos $\otimes_{i \in N} \Theta_i = \Theta$,
- ▶ una función de pagos $u_i(\theta, h)$, $\theta \in \Theta$, para cada jugador que depende de la historia y del perfil de tipos realizado.

El azar (c) determina el perfil de tipos, cada jugador aprende su tipo en privado, cada jugador observa todas las jugadas anteriores (excepto la acción inicial de la suerte) y actualiza creencias sobre los tipos de los otros jugadores: $p(\theta_{-i}|\theta)$.

Ejemplo 8.3.2. En el juego del ultimátum del ejemplo 8.1.12, se tiene:

- $\Theta_1 = \{normal\}$,
- $\Theta_2 = \{normal, rencorosa\}$.

Definición 8.3.3 (Equilibrio bayesiano perfecto, Harris and Townsend (1981)). Un EBP en un juego con acciones observables es un perfil $(\sigma, \mu) = (\sigma_i(\theta_i), (\mu_i(h))_{i \in N})$ que asigna a cada jugador una estrategia y creencias sobre los tipos de otros jugadores para cada historia observable, tales que

- las estrategias son óptimas para cada tipo dadas las creencias (racionalidad secuencial),
- las creencias iniciales son correctas ($\mu(\emptyset) = p$),
- las creencias están determinadas solo por las acciones,
- actualización bayesiana de creencias.

Observación 8.3.4. En un juego bayesiano con acciones observables, cada equilibrio secuencial es un EBP.

Observación 8.3.5. Creencias fuera del equilibrio:

- Ausencia de restricciones bayesianas fuera de ruta: Cuando, bajo el perfil de estrategias de equilibrio, un conjunto de información I se alcanza con probabilidad cero, la regla de Bayes no define $\mu(I)$. Por tanto, el EBP no impone ninguna restricción sobre $\mu(I)$ en esos I : el jugador puede *creer cualquier cosa* acerca del nodo en I , siempre que esas creencias sean coherentes con la regla de Bayes en los nodos que sí tienen probabilidad positiva.
- Elección de peores creencias para sostener el equilibrio: Para evitar que un jugador quiera desviarse, asignamos en cada información fuera de ruta las creencias $\mu(I)$ que hagan más costosa o inútil cualquier desviación. Estas *peores creencias* minimizan la valoración esperada de cualquier acción distinta a la estrategia de equilibrio, quitando incentivos a desviarse.

8.3.1. Juegos de señalización

Un juego de señalización es un juego bayesiano con acciones observables en el cual hay varios tipos del jugador 1 (el emisor) y un solo tipo del jugador 2 (el receptor). El juego consiste en que el jugador 1 observa su tipo $\theta_1 \in \Theta_1$, elige una acción m o “mensaje”, el jugador 2 recibe el mensaje (aunque no observa θ_1) y elige una acción $a \in A_2$. La recompensa o pago de cada jugador depende de θ_1 , el mensaje m y la acción a . A continuación una definición general para el caso de juegos de señalización con dos jugadores.

Definición 8.3.6. Un equilibrio Bayesiano perfecto en un juego de señalización es un perfil de estrategias $\{s_1(\theta), s_2(a_1)\}$, en conjunto con unas creencias $\mu_2(\theta|a_1)$, tal que:³

1. La estrategia del jugador 1 resuelve dada la estrategia del jugador 2:

$$s_1(\theta) \in \operatorname{argmax}_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, s_2(a_1), \theta), \forall \theta \in \Theta.$$

2. El jugador 2 actualiza sus creencias según la regla de Bayes: si a_1 se juega con probabilidad positiva,

$$\mu_2(\theta|a_1) = \frac{\mathbb{P}\{s_1(\theta) = a_1\}p(\theta)}{\sum_{\theta' \in \Theta} \mathbb{P}\{s_1(\theta') = a_1\}p(\theta')}.$$

3. Finalmente, la estrategia del jugador 2 es óptima dada sus creencias:

$$s_2(a_1) \in \operatorname{argmax}_{a_2 \in A_2} \left\{ \sum_{\theta \in \Theta} u_2(a_1, a_2, \theta) \mu_2(\theta|a_1) \right\}, \forall a_1 \in A_1.$$

En este contexto, el artículo seminal [Spence \(1973\)](#) es clave al introducir este tipo de juegos para resolver interrogantes al nivel del mercado laboral. Por ejemplo, ¿Por qué contratan a doctores en física en Wall Street? Consideremos la siguiente situación:

- El trabajador (emisor) conoce su talento θ_1 pero el empleador (receptor) no.
- El empleador paga al trabajador el valor esperado de θ_1 ; y por ejemplo, tiene una función de pagos $-(w - \theta_1)^2$. O sea, resuelve

$$\max_{w(\theta) \geq 0} - \int_{\Theta} (w(\theta) - \theta)^2 f(\theta|e) d\theta.$$

Esto conlleva a $w(\theta) = \mathbb{E}[\theta|e]$.

³ a_1 se interpreta como m .

- ▶ El mensaje del trabajador es el nivel educativo e y la recompensa es $w - e/\theta$ (la educación es menos costosa para un trabajador talentoso).
- ▶ Se interpreta como: La educación en el modelo es inútil salvo como una señal costosa.
- ▶ El trabajador tiene un talento $\theta_1 = \theta^H$ o $\theta_1 = \theta^L < \theta^H$, con probabilidades p^H y p^L respectivamente; estrategias puras $e(\theta_H) = e^H$ y $e(\theta_L) = e^L$.

Definición 8.3.7. Decimos que un equilibrio es **agrupador** si $e^H = e^L$. Decimos que un equilibrio es **separador** si $e^H \neq e^L$.

La pregunta inmediata es ¿Qué valores de e^H y e^L son consistentes con cada tipo de equilibrio?

1. Equilibrio agrupador: Ambos tipos eligen el mismo $e^H = e^L = e^*$ y el empleador paga $w = \mathbb{E}[\theta] = p_H\theta_H + p_L\theta_L$. Sea $w(e) = \mathbb{E}(\theta|e)$ el salario pagado por el empleador. Para evitar desviaciones, debemos tener

$$\underbrace{w^* - e^*/\theta^K}_{\text{Pago bajo agrupación.}} \geq \underbrace{\mathbb{E}[\theta|e] - e/\theta^K}_{\text{Desvío.}}$$

para $K = H, L$. Por ejemplo, podemos tener $\mathbb{E}[\theta|e] = \theta^L$ para $e \neq e^*$ o $\mathbb{E}[\theta|e^L] = \theta^L$ para $e < e^*$ y $\mathbb{E}[\theta|e^H] = \theta] = p^H\theta^H + p^L\theta^L$ para todo $e \geq e^*$. Siempre es posible desviarse a $e = 0$ con pago $w(0) = \theta^L$. Luego,

$$p^H\theta^H + p^L\theta^L - e^*/\theta^L \geq \theta^L \Leftrightarrow e^* \leq \theta^L p^H(\theta^H - \theta^L) = \hat{e}.$$

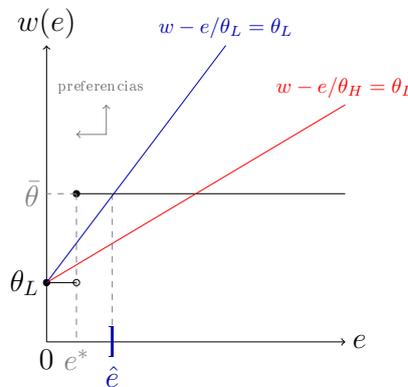


Figura 8.2 Equilibrio agrupador donde $\bar{\theta} = p_H\theta^H + p_L\theta^L$.

La figura 8.2 nos muestra $w(e)$ para las creencias donde se asegura monotónia. La azul roja representa una curva de indiferencia para el jugador de tipo bajo, que pasa por θ^L . La curva roja corresponde a una curva de indiferencia para el jugador de tipo alto que pasa por θ^L . El jugador de tipo bajo es indiferente en \hat{e} entre educarse o no hacerlo. Respecto al de tipo alto, la curva roja interseca $w = \bar{\theta}$ en un $e > \hat{e}$ (lo cual es consistente con el hecho que estaría dispuesto a educarse más).

- Equilibrio separador: si ambos tipos eligen niveles diferentes, debemos tener $e^L = 0$. Entonces, $w(0) = \theta^L$ y $w(e^H) = \theta^H$. Para evitar desviaciones debemos tener

$$\begin{aligned} \theta^L &\geq \theta^H - e^H / \theta^L \\ \theta^H - e^H / \theta^H &\geq \theta^L. \end{aligned}$$

Definiendo $\underline{e} = \theta^L(\theta^H - \theta^L)$ y $\bar{e} = \theta^H(\theta^H - \theta^L)$, la condición de equilibrio es

$$\underline{e} \leq e^H \leq \bar{e}.$$

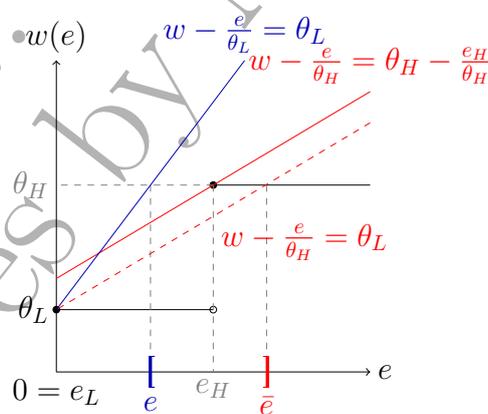


Figura 8.3 Equilibrio separador.

En la figura 8.3, la curva azul representa la curva de indiferencia del jugador de tipo bajo. El nivel de utilidad alcanzado es θ^L . En cuanto a las curvas rojas, corresponden a las del jugador de tipo alto. En la puntiaguda, es indiferente entre $e = 0$ y $e = \bar{e}$. Para $\underline{e} \leq e^* < \bar{e}$, el jugador de tipo alto mejora.

Observación 8.3.8. En un equilibrio bayesiano perfecto con recuerdo perfecto, las creencias fuera de la ruta no están restringidas por la regla de Bayes y pueden fijarse de modo que cualquier desviación sea atribuida de forma natural al tipo que más la beneficie. Al aplicar este criterio de “prueba de comunicación” al pooling eliminamos cualquier equilibrio en que ambos tipos elijan el mismo nivel de señal e^* , pues existe una desviación que sería rentable solo para el tipo alto cuando se le atribuye a él. Entre los posibles equilibrios separadores—con $e^L = 0$ y cualquier e^H —solo permanece el más barato, aquel que satisface

$$\theta^H - \frac{e^H}{\theta^L} = \theta^L \implies e^H = \theta^L(\theta^H - \theta^L),$$

ya que solo en ese punto la desviación atribuida naturalmente al tipo bajo lo deja indiferente, y por tanto ningún otro nivel de e^H supera el test de comunicación.

Observación 8.3.9. En un pooling equilibrium todos los tipos eligen el mismo nivel de educación e^* , de modo que el empleador paga siempre $w^* = p^H\theta^H + p^L\theta^L$. El mejor pooling, desde el punto de vista del bienestar agregado, es aquel que minimiza el coste total de señal sin inducir incentivos a desviarse, es decir

$$e^* = \theta^L p^H (\theta^H - \theta^L).$$

En un separating equilibrium los tipos eligen señales distintas ($e^L = 0$ y e^H), de modo que el salario es θ^L al uno y θ^H al otro. El equilibrio separador que maximiza el bienestar neto—producción menos costes de educación—se obtiene al elegir

$$e^H = \theta^L (\theta^H - \theta^L),$$

que es el mínimo e^H que satisface la restricción de no desviación del tipo bajo. Si la educación sólo sirve como señal (no aumenta la productividad real), entonces todo el coste de e es un desperdicio de recursos. Ni el mejor pooling ni el mejor separating mejoran la producción agregada; por tanto, la educación en este modelo es un mal necesario solo para disipar la asimetría de información.

8.3.2. Paradoja de la cadena comercial

El análisis en esta subsección es similar a las variaciones de [Kreps and Wilson \(1982a\)](#) y [Milgrom and Roberts \(1982\)](#) sobre la paradoja de la cadena de Selten. El

modelo en cuestión puede modelarse como un juego bayesiano extensivo con jugadas observables: $\langle \Gamma, (\Theta_i), (p_i), (u_i) \rangle$. La idea central es la existencia de diferentes tipos de cadenas comerciales y la incertidumbre es sobre la función de pagos de la cadena (permite que gane o pierda reputación). También se introducen distintos tipos de competidores potenciales.

- ▶ Una cadena comercial (jugador 0), tiene sucursales en las ciudades $k = K, \dots, 1$ (de atrás para adelante).
- ▶ En cada ciudad k hay un competidor comercial, el jugador k .
- ▶ Al inicio de cada periodo $k \in \{K, \dots, 1\}$, el potencial competidor k decide si entra a competir o se queda fuera.
- ▶ Luego de que el competidor k decide si entra o no, la cadena comercial decide si lucha o coopera con el competidor.
- ▶ La cadena comercial decide antes de que el competidor siguiente $k - 1$ decida a su vez si entrar o no.

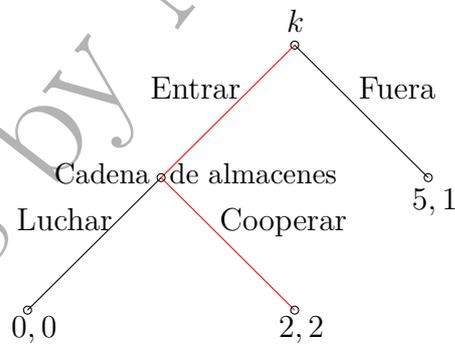


Figura 8.4 Subjuego representativo en la ciudad k .

Tenemos que $h_k \in H_k = \{F, DL, DC\}$ y $h \in H = \{\emptyset, H_1, H_1 \times H_2, \dots, H_1 \times \dots \times H_K\}$.

- ▶ Los tipos de la cadena comercial: $\Theta_0 = \{N, D\}$ (“normal” o “dura”).
- ▶ La cadena regular prefiere que competidor quede fuera a cooperar, y cooperar a luchar; cadena dura prefiere luchar a cooperar siempre.

- ▶ Hay una creencia previa: $\mathbb{P}(\theta_0 = R) = 1 - p = 1 - p^K$.
- ▶ El objetivo es construir un equilibrio en el que si algún periodo $k > 1$ se observa que hay entrada y cooperación, $p_{k'} = 0$ para todo $k' < k$.

Consideramos los siguientes pagos:

- ▶ Para la cadena comercial:

$$u_0(h|R) = \sum_{k=0}^K U(h_k),$$

donde

$$U(h_k) = \begin{cases} a & \text{si } h_k = F \\ 0 & \text{si } h_k = DC \\ -1 & \text{si } h_k = DL \end{cases}$$

- ▶ Respecto al competidor en ciudad k :

$$u_k(h|R) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k = F \\ b & \text{si } h_k = DC \\ -1 & \text{si } h_k = DL \end{cases}$$

- ▶ Para coincidir con la descripción del modelo, debemos tener $a > 1, b > 0$. Esto es, el tipo duro de cadena siempre lucha y tipo duro de competidor siempre entra.

El EBP se va a encontrar por inducción hacia atrás.

La reputación de una cadena al inicio del período k es la probabilidad con la que competidores creen que es dura: $p_k = \mathbb{P}\{D|h_K, \dots, k_k\}$. Luego, en el periodo 1, la cadena normal coopera siempre, de modo que el competidor no entra si

$$(1 - p_1)b + p_1(-1) < 0 \Leftrightarrow p_1 > \frac{b}{b + 1} = \bar{p}.$$

En el periodo 2, para la cadena normal:

- $p_2 > \bar{p}$: lucha si hay entrada pues $-1 + a > 0$, en el periodo 2 la firma competidora no entrar.

- $p_2 < \bar{p}$: no puede luchar en equilibrio con probabilidad 1 (pues sin cambio en las creencias, habría entrada en el periodo 1) ni con probabilidad cero (pues luchar llevaría a $p_1 = 1$ pero pérdida en el periodo 2).
- Se sigue que si $p_2 < \bar{p}$, la cadena normal lucha con probabilidad positiva x en el periodo 2, que hace indiferente al entrante en el periodo 1, y el competidor en el periodo 1 entra con probabilidad y que hace indiferente a la cadena normal.
- Por la regla de Bayes:

$$p_1(L) = \frac{\mathbb{P}\{\text{Lucha}|\text{Dura}\}\mathbb{P}\{\text{Dura}\}}{\mathbb{P}\{\text{Lucha}\}} = \frac{1 \cdot p_2}{p_2 + (1 - p_2)x} = \bar{p} \implies x = \frac{p_2}{(1 - p_2)b}$$

- La probabilidad total de que la cadena luche es

$$1 \cdot p_2 + (1 - p_2)x = \frac{p_2(b + 1)}{b} = \frac{p_2}{\bar{p}}$$
- El competidor normal no entra si $-p_2/\bar{p} + (1 - p_2/\bar{p})b < 0$, o equivalentemente $p_2 > \bar{p}^2$, y entra si $p_2 < \bar{p}^2$.

El procedimiento/análisis es similar en el periodo 3: si $p_3 > \bar{p}^2$, la cadena normal lucha con probabilidad 1 en el periodo 3 y el competidor queda fuera. Si $p_3 < \bar{p}^2$, entonces la cadena normal lucha con probabilidad positiva de modo que $p_2(L) = \bar{p}^2$, etc. De manera más general, en la senda de equilibrio, el competidor queda fuera en todo periodo desde K hasta k^* tal que $p < \bar{p}^{k^*}$. En los primeros $K - k^*$ periodos, la cadena normal obtiene un pago a por periodo, y en equilibrio $p_k = p$ (la reputación no cambia en esos periodos). En los últimos k^* periodos, el competidor entra con probabilidad positiva y la normal se acomoda con probabilidad positiva. Si pelea, su reputación aumenta, y si acomoda cae a cero.

En la figura 8.5, la línea continua azul representa la reputación e la cadena en la senda de equilibrio hasta el período k^* , las líneas de trazos diferentes sendas de la reputación con probabilidad positiva.

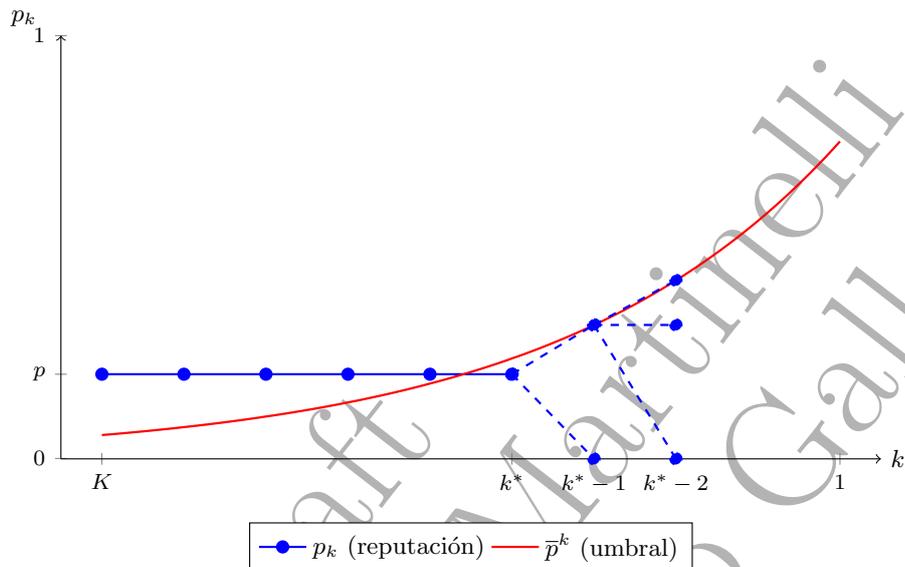


Figura 8.5 Reputación.

Conforme $K \rightarrow \infty$, el pago promedio de la cadena normal converge a a para p fijo. La reputación es un sustituto de la habilidad de comprometerse.

Ejemplo 8.3.10. Valor de la firma. Un importante resultado en finanzas es el Teorema de Modigliani-Miller (Modigliani and Miller, 1958), el cual sostiene que el valor de una empresa es independiente de su estructura financiera. Es decir, no importa si se financia con deuda o con capital propio: su valor será el mismo. Sin embargo, este teorema descansa sobre supuestos fuertes: (1) no hay impuestos, (2) no existen costos de quiebra y (3) todos los agentes poseen la misma información.

Cuando se relaja el supuesto (3) y se introduce *información asimétrica*, el teorema puede dejar de cumplirse. Ross (1977) desarrolla un modelo en el cual el gerente de la empresa conoce el verdadero potencial de ingresos, pero los inversionistas no. En este contexto, la *deuda* puede funcionar como una señal del tipo de la firma.

Supongamos que los ingresos $x \sim \mathcal{U}(0, k)$, donde k es conocido solo por el gerente. La firma escoge un nivel observable de deuda D , y si los ingresos no alcanzan para cubrirla ($x < D$), incurre en un costo de quiebra L . El objetivo del gerente es maximizar

$$u(D) = (1 - \gamma)V_0(D) + \gamma \cdot \mathbb{E}[V_1(D)],$$

donde V_0 es el valor percibido en el momento inicial, y V_1 el valor esperado en el futuro.

Así,

$$\begin{aligned} u(D) &= (1 - \gamma)V_0(D) + \gamma \left(\int_D^k \frac{x}{k} dx + \int_0^D (x - L) \frac{1}{k} dx \right) \\ &= (1 - \gamma)V_0(D) + \gamma \left(\frac{1}{2k}(k^2 - D^2) + \frac{1}{2k}(D^2) - \frac{L}{k}D \right) \\ &= (1 - \gamma)V_0(D) + \gamma \left(\frac{k}{2} - \frac{D \cdot L}{k} \right). \end{aligned}$$

Se supone que hay dos tipos de empresas:

$$k^G > k^B,$$

y que el tipo k^G (empresa buena) tiene menor costo esperado de quiebra, por lo que puede soportar más deuda. La idea central es que si el tipo k^G elige una deuda positiva $D^G > 0$ mientras que el tipo k^B elige $D^B = 0$, los inversionistas podrán inferir correctamente el tipo a partir del nivel de deuda observado. En tal caso, se dice que existe un equilibrio separador.

Para que este equilibrio sea creíble, se deben cumplir dos condiciones de incentivos:

- El tipo k^B no debe querer imitar al tipo k^G :

$$(1 - \gamma) \cdot \frac{k^G}{2} + \gamma \left(\frac{k^B}{2} - \frac{D^G \cdot L}{k^B} \right) < \frac{k^B}{2}.$$

- El tipo k^G debe preferir emitir deuda y no ser confundido con el tipo k^B :

$$(1 - \gamma) \cdot \frac{k^G}{2} + \gamma \left(\frac{k^G}{2} - \frac{D^G \cdot L}{k^G} \right) > (1 - \gamma) \cdot \frac{k^B}{2} + \gamma \left(\frac{k^G}{2} - L \right).$$

Estas condiciones generan una cota inferior y superior para D^G , es decir, existe un rango de deuda que solo los tipos buenos pueden utilizar como señal creíble de su tipo:

$$D^G \in \left(\frac{(1 - \gamma)(k^G - k^B)}{2L\gamma} \cdot k^B, \frac{(1 - \gamma)(k^G - k^B)}{2L\gamma} \cdot k^G \right).$$

Este resultado ilustra cómo, en presencia de información asimétrica y costos de quiebra, el endeudamiento puede ser una herramienta estratégica para transmitir información privada sobre el valor de la firma.

8.4. Conclusiones

Para introducir información imperfecta en juegos extensivos, incorporamos el concepto de *conjuntos de información*. Estos representan situaciones en las que un jugador debe tomar una decisión sin saber con certeza en qué nodo específico se encuentra dentro del juego, es decir, enfrenta incertidumbre sobre el historial exacto que lo condujo a ese punto. Esta estructura permite modelar juegos en los que los jugadores no observan completamente las acciones pasadas de los demás o desconocen ciertos estados del mundo relevantes para la interacción.

El análisis de este tipo de juegos requiere incorporar de forma explícita cómo evolucionan las creencias de los jugadores sobre aquello que no observan. Conceptos como el *equilibrio secuencial* o el *equilibrio bayesiano perfecto (EBP)* abordan esta dimensión al exigir consistencia entre las estrategias y las creencias: las creencias deben actualizarse mediante la regla de Bayes en los conjuntos de información que se alcanzan con probabilidad positiva, y las estrategias deben ser óptimas dado ese sistema de creencias.

Los juegos extensivos con información imperfecta permiten representar de forma rigurosa situaciones estratégicas con *información asimétrica*, es decir, cuando un jugador conoce su tipo o características privadas mejor que los demás. Dos aplicaciones centrales de estas herramientas son los modelos de señalización y los modelos de construcción de reputación.

En el contexto del mercado laboral, por ejemplo, los trabajadores conocen su propia productividad, pero las firmas no. A través de decisiones observables como el nivel de educación, los trabajadores pueden intentar transmitir señales creíbles de su tipo. Este es el núcleo del modelo de señalización de Spence, donde la educación no necesariamente incrementa la productividad, pero sirve como mecanismo de filtrado si es más costosa para los trabajadores de baja productividad.

Por otro lado, los modelos de reputación capturan escenarios dinámicos en los que una parte con información privada toma acciones observables con el objetivo de influir en la percepción de los demás. Un ejemplo clásico es el de una empresa establecida que enfrenta la amenaza de entrada de competidores ocasionales. Si esta empresa puede

ser de tipo “dura” o “normal”, y entra en una guerra de precios al observar la entrada, podría convencer a futuros entrantes de que es dura, desincentivando así la entrada en períodos posteriores.

Ambos fenómenos —señalización y reputación— muestran que los jugadores actúan no sólo por los pagos inmediatos, sino también por el valor estratégico de la información que generan sus acciones. Las decisiones presentes afectan las creencias futuras de los demás y, por tanto, su comportamiento posterior. Este tipo de razonamiento intertemporal es esencial para entender dinámicas estratégicas en entornos económicos reales.

Una pregunta natural que surge a partir de este análisis es: ¿qué otros fenómenos en economía o ciencias sociales pueden modelarse con las herramientas de juegos extensivos con información imperfecta? Algunos ejemplos incluyen: países que escalan conflictos para señalar determinación a sus adversarios, deudores que pagan a tiempo para mantener su acceso al crédito, elecciones ([Martinelli and Matsui, 2002](#)) o plataformas digitales en las que vendedores nuevos sacrifican ganancias iniciales para construir una reputación. Estos escenarios, entre otros, muestran la potencia del enfoque bayesiano en contextos dinámicos y estratégicos.

Apéndice A

Teoría de la utilidad esperada

La teoría de la utilidad esperada que vamos a exponer en este anexo es la que desarrolló von-Neumann en 1944. Más adelante, Savage introdujo las probabilidades subjetivas en [Savage \(1954\)](#). La teoría de Savage ha tenido su propio desarrollo en la literatura ([Echenique and Saito, 2015](#)), y básicamente trata las probabilidades subjetivas. La teoría de la utilidad esperada también se vio beneficiado del trabajo de los célebres matemáticos John Milnor (medalla fields, 1962) e Israel Herstein ([Herstein and Milnor, 1953](#)). La notación y demostraciones a continuación están basadas en el capítulo 6 de [Mas-Colell et al. \(1995\)](#).

A.1. Preliminares

En teoría de la decisión, consideramos un *espacio de consecuencias* $C = \{1, \dots, N\}$, que representa los posibles resultados de una decisión. Un ejemplo histórico es el desembarco de los Aliados en Normandía, donde la elección de la ubicación fue una lotería estratégica, y el general Patton utilizó un ejército fantasma en Dover para engañar a los alemanes.

Las *loterías* se representan como distribuciones de probabilidad sobre C , es decir, elementos de:

$$L \in \Delta^N = \left\{ p \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i \geq 0 \right\}.$$

Más generalmente, se consideran *loterías compuestas*, donde una lotería se elige aleatoriamente de entre varias posibles:

$$(L_1, \dots, L_K, \alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \Delta^{NK} \times \Delta^K.$$

Cuando $N = 3$, el *simplex* Δ^2 puede visualizarse como un triángulo equilátero en \mathbb{R}^2 . Sus *caras* incluyen los *vértices* (0-células), las *aristas* (1-células) y su interior, que es una 2-célula. Ver figuras A.1 y A.2.

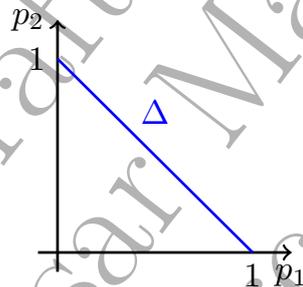


Figura A.1 Simplex en \mathbb{R}^2 .

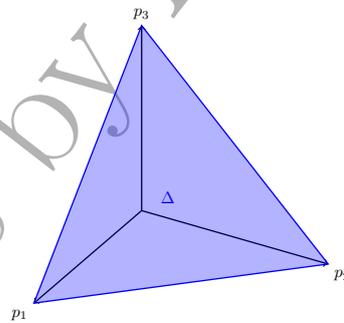


Figura A.2 Simplex en \mathbb{R}^3 .

Geoméricamente, cada punto $L \in \Delta^2$ tiene coordenadas p_i , que pueden interpretarse como la distancia ortogonal a la proyección sobre el lado opuesto en el triángulo. Este hecho motiva el uso de una representación *baricéntrica* en el triángulo de probabilidades.

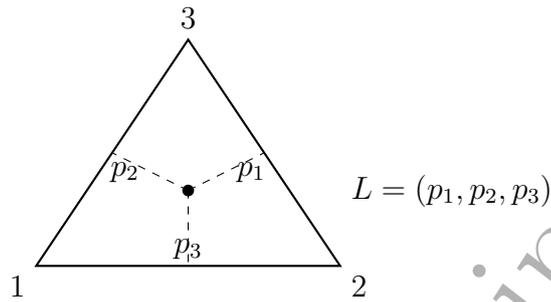


Figura A.3 Representación del simplex de dimensión 2 en coordenadas bariocéntricas.

Matemáticamente, una *lotería compuesta* puede expresarse como:

$$p_n = \sum_{k=1}^K \alpha_k L_k.$$

Esto implica que solo los resultados finales importan, no los medios por los cuales se alcanzan. Sin embargo, este supuesto plantea un dilema: si fuese cierto en todos los contextos, en la toma de decisiones con encuestas podríamos inferir preferencias directamente de los resultados observados, lo cual no siempre es adecuado.

Denotamos por \mathcal{L} el espacio de todas las loterías $\Delta(\mathcal{X})$.

Definición A.1.1. Una preferencia \succeq sobre \mathcal{L} es continua si y solamente si para cualesquiera $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, se cumple que

$$\{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \succeq L''\} \subset [0, 1]$$

$$\{\alpha \in [0, 1] : L'' \succeq \alpha L + (1 - \alpha)L'\} \subset [0, 1]$$

son cerrados en $[0, 1]$ con la topología usual de \mathbb{R} inducida sobre el intervalo $[0, 1]$.

Las preferencias sobre \mathcal{L} son entonces continuas si alteraciones menores en las probabilidades no alteran el orden.

Definición A.1.2. \succeq sobre \mathcal{L} cumple el axioma de independencia si $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in (0, 1)$ se tiene que

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

Definición A.1.3. $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene forma de utilidad esperada si existe $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\forall L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$

$$U(L) = \sum_{n=1}^N p_n u_n.$$

A U^e se le conoce como función de utilidad esperada de von-Neumann-Morgenstern.

Proposición A.1.4. Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una representación por utilidad esperada si y solamente si es lineal. Esto es,

$$U\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U^e(L_k),$$

para cualesquiera $L_1, \dots, L_K \in \mathcal{L}$ y $\alpha_k \geq 0$ tales que $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$.

Demostración. Denotemos por $\delta^n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ a la lotería que le asigna probabilidad 1 al outcome x_n . Entonces, para cualquier $L \in \mathcal{L}$,

$$L = \sum_{n=1}^N p_n \delta^n.$$

Entonces, si U^e es lineal,

$$U(L) = U\left(\sum_{n=1}^N p_n \delta^n\right) = \sum_{n=1}^N U(\delta^n) = \sum_{n=1}^N p_n u_n.$$

Por el contrario, si U tiene la forma de una función de utilidad esperada, dadas las loterías L_1, \dots, L_K , $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ con $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ y $\alpha_k \geq 0$,

$$U\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k\right) = \sum_{n=1}^N u_n \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k p_n^k\right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{n=1}^N u_n p_n^k\right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U^e(L_k).$$

□

Proposición A.1.5. Sea $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ una utilidad de von-Neumann-Morgenstern para \succeq definida sobre \mathcal{L} . Entonces, \tilde{U} es otra función de utilidad de von-Neumann-Morgenstern que representa \succeq si y solo si existen $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Demostración. Sean $\bar{L}, \underline{L} \in \mathcal{L}$ tales que $\bar{L} \succeq L \succeq \underline{L}$ para toda $L \in \mathcal{L}$. La existencia de dichas loterías viene asegurada por el hecho que el simplex es un compacto y $U(\cdot)$

al ser lineal es continua. Si $\bar{L} \sim \underline{L}$, entonces toda función de utilidad es constante y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $\bar{L} \succ \underline{L}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{U}\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k\right) &= \beta U\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k\right) + \gamma \\ &= \beta \left[\sum_{k=1}^K \alpha_k U(L_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\beta U(L_k) + \gamma] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \tilde{U}(L_k). \end{aligned}$$

De este modo, \tilde{U} tiene una forma de utilidad esperada. Ahora bien, sean $\tilde{U}(\cdot)$ y $U(\cdot)$ con forma de utilidad esperada. Veamos que existen $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\tilde{U} = \beta U + \gamma$. Para ello, sea $L \in \mathcal{L}$ cualquiera y $\lambda_L \in [0, 1]$ tal que $U(L) = \lambda_L U(\bar{L}) + (1 - \lambda_L)U(\underline{L})$. De este modo,

$$\lambda_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})}.$$

Como $\lambda_L U(\bar{L}) + (1 - \lambda_L)U(\underline{L}) = U(\lambda_L \bar{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L})$ y $U(\cdot)$ representa a \succeq , $L \sim \lambda_L \bar{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}$. Ahora bien, como \tilde{U} también es lineal,

$$\tilde{U}(L) = \tilde{U}(\lambda_L \bar{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}) = \lambda_L(\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})) + \tilde{U}(\underline{L}).$$

Usando la expresión para λ_L , se deduce que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} \\ \gamma &= \tilde{U}(\underline{L}) - U(\underline{L}) \left[\frac{\tilde{U}(\bar{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} \right]. \end{aligned}$$

□

Ejemplo A.1.6. Considere el juego del ejemplo 2.3.5, donde los pagos estaban dados por:

	Nadal: A	Nadal: M
Federer: A	(0, 1)	(1, 0)
Federer: M	(1, 0)	(0, 1)

Aplicando invarianza lineal (proposición A.1.5), el siguiente juego es equivalente al original

	Nadal: A	Nadal: M
Federer: A	(0, 0)	(500, -1)
Federer: M	(500, -1)	(0, -1)

Note que los pagos de Federer se multiplicaron por $\beta = 500$ y a los de Nadal se les sumó $\gamma = -1$.

A.2. Teorema de la utilidad esperada

El teorema que estamos a punto de demostrar, nos dice que si un agente de decisión tiene preferencias sobre el espacio de loterías que satisfacen la propiedad de continuidad y el axioma de independencia, entonces su preferencia puede ser representada por una función de utilidad esperada U .

Teorema A.2.1. Suponga que una preferencia racional \succeq sobre \mathcal{L} satisface la propiedad de continuidad y el axioma de independencia. Entonces, \succeq admite una representación por función de utilidad esperada. Esto es, podemos asignar números reales u_1, \dots, u_N de manera que para cualesquiera dos loterías $L, L' \in \mathcal{L}$ con $L = (p_1, \dots, p_n)$ y $L' = (p'_1, \dots, p'_n)$,

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N p_n u_n \geq \sum_{n=1}^N p'_n u_n.$$

Demostración. La prueba se divide en varias etapas. Primero, tomamos \bar{L} y \underline{L} tales que $\bar{L} \succeq L \succeq \underline{L}$ para toda $L \in \mathcal{L}$ (tal y como se hizo en la proposición anterior). Si $\bar{L} \sim \underline{L}$, el resultado es inmediato y trivial. Por ende, supongamos que $\bar{L} \succ \underline{L}$.

- Paso 1:** si $L \succ L'$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces $L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ L'$. Esto es consecuencia del axioma de independencia:

$$L = \alpha L + (1 - \alpha)L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ \alpha L' + (1 - \alpha)L' = L'.$$

2. **Paso 2:** sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Entonces $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$ si y solo si $\beta > \alpha$. Escribamos

$$\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} = \gamma\bar{L} + (1 - \gamma)[\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}],$$

con $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \in (0, 1]$. Sabemos que $\bar{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$ por el paso 1. Por ende,

$$\gamma\bar{L} + (1 - \gamma)(\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}) \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}.$$

y por ende $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$. Para la converso, supongamos que $\beta \leq \alpha$. Si son iguales, $\beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L} \sim \alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$. Supongamos entonces que $\beta < \alpha$. Se sigue, por los mismos argumentos, que $\alpha\bar{L} + (1 - \alpha)\underline{L} \succ \beta\bar{L} + (1 - \beta)\underline{L}$.

3. **Paso 3:** para toda $L \in \mathcal{L}$, existe un único α_L tal que $[\alpha_L\bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}] \simeq L$. La existencia es consecuencia de la continuidad y la unicidad del paso 2.
4. La función $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que asigna a L el valor α_L es la que representa a \succeq . En efecto, por el paso 3, dadas $L, L' \in \mathcal{L}$

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha_L\bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \succeq \alpha_{L'}\bar{L} + (1 - \alpha_{L'})\underline{L}.$$

Así, $L \succeq L'$ si y solo si $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$.

5. **Paso 5:** la función de utilidad $U(\cdot)$ que le asigna α_L a $L \in \mathcal{L}$ es lineal, y por ende, tiene la forma de utilidad esperada. Lo que queremos es probar que

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, \beta \in [0, 1] : U(\beta L + (1 - \beta)L') = \beta U(L) + (1 - \beta)U(L').$$

Por definición, $L \sim U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}$ y $L' \sim U(L')\bar{L} + (1 - U(L'))\underline{L}$. Por ende, aplicando dos veces el axioma de independencia,

$$\begin{aligned} \beta L + (1 - \beta)L' &\sim \beta[U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}] + (1 - \beta)L' \\ &\sim \beta[U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L}] + (1 - \beta)[U(L')\bar{L} + (1 - U(L'))\underline{L}]. \end{aligned}$$

Re-agrupando términos,

$$\beta L + (1 - \beta)L' \sim [\beta U(L) + (1 - \beta)U(L')]\bar{L} + (1 - \beta U(L) - (1 - \beta)U(L'))\underline{L}.$$

De este modo, concluimos que

$$U(\beta L + (1 - \beta)L') = \beta U(L) + (1 - \beta)U(L').$$

□

El teorema A.2.1 nos permite concluir que las curvas de indiferencia en el simplex son hiperplanos, rectas paralelas si nos situamos en $N = 3$. Sin pérdida de generalidad, si tomamos 1 como \bar{L} y 2 como \underline{L} , dado $L \in \Delta$, con $3 \not\sim 1$ o 2 ,

$$\exists \alpha_L \in [0, 1] : \alpha_L \bar{L} + (1 - \alpha_L) \underline{L} \simeq L, \forall L \in \mathcal{L}.$$

Una versión de la demostración del teorema A.2.1 se encuentra en (Herstein and Milnor, 1953). En efecto, Milnor y Herstein extienden la secuencia de trabajos Von Neumann and Morgenstern (1944); Marschak (1950); Milnor (1953); Rubín (1953). Esta secuencia responde a la necesidad de considerar espacios de consecuencias infinitos y supuestos menos fuerte desde la perspectiva económica. En el artículo Herstein and Milnor (1953), se establece con detalle los pasos para poder obtener la representación de utilidad esperada, haciendo usos de argumentos básicos de topología general.

A.3. Argumento de Separación

Estas notas quedarían incompletas sin presentar una prueba alternativa al Teorema A.2.1, basada en uno de los resultados más notables del Análisis Convexo: el Teorema de Separación. Seguimos a Gilboa (2009).

Nuevamente vamos a considerar que \mathcal{X} es un conjunto finito. Sin embargo, la extensión al caso infinito pasa por elementos de análisis funcional. Sean $L, L' \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^N$. Por lo tanto, $L - L' \in \mathbb{R}^N$. Considere los conjuntos

$$A = \{L - L' \in \mathbb{R}^N : L \succeq L'\}$$

y

$$B = \{L - L' \in \mathbb{R}^N : L' \succ L\}.$$

Ciertamente, se cumple que $L'' \succeq L'''$ si y solo si $L'' - L''' \in A$. Del mismo modo, $L''' \succ L''$ si y solo si $L'' - L''' \in B$. Esto para cualesquiera $L'', L''' \in \mathcal{L}$. Ahora bien, el

objetivo es probar que tanto A como B son convexos. Esto es consecuencia del axioma de independencia. Supongamos que $L - L', L'' - L''' \in A$ y consideremos para $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha(L - L') + (1 - \alpha)(L'' - L''') = (\alpha L + (1 - \alpha)L'') - (\alpha L' + (1 - \alpha)L''').$$

Entonces, como $L \succeq L'$ y $L'' \succeq L'''$, por el axioma de independencia, aplicados 2 veces,

$$\alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

Así $\alpha(L - L') + (1 - \alpha)(L'' - L''') = (\alpha L + (1 - \alpha)L'') - (\alpha L' + (1 - \alpha)L'') \in A$. Por un mismo procedimiento, concluimos que B es convexo. Ahora bien, es claro que A es cerrado y B abierto usando la topología que se usa en la definición de continuidad de las preferencias sobre el espacio de loterías. Esto es, una vecindad de $L \in \mathcal{L}$ se define como

$$\bigcup_{L' \in \mathcal{L}} \{\alpha L + (1 - \alpha)L' : \alpha \in (0, \epsilon_{L'})\},$$

para $\epsilon_{L'} > 0$. Así, por el teorema de separación, existe un funcional lineal que separa los conjuntos. Este funcional lineal es justamente U y es tal que

$$U(\alpha L + (1 - \alpha)L') = \alpha U(L) + (1 - \alpha)U(L').$$

A.4. Paradoja de Allais

La paradoja de Allais demuestra una inconsistencia en la teoría de la utilidad esperada. Se presentan dos pares de loterías:

- $L_1 = (0, 1, 0)$: recibir 500,000 con certeza.
- $L'_1 = (0, 1, 0, 89, 0, 01)$: con 10 % de probabilidad recibir 2,500,000, con 89 % recibir 500,000, y con 1 % recibir 0.
- $L_2 = (0, 0, 11, 0, 89)$: con 11 % de probabilidad recibir 500,000, y con 89 % recibir 0.
- $L'_2 = (0, 10, 0, 0, 90)$: con 10 % de probabilidad recibir 2,500,000 y con 90 % recibir 0.

En la primera elección, la mayoría prefiere L_1 sobre L'_1 , lo que implica que:

$$u_{500000} > 0,1u_{2500000} + 0,89u_{500000} + 0,01u_0.$$

Restando $0,89u_{500000}$ en ambos lados y sumando $0,89u_0$, se obtiene:

$$0,11u_{500000} + 0,89u_0 > 0,1u_{2500000} + 0,9u_0.$$

Sin embargo, en la segunda elección, la mayoría elige L'_2 sobre L_2 , lo que contradice la relación anterior y muestra una violación de la independencia de alternativas irrelevantes en la teoría de la utilidad esperada.

La paradoja de Allais pone en evidencia una violación del axioma de independencia en la teoría de la utilidad esperada, lo que ha llevado a distintas interpretaciones y posibles soluciones.

- **Interpretación normativa:** La paradoja sugiere que las decisiones reales no siguen siempre la utilidad esperada, lo que cuestiona su validez como modelo normativo de racionalidad.
- **Límites cuando $p \rightarrow 0$ o $p \rightarrow 1$:** La violación de la independencia se vuelve más evidente cuando una opción ofrece certeza, ya que los individuos muestran una fuerte aversión a la incertidumbre.
- **Posible arrepentimiento:** Los individuos pueden anticipar la insatisfacción de perder una cantidad segura, lo que influye en sus decisiones y genera sesgos hacia opciones con certeza.
- **Renuncia al axioma de independencia:** Modelos como la teoría de prospectos o las teorías del arrepentimiento han sido propuestas para explicar estas desviaciones del comportamiento esperado.

A.5. Pagos monetarios y dominancia

Para esta sección, usamos los slides del profesor Federico Echenique (Berkeley) de utilidad esperada y riesgo.

Antes de Daniel Bernouilli, se pensaba que un prospecto riesgoso debía ser evaluado vía su valor esperado.

De alguna manera, un hombre muy pobre obtiene un billete de lotería que, con igual probabilidad, le dará o bien nada o bien veinte mil ducados. ¿Evaluará este hombre su posibilidad de ganar en diez mil ducados? ¿No sería imprudente vender este billete de lotería por nueve mil ducados? A mí me parece que la respuesta es negativa. Por otro lado, me inclino a creer que un hombre rico cometería un error si se negara a comprar el billete de lotería por nueve mil ducados. . . . la determinación del valor de un objeto no debe basarse en su precio, sino en la utilidad que proporciona. El precio del objeto depende únicamente de la cosa en sí misma y es igual para todos; sin embargo, la utilidad depende de las circunstancias particulares de la persona que hace la estimación. Así, no cabe duda de que una ganancia de mil ducados es más significativa para un mendigo que para un hombre rico, aunque ambos ganen la misma cantidad.

Ejemplo A.5.1. La paradoja de San Petersburgo. Propuesta por el primo de Daniel Bernouilli, Nicolás Bernouilli: Consideremos un juego en el que un casino lanza una moneda justa hasta que sale cara por primera vez. Si la primera cara aparece en el lanzamiento número n , el pago es de 2^n ducados (el pago se duplica por cada vez que aparece cruz). El valor esperado de este juego se calcula de la siguiente manera: La probabilidad de que salga cara por primera vez en la lanzada n es 2^{-n} . Así,

$$E[X] = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}\{X = n\} \cdot X(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot 2^n \right) = \infty.$$

¿Pagaría uno infinito para jugar el juego descrito en el ejemplo A.5.1? Ciertamente no. Daniel sugirió que la utilidad marginal era proporcional al inverso de la riqueza, o sea

$$Du(x) = \frac{a}{x}.$$

Por lo tanto,

$$u(x) = C + \int_1^x \frac{a}{t} dt = C + a \ln x.$$

O, tomando una transformación lineal afín, $u(x) = \ln x$. Por ende, la *utilidad esperada* del juego viene dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^n} \right) \ln(2^n) = \ln 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{2^n} = \ln 2 \frac{(1/2)}{(1 - 1/2)^2}.$$

Esto es consecuencia de que, si planteamos

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

y derivamos,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{(n+1)x^n}{x-1} - \frac{x^{n+1} - 1}{(x-1)^2}.$$

Digresión sobre distribuciones y probabilidades. Sea $X = [a, b]$ y $\Delta(X)$ el conjunto de las medidas de probabilidad de Borel sobre X . Para cada $\mu \in \Delta(X)$, definimos $F_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_\mu(t) = \mu(\{x \in X : x \leq t\}),$$

la función de distribución acumulada (cdf) asociada con μ .

Proposición A.5.2. Cualquier función F_μ satisface :

1. F_μ es débilmente monótona creciente.
2. F_μ es continua por la derecha.
3. $F_\mu(b) = 1$.
4. $\lim_{t \rightarrow a} F_\mu(t) = 0$.

Inversamente, para cualquier función que cumple estas propiedades, existe una μ asociada. En efecto, si F satisface estas propiedades, definimos

$$X(t) = \inf\{x \in [a, b] : F(x) \geq t\} = F^{-1}(t).$$

Consideremos X como una v.a. definida sobre $[0, 1]$ con distribución uniforme. Entonces, la distribución de X tiene como cdf a F .

Cuando $\mu \in \Delta(X)$, escribimos

$$\mathbb{E}_\mu = \int_X x d\mu(x) = \int_X x dF_\mu(x),$$

y para $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ escribimos

$$\mathbb{E}_\mu(g(x)) = \int_X g(x) d\mu(x).$$

Teorema A.5.3. Sea $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces, u es cóncava si y solo si

$$\int_X u(x) d\mu(x) \leq u\left(\int_X x d\mu(x)\right)$$

para cualquier $\mu \in \Delta(X)$.

Demostración. Sea $x^* = \mathbb{E}_\mu$. Dado que u es cóncava, existe $b \in \partial u(x^*)$ de forma que

$$u(x) \leq u(x^*) + b(x - x^*), \quad \forall x \in X.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_X u(x) d\mu(x) &\leq \int_X (u(x^*) + b(x - x^*)) d\mu(x) \\ &= u(x^*) + b \int_X (x - x^*) d\mu(x) \\ &= u(x^*). \end{aligned}$$

Sean ahora $x, y \in X$ y $\lambda \in (0, 1)$. Sea $\mu \in \Delta(X)$ una distribución de probabilidad que le asigna probabilidad λ a x y $1 - \lambda$ a y . Entonces, la desigualdad de Jensen justamente define la concavidad de u . \square

Loterías monetarias. Interprete $x \in X$ como un pago monetario y $\mu \in \Delta(X)$ como una lotería sobre los pagos monetarios. Asumamos que el agente escoge entre las loterías en función de una función de utilidad $V : \Delta(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Más aún, asumamos que esta función de utilidad V tiene la forma de utilidad esperada. Esto es, existe $u \in L^1(X)$ tal que

$$V(\mu) = \int_X u(x) d\mu(x).$$

La función u es conocida como función de utilidad Bernoulli asociada a V (llamada también utilidad de vonNeumann-Morgenstern). Note que podemos escribir

$$V(F_\mu) = \int_X u(x) dF_\mu(x).$$

Finalmente, la función de utilidad de Bernoulli es única salvo una transformación lineal afín. Esto implica que las preferencias sobre las loterías representadas por

$$V(\mu) = \int_X u(x) d\mu(x)$$

son las mismas que las que son representadas por

$$W(\mu) = \int_X (\alpha + \beta u(x)) d\mu(x), \quad \beta > 0.$$

Dominancia estocástica de primer orden. La dominancia estocástica de primer orden (FOSD) es un orden parcial sobre las loterías basado en la idea de que más dinero es preferido a menos dinero. Considere el conjunto

$$U_1 = \{u: X \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ monótona creciente}\}.$$

Definimos la relación binaria \geq_1 sobre $\Delta(X)$ por

$$\mu \geq_1 \nu \Leftrightarrow \int u d\mu \geq \int u d\nu, \quad \forall u \in U_1.$$

Como la función identidad es creciente, en particular $\mu \geq_1 \nu$ implica que $\mathbb{E}_\mu \geq \mathbb{E}_\nu$.

Teorema A.5.4. $\mu \geq_1 \nu$ si y solo si $F_\nu(x) \geq F_\mu(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Considere las funciones

$$t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } t < x \\ 1, & \text{si } t \geq x. \end{cases}$$

Estas son monótonas crecientes. Entonces, $\mu \geq_1 \nu$ implica que $1 - F_\nu(x) \leq 1 - F_\mu(x)$. Así, $F_\nu(x) \geq F_\mu(x)$. Ahora supongamos que $F_\nu(x) \geq F_\mu(x)$ para todo $x \in X$ y definamos

$$X(t) = \inf\{x \in [a, b] : F_\mu(x) \geq t\} \tag{A.1}$$

$$Y(t) = \inf\{x \in [a, b] : F_\nu(x) \geq t\}. \tag{A.2}$$

Ya sabemos que $X \sim F_\mu$ e $Y \sim F_\nu$. Por hipótesis, $X(t) \geq Y(t)$. Fijemos entonces $u \in U_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int u dF_\mu &= \int u(X(t)) dt \\ &\geq \int u(Y(t)) dt \\ &= \int u dF_\nu. \end{aligned}$$

□

Así, $\mu \geq_1 \nu$ si y solo si existen tres v.a. X, Y y Z con $X \sim F_\mu, Y \sim F_\nu, Z \geq 0$ tales que

$$X = Y + Z.$$

Demostración. Consideremos X e Y como en (A.1), (A.2) y definimos $Z = X - Y$. \square

Aversión al riesgo. ¿Qué es la aversión al riesgo? Prefiere 100 USD seguros o con probabilidad un medio 0 USD y probabilidad un medio 200 USD. La aversión es preferir el pago seguro.

Considere un agente con utilidad esperada V y utilidad de Bernouilli u . Decimos que el agente es averso al riesgo si para todo $\mu \in \Delta(X)$

$$\int_X u(x) d\mu(x) \leq u(\mathbb{E}_\mu).$$

Proposición A.5.5. Un agente con función de utilidad Bernouilli u es averso al riesgo si y solo si u es cóncava.

Definamos U_2 como

$$U_2 = \{u: X \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ cóncava}\}.$$

Definamos \geq_2 sobre $\Delta(X)$ por

$$\mu \geq_2 \nu \Leftrightarrow \int u d\mu \geq \int u d\nu, \forall u \in U_2.$$

Recordemos que si g es convexa, entonces $-g$ es cóncava, entonces $\mu \geq_2 \nu$ si y solo si $\mathbb{E}_\mu(g(x)) \leq \mathbb{E}_\nu(g(x))$ para toda g convexa.

Como la función identidad es convexa y cóncava, $\mu \geq_2 \nu$ implica que $\mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}_\nu$.

Teorema A.5.6. $\mu \geq_2 \nu$ si y solo si

$$\mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}_\nu$$

y

$$\int_a^x F_\nu(s) ds \geq \int_a^x F_\mu(s) ds$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Para toda F

$$\begin{aligned} \int_a^x F(t)dt &= tF(t)\Big|_a^x - \int_a^x t dF(t) \\ &= x \int_a^x F(t)dt - \int_a^x t dF(t) \\ &= \int_a^x (x-t)dF(t) \\ &= \int_a^b \max\{x-t, 0\}dF(t). \end{aligned}$$

La función $t \rightarrow \max\{x-t, 0\}$ es convexa por ser el máximo de dos funciones afines, y decreciente. Por ende, $t \rightarrow -\max\{x-t, 0\}$ es cóncava. Así, $\mu \succeq_2 \nu$ implica que

$$\int_a^b (-1) \max\{x-t, 0\}dF_\mu(t) \geq \int_a^b (-1) \max\{x-t, 0\}dF_\nu(t).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^x F_\mu(t)dt &= \int_a^b \max\{x-t, 0\}dF_\mu(t) \\ &\leq \int_a^b \max\{x-t, 0\}dF_\nu(t) \\ &= \int_a^x F_\nu(t)dt. \end{aligned}$$

La función identidad es convexa y cóncava a la vez, por lo que

$$\int x dF_\mu(x) = \int x dF_\nu(x).$$

La converso se prueba usando que una función cóncava es aproximada como una combinación lineal de funciones de la forma $t \rightarrow (-1) \max\{x-t, 0\}$, constante, y la identidad. \square

Riesgo y dominancia estocástica de segundo orden

Teorema A.5.7. $\mu \succeq_2 \nu$ si y solo si existen tres v.a. X, Y, Z definidas en un mismo espacio de probabilidad tales que $X \sim F_\mu, Y \sim F_\nu$ y $\mathbb{E}[Z|X] = 0$ tal que

$$Y = X + Z.$$

Observación A.5.8. Hemos visto que la dominancia estocástica de primer orden (FOSD) es la respuesta cuando preguntamos en qué están de acuerdo todos los agentes que prefieren más dinero a menos. Entonces, ¿en qué están de acuerdo todos los agentes que, 1) prefieren más dinero a menos y 2) son adversos al riesgo? La respuesta es la dominancia estocástica de segundo orden (SOSD).

Definición A.5.9. Sea $U_{12} = U_1 \cap U_2$. Definamos \geq_{12} sobre $\Delta(X)$ por

$$\mu \geq_{12} \nu \Leftrightarrow \int u d\mu \geq \int u d\nu, \forall u \in U_{12}.$$

Decimos que F_μ domina en segundo orden a F_ν si $\mu \geq_{12} \nu$.

Teorema A.5.10. $\mu \geq_{12} \nu$ si y solo si

$$\int_a^x F_\nu(s) ds \geq \int_a^x F_\mu(s) ds, \forall x \in X.$$

Demostración. Queremos demostrar la equivalencia de las dos definiciones. Para simplificar, supongamos que u es diferenciable y que existe algún x tal que $F_\nu(x) = F_\mu(x) = 1$ (esto se puede relajar). Recordemos que, tras integrar por partes:

$$\int u(x) dF_\mu(x) - \int u(x) dF_\nu(x) = \int u'(x) [F_\nu(x) - F_\mu(x)] dx.$$

Ahora, dado que F_ν y F_μ tienen la misma media, otra integración por partes implica:

$$\int x dF_\nu(x) = \int x dF_\mu(x) \Leftrightarrow \int F_\nu(x) dx = \int F_\mu(x) dx.$$

Si tomamos la primera expresión, integramos por partes una tercera vez (!) y realizamos algunas cancelaciones, obtenemos:

$$- \int u''(x) \left[\int_{-\infty}^x F_\nu(y) dy - \int_{-\infty}^x F_\mu(y) dy \right] dx.$$

Dado que $u'' \leq 0$, si

$$\int_{-\infty}^x F_\nu(y) dy \geq \int_{-\infty}^x F_\mu(y) dy,$$

entonces claramente la expresión completa es positiva y toda función u cóncava prefiere F_ν sobre F_μ . Recíprocamente, supongamos que en un entorno de algún x ,

$$\int_{-\infty}^x F_\nu(y) dy < \int_{-\infty}^x F_\mu(y) dy.$$

Podemos tomar u como una función lineal por debajo y por encima de x , y estrictamente cóncava en el entorno de x , de modo que la expresión sea negativa y u sea una utilidad cóncava que prefiera F_μ sobre F_ν . \square

Teorema A.5.11. $\mu \geq_{12} \nu$ si y solo si existen tres v.a. X, Y y Z definidas en un mismo espacio de probabilidad tales que $X \sim F_\mu, Y \sim F_\nu$ y $\mathbb{E}[Z|X] \leq 0$ tales que

$$Y = X + Z.$$

Apartado matemático. Las relaciones binarias \geq_i para $i \in \{1, 2, 12\}$ están definidas sobre el cono que resulta de los vectores positivos de una colección de funciones lineales. $\Delta(X)$ no es un espacio vectorial, pero puede ser incrustado en un espacio vectorial de medidas con signo. Entonces $\mu \geq_i \nu$ si y solo si $\mu - \nu \in P_i$, donde

$$P_i = \{\mu : f(\mu) \geq 0, \forall f \in \mathcal{F}_i\}$$

con \mathcal{F}_i la familia de funciones $\mu \rightarrow \int f u d\mu$ para $u \in U_i$. Una colección de funcionales lineales.

A.6. Riesgo

Desde ahora consideramos únicamente utilidades Bernouilli que son continuas y estrictamente monótonamente crecientes. Para un agente con función de utilidad Bernouilli u , el número $c(\mu, u)$ es el equivalente de certeza para la lotería μ y agente u si cumple que

$$\int u d\mu = u(c(\mu, u)).$$

Proposición A.6.1. Si u es estrictamente monótona creciente y continua, $c(\mu, u)$ existe y es único.

Proposición A.6.2. Un agente con función de utilidad Bernouilli es averso al riesgo si y solo si $c(\mu, u) \leq \mathbb{E}_\mu$ para toda lotería $\mu \in \Delta(X)$.

Demostración. Se sigue de que

$$\begin{aligned} c(\mu, u) &\leq \mathbb{E}_\mu \\ u(c(\mu, u)) &\leq u(\mathbb{E}_\mu) \\ \int u d\mu &\leq u(\mathbb{E}_\mu). \end{aligned}$$

□

Definición A.6.3. La prima de riesgo de μ para u es

$$R(\mu, u) = \mathbb{E}_\mu - c(\mu, u).$$

Por lo tanto, $R(\mu, u)$ cuando u es averso al riesgo.

Cuando dos agentes, uno con utilidad de Bernoulli u y el otro v , ¿qué significa que uno sea más averso al riesgo que el otro?

Decimos que u es al menos tan averso al riesgo que v si $\mathbb{E}_\mu u(x) \geq u(\theta)$ cuando $\mathbb{E}_\nu u(x) \geq v(\theta)$.

Proposición A.6.4. u es al menos tan averso al riesgo que v si y solo si existe g estrictamente creciente cóncava tal que $u = g \circ v$. O sea, u es una transformación cóncava de v .

Demostración. Sea g la función en cuestión y μ, θ tales que $\mathbb{E}_\mu u(x) \geq u(\theta)$. Entonces, $u = g \circ v$ implica que $\mathbb{E}_\mu (g(v(x))) \geq g(v(\theta))$. o

$$g^{-1}(\mathbb{E}_\mu g(v(x))) \geq v(\theta).$$

Más aún, por la concavidad de g

$$\mathbb{E}_\mu g(v(x)) \leq g(\mathbb{E}_\mu v(x)),$$

lo que implica que

$$g^{-1}(\mathbb{E}_\mu g(v(x))) \leq g^{-1}(g(\mathbb{E}_\mu v(x))) = \mathbb{E}_\mu v(x).$$

Por ende,

$$\mathbb{E}_\mu v(x) \geq g^{-1}(\mathbb{E}_\mu g(v(x))) \geq v(\theta).$$

Conversamente, sea $g : v(X) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente tal que $u = g(v(x))$. Dicho g existe pues ambas son funciones estrictamente crecientes (por lo que son ordinalmente equivalentes). Note que $v(X)$ es un conjunto convexo. Ahora bien, supongamos que g no es cóncava. Existen y, z y $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$g(\lambda z + (1 - \lambda)y) < \lambda g(z) + (1 - \lambda)g(y).$$

Sea $z = v(z')$ e $y = v(y')$ y considere la lotería que le asigna a z' probabilidad λ y a y' probabilidad $1 - \lambda$. Entonces,

$$g(\mathbb{E}_\mu v(x)) < \mathbb{E}_\mu g(v(x)) = \mathbb{E}_\mu u(x) = u(c(u, \mu)).$$

Por ende,

$$\mathbb{E}_\mu v(x) < g^{-1}(u(c(u, \mu))) = v(c(u, \mu)).$$

Una contradicción porque u está dispuesto a renunciar a la cantidad segura $c(u, \mu)$ por μ (de hecho, es indiferente entre ambos), mientras que v no está dispuesto a hacerlo. \square

Observación A.6.5. Si u es al menos tan averso al riesgo que v si y solo si para todo μ

$$c(\mu, u) \leq c(\mu, v).$$

Supongamos ahora que u y v son clase C^2 . Sabemos que si u es al menos tan averso al riesgo que v si y solo si existe g cóncava tal que $u = g \circ v$. Por ende,

$$\begin{aligned} u'(x) &= g'(v(x))v'(x) \\ u''(x) &= g''(v(x))[v'(x)]^2 + g'(v(x))v''(x). \end{aligned}$$

Sabemos que $g' > 0$ y $g'' \leq 0$. Por ende,

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{g''(v(x))[v'(x)]^2}{\underbrace{g'(v(x))v'(x)}_{\geq 0}} + \frac{g'(v(x))v''(x)}{g'(v(x))v'(x)}.$$

Así,

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} \geq \frac{v''(x)}{v'(x)}.$$

La magnitud

$$r_A(x, u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

es conocido como el coeficiente de aversión absoluta al riesgo, Arrow-Pratt. Es una medida local de la curvatura de u .

Ejemplo A.6.6. $r_A(x, u)$ depende de x . Cuando es constante, igual a ρ , define una utilidad en particular:

$$r_A(x, u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \rho \implies u(x) = C_1 - C_2 e^{-\rho x}.$$

Esta función de utilidad se conoce como CARA.

Recordemos la cita de Bernoulli. Daniel pensaba que el valor de una apuesta depende de la riqueza de una persona. Por ejemplo, una lotería 50-50 que otorga 20,000 ducados o nada tiene menos valor para una persona pobre que para una persona rica.

Fijemos una función de utilidad $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y estrictamente creciente. Consideremos la familia de utilidades u_w , donde

$$u_w = u(w + x).$$

Interpretemos u_w como la utilidad de un agente con riqueza $w \in \mathbb{R}^+$. Ahora, un agente con utilidad u exhibe aversión al riesgo decreciente si u_w es al menos tan adverso al riesgo como u_{w_0} cuando $w < w_0$.

Recordemos que consideramos $\Delta([a, b])$. Ahora asumamos que $a > 0$. Consideremos un riesgo multiplicativo relativo a la riqueza w ; pensemos, por ejemplo, en un riesgo relacionado con una tasa de retorno. Definamos

$$\tilde{u}_w(x) = u(wx).$$

Sea $w < w_0$ y supongamos que \tilde{u}_w es al menos tan adverso al riesgo como \tilde{u}_{w_0} . Entonces, existe una función cóncava g tal que

$$u(wx) = g(u(w_0x)).$$

De esto se obtiene

$$\begin{aligned} wu'(wx) &= g'(u(w_0x))u'(w_0x)w_0, \\ w^2u''(wx) &= g''(u(w_0x))[u'(w_0x)w_0]^2 + g'(u(w_0x))u''(w_0x)(w_0)^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{w^2u''(wx)}{wu'(wx)} = \frac{g''(u(w_0x))[u'(w_0x)w_0]^2}{g'(u(w_0x))u'(w_0x)w_0} + \frac{g'(u(w_0x))u''(w_0x)(w_0)^2}{g'(u(w_0x))u'(w_0x)w_0}.$$

Lo que implica que

$$-\frac{wu''(wx)}{u'(wx)} \geq -\frac{w_0u''(w_0x)}{u'(w_0x)}.$$

Esto sugiere el coeficiente de aversión relativa al riesgo:

$$r_R(x, u) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

De modo que cuando $r_R(x, u)$ es una función decreciente en x , entonces u exhibe aversión al riesgo decreciente. El caso límite en que $r_R(x, u)$ es constante implica (para $\rho \neq 1$) que

$$-x \frac{u''(x)}{u'(x)} = \rho,$$

lo que da como resultado (fijando una normalización)

$$u(x) = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho},$$

que corresponde a la función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante (CRRA).

Ejemplo A.6.7. Consideremos un agente con una función de utilidad de Bernoulli u y riqueza inicial w que está considerando comprar un seguro contra incendios. Un incendio ocurre con probabilidad π y, en caso de ocurrir, la pérdida asociada es D . El contrato de seguro funciona de la siguiente manera: cada unidad de seguro tiene un costo q y paga un dólar en caso de incendio. Si el agente compra una cantidad $\alpha \geq 0$ de seguro, su riqueza en cada escenario es: - Si no ocurre un incendio, su riqueza es $w - \alpha q$. - Si ocurre un incendio, su riqueza es $w - D + \alpha - \alpha q$. Dado esto, el agente desea maximizar la utilidad esperada:

$$\pi u(w - D + \alpha - \alpha q) + (1 - \pi)u(w - \alpha q).$$

Ahora, supongamos que el precio del seguro es $q = \pi$, lo que significa que el contrato de seguro es actuarialmente justo, es decir, el precio por unidad de cobertura es igual a la probabilidad de ocurrencia del evento asegurado.

En este caso, la riqueza del agente en cada escenario se reescribe como:

- Si no hay incendio, su riqueza es $w - \alpha\pi$.
- Si hay incendio, su riqueza es $w - D + \alpha - \alpha\pi$.

Podemos calcular la riqueza esperada:

$$\mathbb{E}[W] = \pi(w - D + \alpha(1 - \pi)) + (1 - \pi)(w - \alpha\pi).$$

Distribuyendo términos,

$$\mathbb{E}[W] = \pi w - \pi D + \pi\alpha(1 - \pi) + w(1 - \pi) - \alpha\pi(1 - \pi).$$

Simplificando,

$$\mathbb{E}[W] = w - \pi D.$$

Observamos que, si el agente elige $\alpha = D$, la riqueza en ambos estados es exactamente $w - \pi D$, asegurando así que la riqueza no dependa de la ocurrencia del incendio. Por la desigualdad de Jensen, dado que u es cóncava (es decir, el agente es adverso al riesgo), la utilidad esperada máxima se alcanza cuando la riqueza es constante en ambos estados. Por lo tanto, la mejor estrategia para el agente es elegir $\alpha = D$, es decir, asegurarse completamente. Para formalizar este resultado, podemos analizar las condiciones de primer orden. Suponiendo que u es diferenciable, el problema de optimización del agente implica la condición:

$$\pi u'(w - D + \alpha(1 - q))(1 - q) + (1 - \pi)u'(w - \alpha q)q = 0.$$

Si $\alpha = 0$, la expresión de la derivada es:

$$\pi u'(w - D)(1 - q) + (1 - \pi)u'(w)q \leq 0.$$

Si $\alpha > 0$, en el punto óptimo se cumple la ecuación:

$$\pi u'(w - D + \alpha(1 - q))(1 - q) + (1 - \pi)u'(w - \alpha q)q = 0.$$

Al resolver esta ecuación para α , se obtiene que la única solución consistente con la aversión al riesgo del agente es $\alpha = D$, lo que confirma que el agente compra la cantidad exacta de seguro para eliminar completamente el riesgo. Conclusión: cuando se le ofrece un seguro actuarialmente justo, un agente adverso al riesgo siempre optará por asegurarse completamente.

A.7. Probabilidades subjetivas

En muchas decisiones reales, los agentes enfrentan incertidumbre sobre qué ocurrirá en el mundo, sin disponer de probabilidades objetivas. La teoría clásica de utilidad esperada, desarrollada por von Neumann y Morgenstern, presupone que el agente conoce una distribución de probabilidad objetiva sobre un conjunto de consecuencias. Formalmente, en el modelo de vNM tenemos loterías $L = (p_1, \dots, p_n)$ sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $x_i \in X$ son consecuencias y p_i son probabilidades conocidas. El agente elige la lotería que maximiza su utilidad esperada $\sum_i p_i u(x_i)$, donde $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad de Bernouilli. Sin embargo, en muchos contextos

—como invertir en una startup, predecir un resultado electoral, o decidir si llevar un paraguas— no hay probabilidades objetivas conocidas, ni frecuencias observables, ni sorteos explícitos. Leonard Savage propuso un enfoque más general: el agente elige entre actos, definidos como funciones $f : S \rightarrow X$, donde S es un conjunto de estados del mundo y X es el conjunto de consecuencias. Cada acto asigna una consecuencia $f(s)$ a cada estado posible $s \in S$. Por ejemplo, un acto puede ser *si llueve, voy al cine; si no llueve, salgo a correr*, donde los estados son *llueve* o *no llueve*, y las consecuencias son actividades distintas. El agente posee una relación de preferencia \succsim definida sobre el conjunto de actos, es decir, $f \succsim g$ significa que el acto f es al menos tan preferido como el acto g . Savage demostró que si esta relación de preferencia sobre los actos satisface ciertos axiomas (completitud, transitividad, continuidad, etc.), entonces existen una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ y una medida de probabilidad subjetiva P sobre S tales que las preferencias del agente pueden representarse mediante la comparación de utilidades esperadas subjetivas:

$$f \succsim g \iff \int_S u(f(s)) dP(s) \geq \int_S u(g(s)) dP(s).$$

Aquí, P no representa una probabilidad objetiva dada por el entorno, sino una medida subjetiva de creencia que el agente asigna a cada estado del mundo. Esta probabilidad subjetiva se infiere de sus decisiones: si el agente prefiere un acto sobre otro, ello revela cómo valora las consecuencias y qué tan probable considera cada estado. Por ejemplo, si un agricultor decide sembrar arroz solo si llueve y maíz si no, y revela preferencia por ese plan frente a sembrar soya en ambos escenarios, esto permite deducir que su creencia subjetiva sobre la lluvia supera cierto umbral. Formalmente, aunque S y Ω pueden representar espacios similares (estados del mundo), su rol es distinto: en modelos clásicos de probabilidad, Ω es un espacio muestral sobre el cual se define una medida de probabilidad objetiva \mathbb{P} ; en cambio, en la teoría de Savage, el conjunto S carece de estructura probabilística exógena, y la medida P se construye a partir del comportamiento del agente. Esta diferencia es fundamental: en la teoría clásica, la incertidumbre se modela como riesgo con frecuencias conocidas; en la teoría de Savage, se modela como ignorancia gestionada mediante creencias subjetivas consistentes. Por ejemplo, ante una elección entre invertir en bonos o en una empresa emergente, un agente puede tener una creencia subjetiva de que la empresa tiene 40% de probabilidad de éxito. Esta creencia no proviene de un proceso estocástico objetivo, sino de su

propia evaluación personal. Del mismo modo, dos votantes enfrentando una misma elección política pueden asignar probabilidades distintas al resultado de las elecciones, y tomar decisiones racionales distintas, sin contradicción lógica. La gran contribución de Savage fue mostrar que incluso sin estructura objetiva alguna, la coherencia en las preferencias del agente impone la existencia de una representación basada en utilidad esperada con probabilidades subjetivas. Así, el modelo de Savage proporciona una base rigurosa y flexible para analizar decisiones racionales en contextos donde no hay loterías explícitas ni probabilidades observables, sino únicamente actos, consecuencias y creencias individuales sobre cómo podría comportarse el mundo.

A.8. Savage in the market

A continuación presentamos el artículo publicado en *Econometrica* por Echenique y Saito ([Echenique and Saito, 2015](#)), titulado *Savage in the Market*. El objetivo principal de dicho trabajo es caracterizar, a partir de observaciones de comportamiento en mercados, cuando las decisiones de un agente son consistentes con la teoría de utilidad esperada subjetiva (SEU) bajo aversión al riesgo. Aunque la representación de preferencias mediante utilidad esperada subjetiva ha sido comprendida desde [Savage \(1954\)](#), no se contaba con una caracterización axiomática basada en comportamiento observable en el mercado.

La contribución del artículo es el desarrollo de un axioma de preferencia revelada denominado *SARSEU* (por sus siglas en inglés: Strong Axiom of Revealed Subjective Expected Utility), el cual es necesario y suficiente para que un comportamiento observado sea racionalizable mediante una función de utilidad cóncava y una probabilidad subjetiva. Es decir, un agente se comporta como si maximizara utilidad esperada con aversión al riesgo y creencias subjetivas, si y solo si su comportamiento satisface el axioma SARSEU.

Este resultado se ubica en la tradición de preferencia revelada iniciada por Samuelson ([Samuelson, 1938](#)) y continuada por Houthakker ([Houthakker, 1950](#)), quienes caracterizaron las elecciones consistentes con la maximización de la utilidad mediante el axioma fuerte de preferencia revelada (SARP). Echenique y Saito extienden

esta línea al contexto de incertidumbre y subjetividad probabilística, ofreciendo una herramienta no paramétrica para testear empíricamente si las decisiones de un agente en un entorno de mercado financiero son compatibles con SEU.

El axioma SARSEU no solo tiene importancia teórica: también permite el desarrollo de algoritmos eficientes de verificación, análogos a las desigualdades de Afriat en el caso determinista. Además, permite sugerir diseños experimentales adecuados para probar empíricamente la validez de SEU. En particular, los autores discuten cómo aplicar su test a los datos experimentales de Hey y Pace (Hey and Pace, 2014), Ahn et al. (Ahn et al., 2014) y Bossaerts et al. (Bossaerts et al., 2010), subrayando que su método evita suposiciones parametrizadas al ofrecer una alternativa robusta y general.

En resumen, el trabajo de Echenique y Saito aporta una caracterización exacta del comportamiento consistente con la utilidad esperada subjetiva bajo aversión al riesgo, basada exclusivamente en elecciones de mercado, abriendo así una nueva línea de investigación teórica y empírica dentro del análisis de decisiones bajo incertidumbre.

Considérese un conjunto finito de estados S . En algunos contextos, se utiliza también la notación $S = |S|$ para denotar el número total de estados. Se define el conjunto de medidas de probabilidad estrictamente positivas sobre S como $\Delta_{++} = \{\mu \in \mathbb{R}_{++}^S \mid \sum_{s \in S} \mu_s = 1\}$. En el modelo desarrollado por Echenique y Saito (Echenique and Saito, 2015), los objetos de elección son pagos monetarios contingentes al estado, denominados *actos monetarios*, representados como vectores en \mathbb{R}_+^S .

Se adopta la convención usual: dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se escribe $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo i , y $x < y$ si además $x \neq y$. Se denota por \mathbb{R}_+^n el conjunto de vectores no negativos y por \mathbb{R}_{++}^n el conjunto de vectores estrictamente positivos.

Definición A.8.1. Un *conjunto de datos* es una colección finita de pares $(x, p) \in \mathbb{R}_+^S \times \mathbb{R}_{++}^S$. La interpretación económica es que cada par (x^k, p^k) describe una observación de mercado: una compra del acto x^k a un vector de precios p^k , con ingreso implícito $p^k \cdot x^k$.

El modelo de utilidad esperada subjetiva (SEU, por sus siglas en inglés) está definido por una probabilidad subjetiva $\mu \in \Delta_{++}$ y una función de utilidad $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, estrictamente creciente y cóncava (es decir, se impone aversión al riesgo). Dado un

ingreso $I > 0$ y un vector de precios $p \in \mathbb{R}_{++}^S$, el agente resuelve el problema:

$$\max_{x \in B(p, I)} \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s),$$

donde el conjunto presupuestario está dado por $B(p, I) = \{y \in \mathbb{R}_+^S : p \cdot y \leq I\}$.

Definición A.8.2. Un conjunto de datos $(x^k, p^k)_{k=1}^K$ es *racionalizable por utilidad esperada subjetiva* (SEU-racional) si existen $\mu \in \Delta^{++}$ y una función $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, estrictamente creciente y cóncava, tales que para todo k y todo $y \in B(p^k, p^k \cdot x^k)$ se cumple:

$$\sum_{s \in S} \mu_s u(y_s) \leq \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s^k).$$

Este marco teórico permite interpretar la racionalidad de un comportamiento observado en términos de maximización de utilidad esperada con aversión al riesgo y creencias subjetivas sobre los estados del mundo. El enfoque asume que en cada observación, el ingreso disponible es igual al valor monetario del acto elegido, i.e., $p^k \cdot x^k$. Asimismo, se modela una sola mercancía (dinero) por estado, dejando el análisis con múltiples bienes fuera del alcance del artículo.

Para facilitar la exposición, se asume que la función de utilidad u es diferenciable. Sin embargo, en general, un conjunto de datos racionalizable bajo SEU no requiere que u sea diferenciable (Echenique and Saito, 2015). Las condiciones de primer orden para el problema de maximización de SEU planteado en (1) son:

$$\mu_s u'(x_s) = \lambda p_s,$$

donde μ_s es la probabilidad subjetiva asignada al estado s , $u'(x_s)$ es la derivada marginal de la utilidad en dicho estado, y λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria. Estas condiciones involucran tres variables no observables: las probabilidades subjetivas μ_s , las utilidades marginales $u'(x_s)$ y los multiplicadores λ .

Caso 2×2 : $K = 2$ y $S = 2$. Se considera un caso con dos estados del mundo y dos observaciones de elección. Sean (x^{k_1}, p^{k_1}) y (x^{k_2}, p^{k_2}) dos pares observados de elección y precios. Para que este conjunto de datos sea racionalizable bajo SEU, deben existir una medida subjetiva $\mu \in \Delta_{++}$, dos multiplicadores $\lambda^{k_1}, \lambda^{k_2} > 0$, y una función de

utilidad u estrictamente creciente y cóncava, tales que se cumplan las condiciones de primer orden:

$$\mu_s u'(x_s^k) = \lambda^k p_s^k \quad \text{para } s = 1, 2 \text{ y } k = k_1, k_2.$$

Estas ecuaciones involucran tanto las variables observables x y p como las no observables u' , λ y μ . Para deducir restricciones empíricas, se eliminan los términos no observables dividiendo las condiciones de primer orden entre sí. Esto permite derivar implicaciones únicamente en términos de las variables observadas:

$$\frac{u'(x_{s_1}^{k_1})}{u'(x_{s_1}^{k_2})} \cdot \frac{u'(x_{s_2}^{k_2})}{u'(x_{s_2}^{k_1})} = \frac{\mu_{s_1} u'(x_{s_1}^{k_1})}{\mu_{s_1} u'(x_{s_1}^{k_2})} \cdot \frac{\mu_{s_2} u'(x_{s_2}^{k_2})}{\mu_{s_2} u'(x_{s_2}^{k_1})} = \frac{\lambda^{k_1} p_{s_1}^{k_1}}{\lambda^{k_2} p_{s_1}^{k_2}} \cdot \frac{\lambda^{k_2} p_{s_2}^{k_2}}{\lambda^{k_1} p_{s_2}^{k_1}} = \frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_1}^{k_2}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_2}}{p_{s_2}^{k_1}}.$$

En primer lugar, si se tiene que $x_{s_1}^{k_1} > x_{s_1}^{k_2}$ y $x_{s_2}^{k_2} > x_{s_2}^{k_1}$, entonces por la concavidad de u se tiene $u'(x_{s_1}^{k_1}) \leq u'(x_{s_1}^{k_2})$ y $u'(x_{s_2}^{k_2}) \leq u'(x_{s_2}^{k_1})$. Combinando ambas desigualdades se obtiene que:

$$\frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_1}^{k_2}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_2}}{p_{s_2}^{k_1}} \leq 1. \quad (\text{A.3})$$

En segundo lugar, si se cumple que $x_{s_1}^{k_1} > x_{s_2}^{k_1}$ y $x_{s_2}^{k_2} > x_{s_1}^{k_2}$ —es decir, los vectores x^{k_1} y x^{k_2} están a lados opuestos de la diagonal de 45 grados—, entonces la concavidad implica que $u'(x_{s_1}^{k_1}) \leq u'(x_{s_2}^{k_1})$ y $u'(x_{s_2}^{k_2}) \leq u'(x_{s_1}^{k_2})$, lo que lleva a:

$$\frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_2}^{k_1}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_2}}{p_{s_1}^{k_2}} \leq 1. \quad (\text{A.4})$$

Ambas condiciones son implicaciones necesarias de la racionalidad bajo SEU con aversión al riesgo en el caso $K = 2$, $S = 2$. Además, capturan dos dimensiones cualitativas distintas del modelo SEU: la primera refleja el efecto de la concavidad (aversión al riesgo) sobre la relación entre precios y cantidades, mientras que la segunda está relacionada con la sensibilidad al perfil de pagos entre los estados. Estas dos desigualdades constituyen restricciones testables que permiten discriminar empíricamente si un conjunto de observaciones es consistente con el modelo de SEU bajo aversión al riesgo.

Caso general para K y S . Utilizando las condiciones de primer orden, ya establecidas, la racionalidad bajo utilidad esperada subjetiva (SEU) requiere que:

$$\frac{u'(x_{s'}^{k'})}{u'(x_s^k)} = \frac{\mu_{s'}}{\mu_s} \cdot \frac{\lambda^{k'}}{\lambda^k} \cdot \frac{p_{s'}^{k'}}{p_s^k}.$$

La concavidad de u impone restricciones sobre el lado izquierdo de esta ecuación cuando $x_{s'}^{k'} > x_s^k$, pero el lado derecho está complicado por la presencia de las probabilidades subjetivas no observables μ y los multiplicadores de Lagrange λ . Por tanto, se seleccionan pares $(x_s^k, x_{s'}^{k'})$ tales que las probabilidades subjetivas y los multiplicadores se cancelen. Por ejemplo, consideremos el siguiente patrón de desigualdades:

$$x_{s_1}^{k_1} > x_{s_2}^{k_2}, \quad x_{s_2}^{k_3} > x_{s_3}^{k_1}, \quad x_{s_3}^{k_2} > x_{s_1}^{k_3}.$$

Manipulando las condiciones de primer orden para estas tres observaciones, obtenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{u'(x_{s_1}^{k_1})}{u'(x_{s_2}^{k_2})} \cdot \frac{u'(x_{s_2}^{k_3})}{u'(x_{s_3}^{k_1})} \cdot \frac{u'(x_{s_3}^{k_2})}{u'(x_{s_1}^{k_3})} = \frac{\mu_{s_2}}{\mu_{s_1}} \cdot \frac{\lambda^{k_1}}{\lambda^{k_2}} \cdot \frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_2}^{k_2}} \cdot \frac{\mu_{s_3}}{\mu_{s_2}} \cdot \frac{\lambda^{k_3}}{\lambda^{k_1}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_3}}{p_{s_3}^{k_1}} \cdot \frac{\mu_{s_1}}{\mu_{s_3}} \cdot \frac{\lambda^{k_2}}{\lambda^{k_3}} \cdot \frac{p_{s_3}^{k_2}}{p_{s_1}^{k_3}} = \frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_2}^{k_2}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_3}}{p_{s_3}^{k_1}} \cdot \frac{p_{s_3}^{k_2}}{p_{s_1}^{k_3}}.$$

Obsérvese que los pares de datos seleccionados — $(x_{s_1}^{k_1}, x_{s_2}^{k_2})$, $(x_{s_2}^{k_3}, x_{s_3}^{k_1})$ y $(x_{s_3}^{k_2}, x_{s_1}^{k_3})$ — han sido elegidos de modo que los términos μ_s aparecen el mismo número de veces en el numerador y en el denominador, y lo mismo ocurre con los multiplicadores λ^k . Por lo tanto, estos términos se cancelan y la ecuación resultante impone una condición puramente sobre variables observables: precios y cantidades.

Además, bajo la hipótesis de que $x_{s_1}^{k_1} > x_{s_2}^{k_2}$, $x_{s_2}^{k_3} > x_{s_3}^{k_1}$ y $x_{s_3}^{k_2} > x_{s_1}^{k_3}$, la concavidad de u implica que:

$$\frac{u'(x_{s_1}^{k_1})}{u'(x_{s_2}^{k_2})} < 1, \quad \frac{u'(x_{s_2}^{k_3})}{u'(x_{s_3}^{k_1})} < 1, \quad \frac{u'(x_{s_3}^{k_2})}{u'(x_{s_1}^{k_3})} < 1,$$

y por tanto, el producto total de precios debe cumplir:

$$\frac{p_{s_1}^{k_1}}{p_{s_2}^{k_2}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_3}}{p_{s_3}^{k_1}} \cdot \frac{p_{s_3}^{k_2}}{p_{s_1}^{k_3}} \leq 1.$$

Esta desigualdad constituye una implicación empíricamente testeable del modelo SEU* con aversión al riesgo. En general, la racionalidad bajo SEU requiere que para cualquier colección de observaciones organizadas como en el patrón anterior —de forma tal que los términos no observables se cancelen—, el producto de precios asociado sea menor o igual a 1. Esta construcción motiva directamente las condiciones (ii) y (iii) del axioma SARSEU que los autores proponen.

El axioma central propuesto en el artículo es el *Strong Axiom of Revealed Subjective Expected Utility* (SARSEU), el cual caracteriza completamente cuándo un conjunto de

datos observados es racionalizable mediante utilidad esperada subjetiva (SEU) con aversión al riesgo. El axioma se formula de la siguiente manera:

SARSEU. Considérese cualquier secuencia finita de pares de elecciones y precios $\left(x_{s_i}^{k_i}, x_{s'_i}^{k'_i}\right)_{i=1}^n$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Para todo i , se tiene $x_{s_i}^{k_i} > x_{s'_i}^{k'_i}$;
2. Cada estado s aparece como s_i (en el lado izquierdo del par) el mismo número de veces que aparece como s'_i (en el lado derecho);
3. Cada observación k aparece como k_i el mismo número de veces que como k'_i .

Entonces, el producto de precios asociado a dicha secuencia debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\prod_{i=1}^n \frac{p_{s_i}^{k_i}}{p_{s'_i}^{k'_i}} \leq 1.$$

Este axioma proporciona una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de datos sea racionalizable mediante el modelo SEU. La estructura del axioma guarda similitud formal con otras caracterizaciones basadas en precios de riesgo-neutral, y su sintaxis refleja la lógica de cancelación de términos no observables como las probabilidades subjetivas y los multiplicadores de Lagrange, cuando se construyen ciclos de comparaciones cuidadosamente balanceados.

Bajo ciertas condiciones sobre los datos, este axioma también implica la existencia de una función de utilidad suavemente racionalizante. En el marco adoptado por los autores, donde los actos son pagos monetarios contingentes a cada estado, la concavidad de la función de utilidad se traduce en condiciones de monotonidad de las derivadas (subgradientes), lo que facilita el análisis en dimensión uno. Sin embargo, los resultados no se extienden directamente al caso multidimensional, dado que la concavidad general está asociada a la propiedad más fuerte de monotonía cíclica, la cual no se conserva en el proceso de linearización utilizado.

Finalmente, a pesar de que la sintaxis del axioma SARSEU no lo hace evidente, el cumplimiento del axioma por parte de un conjunto de datos puede verificarse de forma

efectiva. Los autores establecen la existencia de un algoritmo eficiente que decide si un conjunto de datos satisface SARSEU. Este algoritmo está basado en un sistema de desigualdades linealizadas derivadas de las condiciones de primer orden del problema de maximización bajo SEU, y puede resolverse mediante programación lineal.

Luego, el artículo compara el modelo de utilidad esperada subjetiva (SEU) con una teoría más débil, conocida como *utilidad dependiente del estado* (state-dependent utility, SDU). En este modelo, el agente maximiza una función de utilidad aditivamente separable en los estados, de la forma:

$$U^{\text{SD}}(x) = \sum_{s \in S} u_s(x_s),$$

donde cada función $u_s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y cóncava, y puede diferir entre estados. Esta formulación permite capturar preferencias donde la utilidad que un agente asigna a una consecuencia depende del estado en que esta ocurre, sin imponer la estructura adicional que requiere SEU, como la existencia de una única función de utilidad común a todos los estados y una medida de probabilidad subjetiva.

En el caso 2×2 (dos estados y dos observaciones), los autores muestran que la *condición (A.3)* —una desigualdad entre precios derivada de las condiciones de primer orden del problema SEU— no solo es necesaria para SEU, sino que también caracteriza racionalidad bajo SDU. Dicha condición establece que si:

$$x_{s_1}^{k_1} > x_{s_1}^{k_2} \quad \text{y} \quad x_{s_2}^{k_2} > x_{s_2}^{k_1},$$

entonces se debe cumplir:

$$\frac{p_{s_1}^{k_2}}{p_{s_1}^{k_1}} \cdot \frac{p_{s_2}^{k_1}}{p_{s_2}^{k_2}} \leq 1.$$

Esta condición se deriva de la concavidad de las funciones u_s y de las condiciones de primer orden $u'_s(x_s^k) = \lambda^k p_s^k$. Además, los autores ofrecen una interpretación gráfica de cómo una violación de esta condición llevaría a una contradicción con la maximización de utilidad bajo SEU, utilizando un razonamiento basado en normalidad de la demanda y violación de WARP.

En el caso general, un conjunto de datos $\{(x^k, p^k)\}_{k=1}^K$ es racionalizable bajo SDU si existe una función U^{SD} como la anterior tal que para todo k y toda alternativa factible

y se cumple:

$$y \in B(p^k, p^k \cdot x^k) \Rightarrow U^{\text{SD}}(y) \leq U^{\text{SD}}(x^k).$$

El artículo formaliza esta noción a través del siguiente axioma:

Strong Axiom of Revealed State-Dependent Utility (SARSDU). Considérese una secuencia finita de pares $(x_{s_i}^{k_i}, x_{s'_i}^{k'_i})_{i=1}^n$ tal que:

1. Para todo i , se cumple $x_{s_i}^{k_i} > x_{s'_i}^{k'_i}$;
2. Se tiene $s_i = s'_i$ para todo i ;
3. Cada k aparece como k_i el mismo número de veces que como k'_i .

Entonces, el siguiente producto de precios debe satisfacer:

$$\prod_{i=1}^n \frac{p_{s_i}^{k_i}}{p_{s'_i}^{k'_i}} \leq 1.$$

Este axioma caracteriza completamente la racionalidad bajo utilidad dependiente del estado.

Teorema A.8.3. Un conjunto de datos es SDU-racional si y solo si satisface SARSDU.

Además, el artículo demuestra que SARSDU implica el *axioma débil de preferencia revelada* (WARP), el cual establece lo siguiente:

Definición A.8.4. Un conjunto de datos $\{(x^k, p^k)\}_{k=1}^K$ satisface WARP si no existen k, k' tales que:

$$p^k \cdot x^k \geq p^k \cdot x^{k'} \quad \text{y} \quad p^{k'} \cdot x^{k'} > p^{k'} \cdot x^k.$$

Proposición A.8.5. Si un conjunto de datos satisface SARSDU, entonces satisface WARP.

La prueba de esta proposición utiliza un argumento por contradicción: si un conjunto de datos violara WARP, entonces existiría una secuencia de elecciones que

permitiría construir un ciclo de comparación de precios y cantidades que violaría SARSDU. La clave del argumento radica en seleccionar un estado s^* dentro del conjunto de estados donde el consumo aumenta, y mostrar que bajo SARSDU, se preservan ciertas desigualdades que impiden que la contradicción ocurra. Por tanto, SARSDU es lo suficientemente fuerte como para implicar WARP.

En resumen, el modelo de utilidad dependiente del estado ofrece una representación más general y menos restrictiva que SEU, y SARSDU proporciona una caracterización precisa y empíricamente testeable de cuándo un conjunto de datos es racionalizable bajo este modelo.

El artículo cierra con tres extensiones clave. En primer lugar, analiza la relación entre el axioma SARSEU y la sofisticación probabilística. Aunque no se ofrece una caracterización completa, se demuestra (proposición 5 de [Echenique and Saito \(2015\)](#)) que SARSEU excluye violaciones del criterio de Epstein ([Epstein, 2000](#)), relacionado con la existencia de creencias subjetivas coherentes. Sin embargo, también se muestra que existen datos compatibles con un agente sofisticado probabilísticamente que no satisfacen SARSEU, lo cual permite distinguir ambos modelos empíricamente.

En segundo lugar, se estudia el modelo de utilidad esperada maximin de Gilboa y Schmeidler¹ ([Gilboa and Schmeidler, 1989](#)). En el caso 2×2 se prueba (proposición 6 de [Echenique and Saito \(2015\)](#)) que los conjuntos de datos compatibles con SEU también lo son con maximin, aunque esta equivalencia no se mantiene en casos más

¹El artículo introduce el modelo de *utilidad esperada maximin* (MEU) como una alternativa al modelo de *utilidad esperada subjetiva* (SEU) de Savage. Su propuesta parte del reconocimiento de que los agentes pueden enfrentar *incertidumbre ambigua*, es decir, situaciones donde no existe una única medida de probabilidad subjetiva sobre los estados del mundo. En lugar de maximizar la esperanza con respecto a una única creencia, los agentes maximizan la utilidad esperada mínima sobre un conjunto compacto y convexo de probabilidades subjetivas $M \subseteq \Delta(S)$:

$$\max_{x \in X} \min_{\mu \in M} \sum_{s \in S} \mu(s)u(x(s))$$

Este modelo captura *aversión a la ambigüedad* (no solo al riesgo), y permite explicar comportamientos inconsistentes con SEU, como los observados en los experimentos de Ellsberg. El artículo también presenta una *axiomatización formal* de este comportamiento, incluyendo una versión modificada del axioma de independencia, conocida como *Certainty Independence*, junto con otros supuestos como completitud, continuidad y monotonicidad.

generales.

Finalmente, los apéndices de [Echenique and Saito \(2015\)](#) ofrecen las pruebas técnicas: el apéndice A demuestra el teorema 1 utilizando una versión no lineal de las desigualdades de Afriat (lema 7) y técnicas de linealización; el apéndice B extiende la caracterización a entornos con probabilidades objetivas (SOEU), mediante el axioma SARSOEU (teorema 22); y el apéndice C establece que SARSEU puede verificarse computacionalmente en tiempo polinomial (proposición 2), habilitando su aplicación empírica.

A.9. La teoría de la decisión y el fenómeno de *casi implica cerca*

El artículo [Chambers and Echenique \(2025\)](#) propone una reformulación metodológica en teoría de la decisión mediante la relajación cuantitativa de axiomas clásicos. En lugar de exigir el cumplimiento estricto de axiomas como independencia en la teoría de la utilidad esperada, los autores introducen una noción de *grado de satisfacción* que permite medir la magnitud de su violación mediante un parámetro observable ε . A partir de ello, se establece un resultado estructural: si una preferencia satisface un axioma solo aproximadamente (es decir, con error ε), entonces existen dos funciones de utilidad u y v , donde u representa el comportamiento observado y v corresponde a una representación que cumple estrictamente el axioma, y ambas funciones están a una distancia δ acotada que depende de ε .

El enfoque tiene implicancias fundamentales. Por un lado, proporciona una interpretación teórica rigurosa para racionalizaciones empíricas basadas en pequeñas perturbaciones de la teoría de utilidad esperada, como aquellas que buscan justificar la paradoja de Allais mediante choques aditivos. Por otro lado, conecta formalmente la optimización aproximada —frecuente en problemas computacionalmente complejos— con desviaciones medibles del comportamiento respecto a axiomas normativos. Así, el trabajo ofrece una justificación microeconómica para el uso de aproximaciones ε -óptimas, tradicionalmente vistas con escepticismo debido a su carácter cardinal.

Los autores aplican esta metodología a tres dominios fundamentales: decisiones bajo riesgo, decisiones bajo incertidumbre y decisiones intertemporales. En cada caso, se considera una relajación de un axioma clave (por ejemplo, independencia o estacionariedad), y se demuestra que dicha relajación garantiza la existencia de una función de utilidad cercana a una representación normativa exacta. En dos instancias específicas, se recuperan representaciones exactas al suponer estructuras adicionales como homoteticidad o factores de descuento estrictamente decrecientes.

El tratamiento técnico se apoya en resultados de estabilidad de ecuaciones funcionales, permitiendo una cuantificación precisa del vínculo entre la magnitud de la desviación y la cercanía de las funciones de utilidad. En este sentido, la frase “*casi implica cerca*” sintetiza el aporte central del artículo.

Finalmente, los autores citan una reflexión de Samuelson sobre Savage, incluida en el propio artículo, que captura el espíritu de su propuesta: “*Savage o cualquier adherente de la teoría bernoulliana —y me incluyo entre sus simpatizantes— puede esperar algún día encontrar un rango significativo de comportamiento humano que pueda, con un grado satisfactorio de aproximación, ser explicado por los conceptos bernoullianos aplicados a un conjunto finito, especificable y conveniente de entidades delimitadas.*”

Los autores motivan su análisis a partir de una versión del experimento de la paradoja de Allais, ilustrando cómo ciertas decisiones empíricas que violan la teoría de utilidad esperada pueden interpretarse como casos de satisfacción aproximada de sus axiomas fundamentales. Consideran cuatro loterías sobre pagos monetarios: (A) \$4000 con probabilidad 80 % y \$0 con probabilidad 20 %, (B) \$3000 con certeza, (C) \$4000 con probabilidad 20 % y \$0 con 80 %, y (D) \$3000 con probabilidad 25 % y \$0 con 75 %. Esta configuración corresponde a una variante del ejemplo discutido originalmente por Allais (1953).

En un experimento conducido por [Kahneman and Tversky \(1979\)](#), una mayoría significativa de participantes (82 %) prefirió la lotería segura B sobre A , mientras que también prefirieron C sobre D (83 %). Este patrón de elecciones resulta inconsistente con la teoría de utilidad esperada, ya que viola el axioma de independencia. En efecto, si se prefiere $B \succ A$, entonces debería mantenerse la preferencia al mezclar ambas

con una misma lotería base (por ejemplo, la lotería nula). Sin embargo, la preferencia opuesta en el segundo par implica una inconsistencia estructural con dicho axioma.

Este comportamiento puede ser racionalizado mediante la Teoría de Prospectos Acumulativa, utilizando la especificación funcional de Kahneman y Tversky junto con los parámetros estimados por Wu and Gonzalez (1996). En este marco, una lotería que otorga x con probabilidad p y z con probabilidad complementaria se evalúa como:

$$v(x)g(p) + v(z)(1 - g(p)),$$

donde $v(x) = x^{0,54}$ y la función de ponderación es

$$g(p) = \frac{p^{0,74}}{[p^{0,74} + (1 - p)^{0,74}]^{1/0,74}}.$$

Bajo esta representación, se verifica que $B \succ A$ y $C \succ D$, reproduciendo las elecciones observadas en el experimento.

Más aún, los autores muestran que una pequeña modificación en las probabilidades utilizadas en las combinaciones de las loterías —específicamente, un ajuste de $\varepsilon = 0,02$ en las mezclas— permite aproximar el comportamiento observado mediante una versión suavizada del axioma de independencia. En particular, reemplazar la lotería D por $D' = 0,27 \times B + 0,73 \times 0$ genera una elección que es coherente con la preferencia revelada, y cuya diferencia con D es suficientemente pequeña como para ser tratada como una violación tolerable del axioma. Esta idea ilustra que ciertas desviaciones empíricas pueden ser reconciliadas con una representación de utilidad esperada cercana, siempre que se acepte una noción de cumplimiento aproximado de los axiomas normativos.

Los primeros resultados del artículo siguen muy de cerca la motivación expuesta anteriormente. El análisis se sitúa en el contexto de la toma de decisiones bajo riesgo, es decir, en el marco de la teoría de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern para loterías objetivas. En este entorno, el espacio de elección primitivo es el conjunto de todas las loterías sobre un conjunto finito de $d + 1$ premios.

Sea $\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} p_i = 1\}$ el d -simplex en \mathbb{R}^{d+1} . Los elementos de Δ se denominan *loterías*. Las loterías que asignan probabilidad uno a un único premio se denominan *loterías degeneradas*.

Sea \succeq una relación binaria sobre Δ , y considérense los siguientes axiomas sobre \succeq , donde $\varepsilon > 0$:

1. (*Orden débil continuo*). La relación \succeq es completa, transitiva y continua.
2. (*Extremalidad*). Sean \bar{p} y p los elementos mejor y peor evaluados en Δ según la relación \succeq , es decir, $\bar{p} \succeq p \succeq p$ para todo $p \in \Delta$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que ambos son loterías degeneradas.
3. (*Monotonicidad*). Si $\lambda, \lambda' \in [0,1]$ y $\lambda > \lambda'$, entonces se cumple:

$$\lambda\bar{p} + (1 - \lambda)p \succ \lambda'\bar{p} + (1 - \lambda')p.$$

4. (ε -reducción de loterías compuestas). Si:

$$p_0 \sim \alpha_0\bar{p} + (1 - \alpha_0)p, \quad p_1 \sim \alpha_1\bar{p} + (1 - \alpha_1)p, \quad \lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1 \sim \alpha\bar{p} + (1 - \alpha)p,$$

entonces se requiere que:

$$|\alpha - (\lambda\alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)| < \varepsilon.$$

Las propiedades recogidas en estos axiomas son familiares y resultan naturales dentro de la teoría estándar. El requerimiento de que \succeq sea un orden débil continuo garantiza la existencia de una representación por una función de utilidad continua, tal como establece el teorema clásico de Debreu. El axioma de extremalidad introduce premios extremos que actúan como mínimo y máximo dentro del conjunto de preferencias, lo cual es razonable al modelar loterías monetarias. Finalmente, el axioma de monotonicidad es comúnmente aceptado y difícilmente controvertido.

El último axioma introducido constituye la principal contribución del artículo. Se trata de una versión relajada del axioma de reducción de loterías compuestas. Este establece que una falla en la reducción exacta de una lotería compuesta del tipo $\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1$ puede ser enmendada mediante un ajuste en los pesos de mezcla, siempre que dicha corrección esté acotada por un parámetro $\varepsilon > 0$. En ese sentido, el axioma refleja que la versión estricta del axioma de reducción se satisface “casi exactamente”.

A partir de estos supuestos, se demuestra que existe una función de utilidad esperada (es decir, una función afín) cercana a una representación general de las preferencias. Este resultado se presenta en el siguiente teorema:

Teorema A.9.1. Supóngase que la relación de preferencia \succeq satisface los axiomas previos, incluida la ε -reducción de loterías compuestas. Entonces existe un par de funciones $(u, \ell) : \Delta \rightarrow [0, 1]^2$ tal que:

- u representa \succeq y $u(\Delta) = \ell(\Delta) = [0, 1]$;
- ℓ es afín;
- para toda lotería no degenerada $p \in \Delta$ se cumple que

$$|u(p) - \ell(p)| < (|\text{supp}(p)| - 1)\varepsilon,$$

y para toda lotería degenerada δ_i con $i = 1, \dots, d + 1$, se tiene $u(\delta_i) = \ell(\delta_i)$; en particular, $\|u - \ell\|_\infty < (d - 1)\varepsilon$;

- dado u , la función ℓ es única entre aquellas que satisfacen estas propiedades.

Teorema A.9.2. Si un par (u, ℓ) satisface las propiedades anteriores con $\|u - \ell\|_\infty < \varepsilon$, entonces la relación \succeq satisface el axioma de 3ε -reducción de loterías compuestas.

El teorema anterior asume una normalización común entre u y ℓ : ambas son funciones sobreyectivas sobre $[0, 1]$ y coinciden en las loterías degeneradas. Esta normalización permite dar sentido cardinal al parámetro ε , el cual tiene interpretación empírica en el axioma correspondiente. Además, la calidad de la aproximación mejora cuando se consideran loterías con soporte reducido, lo cual es habitual en contextos experimentales. También se observa que u y ℓ coinciden sobre las loterías degeneradas; por continuidad, esto sugiere que la aproximación es más precisa para loterías cercanas a la certeza. Sin embargo, demostrar esta propiedad de manera cuantitativa requeriría supuestos adicionales más fuertes.

A continuación, se introduce una segunda relajación, esta vez sobre el axioma de independencia, considerado fundamental en el desarrollo de la teoría de utilidad esperada (véase [Fishburn \(1989\)](#)). La idea es conceptualmente similar, aunque en este caso se obtiene una cota de aproximación más débil.

Axioma A.9.3 (ε -Independencia). Sea $p \sim q$ y $\alpha \in [0, 1]$. Entonces, para toda lotería $r \in \Delta$, existe $\alpha' \in [0, 1]$ tal que $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$ y se cumple:

$$\alpha p + (1 - \alpha)r \sim \alpha' q + (1 - \alpha')r.$$

Teorema A.9.4. Sea \succeq una relación de preferencia continua que satisface el axioma de ε -independencia. Entonces existe un par de funciones $(u, \ell) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

- u representa \succeq , ambas funciones están normalizadas con imagen $[0, 1]$, y se cumple $u(x) = \ell(x)$ para toda lotería degenerada x ;
- ℓ es afín;
- se cumple $\|u - \ell\|_\infty < (d + 1)^2 \varepsilon$.

Los autores señalan que, a diferencia del teorema A.9.1 y su conversa (teorema A.9.2), no se ha establecido aún si existe una recíproca para el teorema A.9.1: esto permanece como una interrogante abierta.

En la parte final del artículo, los autores extienden su marco analítico al caso de elección bajo incertidumbre subjetiva, utilizando el modelo de Anscombe-Aumann. En este entorno, los objetos de elección son pagos monetarios contingentes al estado, y se estudian versiones relajadas de axiomas clásicos como independencia, homoteticidad y convexidad. Los resultados muestran que, cuando estas condiciones se cumplen aproximadamente, pueden obtenerse representaciones de utilidad cercanas a las formas funcionales estándar: lineales, homogéneas o cuasi-convexas.

Asimismo, el artículo aborda la elección intertemporal, tanto en tiempo discreto como continuo, analizando versiones aproximadas del axioma de estacionariedad. Se demuestra que pequeñas desviaciones de dicho axioma permiten construir representaciones que se aproximan a modelos con descuento exponencial. En el caso continuo, se formula un resultado general que garantiza la existencia de una función de utilidad cercana a la forma clásica, bajo condiciones de regularidad y acotación del error temporal. El trabajo cierra señalando que la teoría de la decisión no necesita apoyarse exclusivamente en el cumplimiento exacto de axiomas normativos. El análisis de versiones relajadas de dichos axiomas permite justificar, de manera controlada y cuantificable, desviaciones del comportamiento respecto a la teoría estándar. Esta perspectiva abre la puerta a nuevos desarrollos empíricos y teóricos en los que la optimización aproximada y las representaciones funcionales cercanas adquieren un rol central.

Demostración del Teorema B.0.1. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que el peor elemento \underline{p} es la lotería degenerada sobre el $(d + 1)$ -ésimo premio, y que el mejor elemento \bar{p} es la lotería degenerada sobre el primer premio. Se define:

$$\Delta_- = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=1}^d x_i \leq 1 \right\}.$$

Cada elemento $x \in \Delta$ se identifica con el vector $(x_1, \dots, x_d) \in \Delta_-$ al omitir la última coordenada. En consecuencia, la relación \succeq puede considerarse definida sobre Δ_- .

Con esta identificación, el origen 0 representa la lotería degenerada sobre el peor premio, y el vector e_1 representa la lotería degenerada sobre el mejor premio. Las demás loterías degeneradas están representadas por los vectores base e_i para $i = 2, \dots, d$.

Por continuidad y monotonicidad, para todo $x \in \Delta_-$ existe un único $\alpha \in [0, 1]$ tal que:

$$x \sim \alpha e_1 + (1 - \alpha) \cdot 0.$$

Se define la función $u : \Delta_- \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $u(x) = \alpha$.

Lema A.9.5. Sean $x_1, \dots, x_k \in \Delta_-$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Entonces se cumple:

$$\left| u \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \right) - \sum_{j=1}^k \lambda_j u(x_j) \right| < (k - 1) \cdot \varepsilon.$$

Demostración del Lema B.0.5. Primero se demuestra el caso $k = 2$. Sean $p = x_1$, $q = x_2$ y $\lambda = \lambda_1$. Por definición de u se tiene:

$$p \sim u(p)\bar{p} + (1 - u(p))0, \quad q \sim u(q)\bar{p} + (1 - u(q))0,$$

y

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \sim u(\lambda p + (1 - \lambda)q)\bar{p} + (1 - u(\lambda p + (1 - \lambda)q))0.$$

Aplicando el axioma de ε -reducción se obtiene:

$$|u(\lambda p + (1 - \lambda)q) - \lambda u(p) - (1 - \lambda)u(q)| < \varepsilon.$$

Para el caso general, se utiliza inducción. Supóngase que la desigualdad se cumple para $k' = 2, \dots, k - 1$. Si $\lambda_1 = 1$, el resultado es inmediato. En caso contrario, es decir, si $\lambda_1 < 1$, se define:

$$q = \sum_{j=2}^k \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j.$$

Por hipótesis inductiva:

$$\left| u(q) - \sum_{j=2}^k \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} u(x_j) \right| < (k - 2) \cdot \varepsilon.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left| u \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \right) - \sum_{j=1}^k \lambda_j u(x_j) \right| &= |u(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)q) - \lambda_1 u(x_1) - (1 - \lambda_1)u(q)| \\ &\quad + (1 - \lambda_1) \left| u(q) - \sum_{j=2}^k \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} u(x_j) \right| \\ &\leq |u(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)q) - \lambda_1 u(x_1) - (1 - \lambda_1)u(q)| \\ &\quad + (1 - \lambda_1) \left| u(q) - \sum_{j=2}^k \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} u(x_j) \right| \\ &< \varepsilon + (k - 2)\varepsilon = (k - 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

□

Con el lema establecido, se completa la demostración del teorema. Se ha definido $u(e_i)$ para todo $i = 1, \dots, d$, así como $u(0)$. Cada $x \in \Delta_-$ puede expresarse como:

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^d x_i \right) \cdot 0 + \sum_{i=1}^d x_i \cdot e_i.$$

Se define la función lineal $\ell(x) = \sum_{i=1}^d x_i u(e_i)$. Entonces $\ell : \Delta_- \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, y satisface $u(e_i) = \ell(e_i)$ para todo i , así como $u(0) = \ell(0)$.

Para toda lotería x no degenerada, el lema implica:

$$|u(x) - \ell(x)| = \left| u \left(\sum_{i=1}^d x_i e_i \right) - \sum_{i=1}^d x_i u(e_i) \right| < (\text{supp}(x) - 1) \cdot \varepsilon,$$

donde $\text{supp}(x) = |\{i : x_i > 0\}| + \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^d x_i < 1\}}$.

Las funciones u y ℓ se extienden a todo Δ definiendo $u(\delta_{d+1}) = \ell(\delta_{d+1}) = 0$. Como $\ell(\alpha p + (1 - \alpha)q) = \alpha \ell(p) + (1 - \alpha)\ell(q)$, se concluye que $\ell : \Delta \rightarrow [0, 1]$ es afín. Además, no existe otra función afín que coincida con u en las loterías degeneradas.

Para la recíproca, supóngase que (u, ℓ) cumplen las propiedades del enunciado. Sean:

$$u(p_0) = u(\alpha_0 \bar{p} + (1 - \alpha_0) \underline{p}), \quad u(p_1) = u(\alpha_1 \bar{p} + (1 - \alpha_1) \underline{p}),$$

y

$$u(\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1) = u(\alpha \bar{p} + (1 - \alpha)\underline{p}).$$

Dado que $\ell(\bar{p}) = \ell(e_1) = 1$ y $\ell(\underline{p}) = \ell(0) = 0$, se obtiene:

$$\ell(\alpha \bar{p} + (1 - \alpha)\underline{p}) = \alpha_i.$$

Además, la hipótesis $\|u - \ell\|_\infty < \varepsilon$ implica:

$$|\ell(p_i) - \alpha_i| = |\ell(p_i) - \ell(\alpha \bar{p})| < \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$|\ell(\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1) - (\lambda \alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)| = |\lambda(\ell(p_0) - \alpha_0) + (1 - \lambda)(\ell(p_1) - \alpha_1)| < \varepsilon.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} |\alpha - (\lambda \alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)| &< |\ell(\alpha \bar{p}) - \ell((\lambda \alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)\bar{p})| + \varepsilon \\ &= |\ell(\alpha \bar{p}) - u(\alpha \bar{p}) + u(\alpha \bar{p}) - \ell((\lambda \alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)\bar{p})| + \varepsilon \\ &\leq |\ell(\alpha \bar{p}) - u(\alpha \bar{p})| + |u(\alpha \bar{p}) - \ell((\lambda \alpha_0 + (1 - \lambda)\alpha_1)\bar{p})| + \varepsilon \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Demostración del Teorema B.0.4. Sean $\bar{p}, \underline{p} \in \Delta$ tales que $\bar{p} \succeq p \succeq \underline{p}$ para todo $p \in \Delta$. Por continuidad y monotonicidad, para cada $p \in \Delta$ existe un único $\alpha \in [0,1]$ tal que $p \sim \alpha \bar{p} + (1 - \alpha)\underline{p}$. Se define entonces la función $u(p) := \alpha$.

Supóngase que se tiene un conjunto de loterías $p_1, \dots, p_K \in \Delta$, todas relacionadas con otras loterías q_1, \dots, q_K mediante $p_k \sim q_k$ para cada $k = 1, \dots, K$, y un conjunto de pesos $\lambda_k \geq 0$ tales que $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$. El objetivo es construir un nuevo conjunto de pesos $\mu_k \geq 0$ que satisfaga $\sum_k \mu_k = 1$ y $|\lambda_k - \mu_k| < K\varepsilon$ para todo k , de forma que:

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \sim \sum_{k=1}^K \mu_k q_k.$$

La demostración procede por pasos iterativos. Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que $\lambda_k > 0$ para todo k . Como $p_1 \sim q_1$, existe $\lambda'_1 \in [0,1]$ tal que $|\lambda_1 - \lambda'_1| < \varepsilon$

y se cumple:

$$\lambda_1 p_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{k=2}^K \frac{\lambda_k}{\sum_{j=2}^K \lambda_j} p_k \sim \lambda'_1 q_1 + (1 - \lambda'_1) \sum_{k=2}^K \frac{\lambda_k}{\sum_{j=2}^K \lambda_j} p_k.$$

Reescribiendo el segundo miembro como una combinación convexa, se define:

$$\lambda'_k := (1 - \lambda'_1) \cdot \frac{\lambda_k}{\sum_{j=2}^K \lambda_j}, \quad \text{para } k = 2, \dots, K,$$

y se observa que $|\lambda_k - \lambda'_k| < \varepsilon$ para cada $k = 2, \dots, K$, ya que:

$$|\lambda_k - \lambda'_k| = \lambda_k \left| 1 - \frac{1 - \lambda'_1}{1 - \lambda_1} \right| = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_1} |\lambda'_1 - \lambda_1| < \varepsilon.$$

Repitiendo este procedimiento K veces, se obtiene un conjunto de pesos μ_k que cumple $\sum_k \mu_k = 1$ y $|\lambda_k - \mu_k| < K\varepsilon$ para todo k , tal que:

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \sim \sum_{k=1}^K \mu_k q_k.$$

Considérese ahora la diferencia entre la utilidad de la combinación convexa $\sum_k \lambda_k p_k$ y la combinación de las utilidades individuales $\sum_k \lambda_k u(p_k)$. Para cada k , se tiene:

$$p_k \sim u(p_k) \bar{p} + (1 - u(p_k)) \underline{p}.$$

Aplicando la construcción anterior, se sigue que:

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \sim \sum_{k=1}^K \mu_k [u(p_k) \bar{p} + (1 - u(p_k)) \underline{p}] = \left(\sum_{k=1}^K \mu_k u(p_k) \right) \bar{p} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \mu_k u(p_k) \right) \underline{p}.$$

Por definición de u , esto implica:

$$u \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \right) = \sum_{k=1}^K \mu_k u(p_k).$$

Para acotar la diferencia con la media ponderada original con los pesos λ_k , se observa que:

$$\left| u \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \right) - \sum_{k=1}^K \lambda_k u(p_k) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^K \mu_k u(p_k) - \sum_{k=1}^K \lambda_k u(p_k) \right| = \sum_{k=1}^K |\lambda_k - \mu_k| u(p_k).$$

Dado que $u(p_k) \in [0,1]$, se cumple:

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k - \mu_k| u(p_k) \leq \sum_{k=1}^K |\lambda_k - \mu_k| < K^2 \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$\left| u\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k p_k\right) - \sum_{k=1}^K \lambda_k u(p_k) \right| < K^2 \varepsilon.$$

Para completar la demostración, se define la función $v : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$v(p) := \sum_{i=1}^{d+1} p_i u(\delta_i),$$

donde δ_i denota la lotería degenerada que asigna probabilidad 1 al i -ésimo premio. La función v es afín por construcción. Finalmente, como toda lotería $p \in \Delta$ tiene a lo sumo $d + 1$ elementos con probabilidad positiva, al aplicar la desigualdad anterior con $K \leq d + 1$ se concluye que:

$$|u(p) - v(p)| \leq (d + 1)^2 \varepsilon,$$

lo que completa la demostración del teorema. □

Apéndice B

Teorema min-max: derivación alternativa

En esta sección, vamos a seguir la clase impartida por el profesor Federico Echenique en la Pontificia Universidad Católica del Perú (6 de junio del 2024) (Echenique, 2024). Se ha adaptado la notación por consistencia. Consideremos un juego con dos personas

$$\Gamma = \{\{1, 2\}, (A_1, A_2), (u_1, u_2)\} \quad (\text{B.1})$$

tal que

$$u_1 + u_2 = 0.$$

A este juego (B.1) se le conoce como juego de suma cero. Podemos interpretar la función de pago $u = u_1$ como el pago que le hace el jugador 2 al jugador 1.

Teorema B.0.1. Min-max. Existe un perfil de estrategias (α_1^*, α_2^*) tal que

$$\max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1, \alpha_2) = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2). \quad (\text{B.2})$$

Al número $v = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ se le conoce como el valor del juego.

De acuerdo con el Teorema B.2, (α_1^*, α_2^*) es tal que

$$u(\alpha_1, \alpha_2^*) \leq u(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \leq u(\alpha_1^*, \alpha_2),$$

para todo $\alpha_1 \in \Delta(A_1)$ y $\alpha_2 \in \Delta(A_2)$. Esto significa que (α_1^*, α_2^*) es un punto silla de u . En particular, (α_1^*, α_2^*) es un equilibrio de Nash de Γ .

Demostración. Primero,

$$\begin{aligned} u(\alpha_1, \alpha_2) &\leq \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2) \\ \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1, \alpha_2) &\leq \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2) \\ \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1, \alpha_2) &\leq \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tan solo debemos demostrar que

$$\min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2) \leq \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1, \alpha_2).$$

Sea $n_i = |A_i|$ y, para cada $\alpha_2 \in \Delta(A_2)$, considere $a_1 \mapsto u(a_1, \alpha_2)$ y el vector $\mathbf{u}(\alpha_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$, donde las entradas de $\mathbf{u}(\alpha_2)$ son $u(a_1, \alpha_2)$.

Sea ahora

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{u}(\alpha_2) : \alpha_2 \in \Delta(A_2)\} \subset \mathbb{R}^{n_1}.$$

Note que \mathcal{C} es compacto pues $\Delta(A_2)$ lo es, y, por otro lado, \mathcal{C} también es convexo: dado $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda \mathbf{u}(\alpha_2^1) + (1 - \lambda) \mathbf{u}(\alpha_2^2) = \mathbf{u}(\lambda \alpha_2^1 + (1 - \lambda) \alpha_2^2).$$

Definamos ahora $m : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$m(x) = \max_{1 \leq i \leq n_1} \{x_i\}.$$

A partir de $m(\cdot)$, definamos también

$$\begin{aligned} v &= \inf \{m(x) : x \in \mathcal{C}\} \\ &= \inf \left\{ \max_{a_1 \in A_1} \{u(a_1, \alpha_2)\} : \alpha_2 \in \Delta(A_2) \right\}. \end{aligned}$$

Como \mathcal{C} es compacto, existe $\alpha_2^* \in \Delta(A_2)$ tal que

$$v = m(\mathbf{u}(\alpha_2^*)) = \max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, \alpha_2^*).$$

Note que $u(a_1, \alpha_2^*) \leq v$ para todo $a_1 \in A_1$. Por lo tanto, para todo $\alpha_1 \in \Delta(A_1)$,

$$u(\alpha_1, \alpha_2^*) = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}(\alpha_2^*) \leq v. \tag{B.3}$$

Ahora, considere el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : x \ll v\mathbf{1}\}.$$

Por definición de v , $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Como \mathcal{A} es convexo, por el Teorema de Separación, existe $p \in \mathbb{R}^{n_1}$ no nulo tal que

$$p \cdot x \leq p \cdot \mathbf{u}(\alpha_2), \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \alpha_2 \in \Delta(A_2).$$

Como los vectores en \mathcal{A} tienen entradas negativas arbitrariamente grandes, debemos tener $p \geq 0$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n_1} p_i \neq 0$,

$$\alpha_1^* = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_1} p_i} \right) p \in \Delta(A_1).$$

Dado que α_1^* es un múltiplo positivo de p ,

$$\alpha_1^* \cdot x \leq \alpha_1^* \cdot \mathbf{u}(\alpha_2) = u(\alpha_1^*, \alpha_2), \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \alpha_2 \in \Delta(A_2).$$

Note que $(v - \varepsilon)\mathbf{1} \in \mathcal{A}$, para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\forall \alpha_2 \in \Delta(A_2): \alpha_1^* \cdot (v - \varepsilon)\mathbf{1} \leq \alpha_1^* \cdot \mathbf{u}(\alpha_2). \quad (\text{B.4})$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0^+$,

$$v = \alpha_1^* \cdot v\mathbf{1} \leq \alpha_1^* \cdot \mathbf{u}(\alpha_2). \quad (\text{B.5})$$

Entonces, usando α_1^* en (B.3) y $\alpha_2 = \alpha_2^*$ en (B.5), $v = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$. Luego,

$$u(\alpha_1, \alpha_2^*) \leq v = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \leq u(\alpha_1^*, \alpha_2),$$

para todo $\alpha_1 \in \Delta(A_1)$ y $\alpha_2 \in \Delta(A_2)$. Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1, \alpha_2) &\geq \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} u(\alpha_1^*, \alpha_2) = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \\ \min_{\alpha_2 \in \Delta(A_2)} \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2) &\leq \max_{\alpha_1 \in \Delta(A_1)} u(\alpha_1, \alpha_2^*) = u(\alpha_1^*, \alpha_2^*). \end{aligned}$$

□

El punto clave en esta demostración es el trabajo realizado por la estrategia óptima del jugador 1, α_1^* . Se comenzó analizando la función m , que asigna, para cada estrategia α_2 del jugador 2, el peor escenario posible en términos de utilidad. Una forma de interpretar m es imaginar que el jugador 1 se mueve en segundo lugar, después de que el jugador 2 ha elegido α_2 , lo que determina un vector de utilidades $\mathbf{u}(\alpha_2)$. En este contexto, la estrategia óptima α_2^* del jugador 2 es aquella que maximiza su propio resultado bajo la suposición de que el jugador 1 se mueve después de él.

Sin embargo, al obtener la estrategia óptima α_1^* mediante el Teorema de Separación, podemos reformular esta idea. En lugar de considerar que el jugador 1 elige después, sustituimos esta perspectiva con la función de pago esperado $\alpha_2 \mapsto \alpha_1^* \cdot \mathbf{u}(\alpha_2)$. Las curvas de nivel de esta función corresponden a las líneas paralelas al hiperplano que separa los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{C} . Dado que esta función se minimiza cuando $\alpha_2 = \alpha_2^*$, la elección de α_2^* sigue siendo óptima para el jugador 2, incluso cuando la estrategia del jugador 1 ya está fijada en α_1^* antes de su decisión.

En otras palabras, si el jugador 1 *se mueve primero* al fijar su estrategia en α_1^* , el jugador 2 sigue encontrando óptimo elegir α_2^* , lo que confirma la solidez del equilibrio.

Prof.: César Martín Gallardo
Notes by Marcelo

Apéndice C

Juegos en dos etapas

El artículo *Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes* (Kreps and Scheinkman, 1983) demuestra que para obtener el resultado competitivo de Bertrand (precio igual al costo marginal) no basta con asumir competencia en precios; también es necesario que la producción ocurra *después* de la realización de la demanda. Kreps y Scheinkman construyen un juego de dos etapas donde, primero, las empresas eligen simultáneamente cuánto producir (con compromiso vinculante), y luego compiten en precios al estilo de Bertrand, sabiendo cuánto produjo cada una. La demanda se asigna al productor con menor precio, sujeto a la restricción de no poder vender más de lo producido en la primera etapa.

Bajo supuestos estándar sobre la demanda (por ejemplo, demanda lineal y costos constantes), el único equilibrio de Nash en este juego de dos etapas coincide con el resultado de Cournot: las empresas escogen las cantidades de Cournot en la primera etapa, y en la segunda compiten en precios bajo restricción de capacidad, lo cual induce un precio de equilibrio que coincide con el precio de Cournot. Si alguna empresa desvía su cantidad en la primera etapa, la otra responde fijando un precio lo suficientemente bajo en la segunda como para castigar dicha desviación. Así, la estructura secuencial del juego —compromiso sobre cantidades seguido de competencia en precios— basta para reproducir el equilibrio de Cournot sin necesidad de un subastador walrasiano.

Este resultado subraya que las predicciones de los modelos de oligopolio dependen no solo de las variables estratégicas (precio vs cantidad), sino también del contexto

institucional (forma del juego, tiempos, información disponible). En otras palabras, la naturaleza de las decisiones y su secuencia son fundamentales para determinar el equilibrio: no es razonable debatir en abstracto si el modelo de Cournot o el de Bertrand es *correcto*, su validez depende del entorno económico específico.

Formulación del modelo. Se considera un entorno con dos empresas idénticas que compiten en dos etapas. Ambas producen bienes perfectamente sustituibles, enfrentando una demanda agregada representada por una función de precio inversa $P(x)$ (precio como función de la cantidad total x), o equivalentemente una función de demanda directa $D(p)$ con $D(p) = P^{-1}(p)$. En la primera etapa, cada empresa elige simultáneamente su nivel de *capacidad* x_i , que representa la cantidad máxima que podrá producir más adelante a *costo marginal cero*. Instalar esta capacidad conlleva un costo fijo dado por una función convexa $b(x_i)$. Tras observar la capacidad del rival, ambas empresas pasan a la segunda etapa, donde eligen simultáneamente precios $p_i \in [0, P(0)]$. La asignación de demanda sigue una regla de racionamiento jerárquica: los consumidores compran primero al productor con el precio más bajo hasta agotar su capacidad. Si $p_1 < p_2$, la empresa 1 vende $z_1 = \min\{x_1, D(p_1)\}$ unidades y obtiene beneficios netos de $p_1 z_1 - b(x_1)$. La empresa 2 vende lo que reste de la demanda hasta su capacidad: $z_2 = \min\{x_2, \max\{0, D(p_2) - x_1\}\}$, con beneficios $p_2 z_2 - b(x_2)$. Si ambas fijan el mismo precio, comparten la demanda de forma proporcional a su capacidad:

$$z_i = \min \left\{ x_i, \frac{D(p_i)}{2} + \max \left\{ 0, \frac{D(p_i)}{2} - x_i \right\} \right\} = \min \left\{ x_i, \max \left\{ \frac{D(p_i)}{2}, D(p_i) - x_i \right\} \right\}.$$

La estructura del juego, incluyendo funciones de demanda, costos, y la regla de asignación, es de conocimiento común. Se asumen condiciones regulares sobre las funciones: (i) $P(x)$ está definida en un intervalo $(0, X)$, es decreciente, cóncava y suave, con $P(X) = 0$; (ii) la función de costos $b(x)$ es dos veces diferenciable, convexa, cumple $b(0) = 0$ y $0 < b'(0) < P(0)$, de modo que producir algo es rentable pero no trivial.

Este modelo formaliza la competencia secuencial con precompromiso de capacidad, mostrando que la decisión anticipada sobre cantidades condiciona los resultados de la competencia en precios posterior.

Preliminares: competencia de Cournot. Antes de analizar el juego de dos etapas con compromiso de capacidad y competencia en precios, los autores establecen resultados clave sobre la competencia de Cournot bajo los supuestos del modelo. Supóngase que las dos empresas compiten al estilo Cournot con una función de costos convexa, creciente y dos veces continuamente diferenciable, $c(x)$. La demanda agregada está dada por una función inversa $P(x)$, decreciente y cóncava. Definamos la función de mejor respuesta de Cournot:

$$r_c(y) = \operatorname{argmax}_{x \in [0, X-y]} [xP(x+y) - c(x)],$$

que satisface la condición de primer orden:

$$P(x+y) + xP'(x+y) = c'(x).$$

Esta función representa la cantidad óptima que una firma debe producir si anticipa que su rival suministrará una cantidad y . Bajo las condiciones del modelo, se demuestra que:

- $r_c(y)$ es continua, diferenciable y estrictamente decreciente siempre que $r_c(y) > 0$.
- La función total de oferta agregada $x + r_c(x)$ es creciente.
- Si c' domina estrictamente a otra función de costos d' , entonces $r_c(y) < r_d(y)$.
- Si $y > r_c(y)$, entonces $r_c(r_c(y)) < y$.

Estas propiedades garantizan la existencia y unicidad del equilibrio de Cournot, donde ambas firmas eligen las cantidades que satisfacen mutuamente sus mejores respuestas. Además, si una de las funciones de costo es más baja, la empresa correspondiente producirá una mayor cantidad en equilibrio.

Finalmente, en el caso particular donde los costos son nulos ($c(x) = 0$), se simplifican los análisis posteriores. Se denotan $r(y) := r_0(y)$ y $x^* := x^*(0)$ como la mejor respuesta y el equilibrio de Cournot respectivamente. También se define $R(y) = r(y)P(r(y) + y)$ como el ingreso correspondiente a dicha respuesta óptima. Estas formulaciones permiten estudiar de forma más clara la estructura estratégica de la competencia basada en cantidades.

Subjuegos con restricción de capacidad. Supóngase que en la primera etapa las empresas instalan capacidades x_1 y x_2 , respectivamente. Una vez que (x_1, x_2) es de conocimiento común, se define un *subjuego con restricción de capacidad*, una variante de la competencia de Bertrand con capacidad limitada (Edgeworth, 1897). Aunque los pagos en estos juegos son discontinuos, se ha demostrado que tales discontinuidades son tratables, y los equilibrios existen en casos con demanda lineal y costos constantes (Levitan and Shubik, 1972; Dasgupta and Maskin, 1986a, b). El hecho clave es que para cada par (x_1, x_2) , el subjuego tiene ingresos esperados *únicos* en equilibrio. Sean \bar{p}_i y \underline{p}_i el supremo e ínfimo del soporte de precios usados por la firma i . O sea,

$$\bar{p}_i = \inf\{p : \text{la firma } i \text{ pide menos que } p \text{ con probabilidad } 1\}.$$

En caso $\min_i x_i \geq D(0)$,¹ $\bar{p}_i = \underline{p}_i = 0$, y en caso $\min_i x_i = 0$, caemos en el caso del monopolio. Por lo tanto, desde ahora se analiza el caso $0 < \min_i x_i < D(0)$.

Lema C.0.1. Para todo i , se cumple:

$$\underline{p}_i \geq P(x_1 + x_2).$$

Demostración. Si la firma fija un precio muy bajo, es decir, $p < P(x_1 + x_2)$, entonces lo máximo que podrá vender es su capacidad x_i . El ingreso que obtiene en ese caso es $p \cdot x_i$. Pero si simplemente fija el precio $P(x_1 + x_2)$, venderá la misma cantidad (ya que la demanda total iguala la oferta total), y ganará más por unidad. Es decir:

$$P(x_1 + x_2) \cdot x_i > p \cdot x_i \quad \text{para todo } p < P(x_1 + x_2).$$

Entonces, bajar el precio por debajo de $P(x_1 + x_2)$ no tiene sentido: los ingresos disminuyen sin que la firma obtenga ventas adicionales, debido a la restricción de capacidad. \square

Lema C.0.2. Si $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ y ambos se usan con probabilidad positiva, entonces:

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_2 = P(x_1 + x_2), \quad \text{y } x_i < r(x_j) \text{ para } i = 1, 2.$$

¹Entonces estamos en un *Bertrand* clásico: ambas firmas pueden atender toda la demanda sin restricciones de capacidad. Por lo tanto, en equilibrio, la única posibilidad es que ambas bajen sus precios hasta el costo marginal, que en este modelo es 0.

Demostración. Supongamos que ambas firmas nombran con probabilidad positiva el mismo precio $\bar{p} = \bar{p}_1 = \bar{p}_2$. Si $\bar{p} > P(x_1 + x_2)$, entonces cada firma enfrenta un incentivo a subcotizar ligeramente. Al hacerlo, puede atraer más demanda, vendiendo más unidades a un precio apenas menor, lo que incrementa sus ingresos. Este desvío sería rentable y, por tanto, contradice que estemos en equilibrio. Por lo tanto, sólo puede ser equilibrio si $\bar{p} = P(x_1 + x_2)$. En ese caso, ambas firmas venden exactamente su capacidad y no tienen incentivo a reducir el precio, ya que no pueden vender más de lo que ya producen. Ahora supongamos que alguna firma, digamos la firma i , produce una cantidad mayor o igual a $r(x_j)$. Dado que $r(x_j)$ es la mejor respuesta de Cournot frente a x_j , entonces x_i no es óptima: la firma i podría cambiar su precio ligeramente y aumentar sus ingresos. Esto contradice nuevamente el equilibrio. Por lo tanto, debe cumplirse que $x_i < r(x_j)$ para ambas firmas. \square

Lema C.0.3. Si $x_i < r(x_j)$ para $i = 1, 2$, entonces un equilibrio puro es que ambas empresas nombren $P(x_1 + x_2)$ con probabilidad uno.

Demostración. La demostración del lema C.0.1 ya muestra que, bajo esta condición, nombrar un precio mayor que $P(x_1 + x_2)$ no es rentable para ninguna firma. En efecto, si una firma eleva su precio por encima de $P(x_1 + x_2)$, la otra la subcotiza y capta más demanda. Dado que la función $xP(x + x_j)$ es estrictamente cóncava, cualquier intento de subir el precio reduce el ingreso total. Por otro lado, si una firma baja su precio por debajo de $P(x_1 + x_2)$, no logra vender más cantidad (pues está limitada por su capacidad x_i), pero sí recibe un menor precio por unidad. Por tanto, su ingreso también disminuye. Como ambas firmas venden exactamente su capacidad a un precio que maximiza ingresos dados los niveles de producción, y ninguna tiene incentivo a desviarse, nombrar $P(x_1 + x_2)$ con probabilidad uno constituye un equilibrio puro. \square

Lema C.0.4. Si $\bar{p}_1 > \bar{p}_2$ o $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ pero \bar{p}_2 no se usa con probabilidad positiva, entonces:

- (a) $\bar{p}_1 = P(r(x_2) + x_2)$ y el ingreso de la firma 1 es $R(x_2)$,
- (b) $x_1 > r(x_2)$,
- (c) $\underline{p}_1 = \underline{p}_2 =: p$ y ninguno se usa con probabilidad positiva,

(d) $x_1 \geq x_2$,

(e) La firma 2 obtiene ingreso entre $\frac{x_2}{x_1}R(x_2)$ y $R(x_2)$.

Demostración. Para (a) y (b): Consideremos la función

$$\varphi(p) = p \cdot \min\{x_1, \max\{0, D(p) - x_2\}\}.$$

En palabras, $\varphi(p)$ representa los ingresos obtenidos por la firma 1 si fija el precio p y es subcotizada por su rival. Bajo la hipótesis de este lema, la firma 1, al fijar p_1 , obtiene precisamente $\varphi(p_1)$, ya que es seguro que será subcotizada. Si fija un precio $p > p_1$, la firma 1 obtiene precisamente $\varphi(p)$. Si la firma 1 fija un precio $p < p_1$, obtendrá al menos $\varphi(p)$. Por tanto, si existe un equilibrio, $\varphi(p)$ debe estar maximizada en p .

Debemos descartar el caso en que $x_2 \geq D(0)$. Ya que (por suposición) $D(0) > \min\{x_1, x_2\}$, entonces $x_2 \geq D(0)$ implicaría $D(0) > x_1$. Así, en equilibrio, la firma 2 obtendría ingresos esperados estrictamente positivos. Por tanto, en equilibrio, $x_2 > 0$. Pero entonces la firma 1 también debe obtener ingresos esperados estrictamente positivos. Y si $x_2 \geq D(0)$, entonces $\varphi(p_1) = 0$. Es decir, $x_2 > D(0)$ es incompatible con la hipótesis de este lema.

Al maximizar $\varphi(p)$, nunca se elegiría un p tal que $D(p) - x_2 > x_1$ o tal que $D(p) < x_2$. Por lo tanto, el valor relevante de p se encuentra en el intervalo $[P(x_1 + x_2), P(x_2)]$. Para cada p en este intervalo, existe un nivel correspondiente de x , a saber, $x(p) = D(p) - x_2$, tal que $\varphi(p) = x(p)P(x(p) + x_2)$. Nótese que $x(p)$ recorre el intervalo $[0, x_1]$. Pero sabemos que

$$\operatorname{argmax}_{x(p) \in [0, x_1]} x(p)P(x(p) + x_2) = r(x_2) \wedge x_1,$$

por la estricta concavidad de $xP(x + x_2)$. Si la restricción de capacidad x_1 es vinculante (incluso débilmente), entonces $p_1 = P(x_1 + x_2)$, y el lema C.0.1 implica que estamos en el caso del lema C.0.2, contradiciendo así la hipótesis de este lema. Por tanto, debe ser el caso que la restricción no es vinculante, o que $r(x_2) < x_1$ (lo cual es (b)), $p_1 = P(r(x_2) + x_2)$, y los ingresos en equilibrio de la firma 1 son $R(x_2)$ (lo cual es (a)).

Para (c): Supongamos que $p_i < p_j$. Al fijar p_i , la firma i obtiene $p_i(D(p_i) \wedge x_i)$. Aumentar esto a cualquier nivel $p \in (p_i, p_j)$ le proporciona $p(D(p) \wedge x_i)$. Así, tenemos un equilibrio solo si $D(p_i) < x_i$ y p_i es el precio monopolístico. Por la estricta concavidad

de $xP(x)$, moverse desde p_i en dirección al precio monopolístico aumentará los ingresos en el margen. Es decir, $p_i = P(r(0))$. Pero $p_i < p_j = P(r(x_2) + x_2) < P(r(0))$, lo cual sería una contradicción. Por tanto, $p_i = p_j$. Denotamos este valor común por p en lo que sigue. Esta es la primera parte de (c).

Para la segunda parte de (c), nótese primero que $p > P(x_1 + x_2)$. Pues si $p = P(x_1 + x_2)$, entonces al fijar (cerca de) p , la firma 1 obtendría como máximo $P(x_1 + x_2)x_1$. Dado que $x_1 > r(x_2)$ y que los ingresos en equilibrio de la firma 1 son $R(x_2)$, esto es imposible.

Supongamos que la firma con (débilmente) menor capacidad fijó p con probabilidad positiva. Entonces la firma con mayor capacidad podría, fijando un precio ligeramente menor que p , aumentar estrictamente sus ingresos esperados. Vende estrictamente más con probabilidad positiva, a un precio ligeramente menor. Por tanto, la firma con menor capacidad nombra p con probabilidad cero. Como p es el ínfimo del soporte de los precios nombrados por la firma con menor capacidad, esta firma debe entonces nombrar precios arbitrariamente cercanos y superiores a p . Pero si su rival nombra p con probabilidad positiva, la firma de menor capacidad estaría mejor (ya que $p > P(x_1 + x_2)$) nombrando un precio justo por debajo de p que uno justo por encima. Por tanto, ninguna firma puede nombrar p con probabilidad positiva.

Para (d) y (e): Por (c), los ingresos en equilibrio de la firma i deben ser $p(D(p) \wedge x_i)$. Sabemos que $p < p_1 = P(x_2 + r(x_2))$, por lo que $D(p) > D(P(x_2 + r(x_2))) = x_2 + r(x_2)$, y por tanto $D(p) > x_2$. Entonces, la firma 2 ciertamente recibe px_2 en equilibrio. La firma 1 no recibe más de px_1 , por lo que las cotas en la parte (e) se establecen tan pronto como se muestre (d).

Supongamos que $x_2 > x_1$. Entonces $D(p) > x_1$, y los ingresos en equilibrio de la firma 1 son px_1 . Ya sabemos que también son $R(x_2)$, por lo que tendríamos $p = R(x_2)/x_1$, y la firma 2 obtiene $R(x_2)x_2/x_1$. Al nombrar el precio $P(r(x_1) + x_1)$ (mayor que $p_1 = P(r(x_2) + x_2)$), la firma 2 obtendría $R(x_1)$. Tendríamos así una contradicción si mostramos que $x_1 > r(x_2)$ implica $x_1R(x_1) > x_2R(x_2)$. Sea $\theta(x) =$

$xR(x) = xr(x)P(r(x) + x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= r(x)P(r(x) + x) + xr'(x)P(r(x) + x) + xr(x)P'(r(x) + x)(r'(x) + 1) \\ &= (r(x) - x)P(r(x) + x) + x(r'(x) + 1)(P(r(x) + x) + r(x)P'(r(x) + x)). \end{aligned}$$

El último término es cero por la definición de $r(x)$, por lo tanto,

$$\theta'(x) = (r(x) - x)P(r(x) + x).$$

Así, $x_2R(x_2) - x_1R(x_1) = \theta(x_2) - \theta(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (r(x) - x)P(r(x) + x) dx$. El integrando es positivo para $x < x^*$ y estrictamente negativo para $x > x^*$. Queremos mostrar que la integral es negativa, por lo que el peor caso (en términos de nuestro objetivo) es aquel en el cual $x_1 < x^*$ y x_2 es lo más pequeño posible. Dado que $x_1 > r(x_2)$, para todo $x_1 < x^*$ el peor caso es donde x_2 es apenas mayor que $r^{-1}(x_1)$. Así, habremos alcanzado nuestro objetivo (de contradecir $x_2 > x_1$) si mostramos que para todo $x < x^*$, $\theta(x) - \theta(r^{-1}(x)) \geq 0$.

Pero $\theta(x) - \theta(r^{-1}(x)) = xr(x)P(x + r(x)) - r^{-1}(x)xP(r^{-1}(x) + x)$. Esto es no negativo si y solo si $r(x)P(x + r(x)) - r^{-1}(x)P(r^{-1}(x) + x) \geq 0$, lo cual es ciertamente verdadero, ya que $r(x)$ es la mejor respuesta a x . \square

Lema C.0.5. Supóngase que $x_1 \geq x_2$ y que $x_1 > r(x_2)$. Entonces existe un equilibrio en estrategias mixtas en el subjuego correspondiente a (x_1, x_2) en el cual se cumplen todas las condiciones y conclusiones del lema C.0.4. Además, este equilibrio tiene las siguientes propiedades:

- Cada firma selecciona precios de acuerdo con funciones de distribución continuas y estrictamente crecientes sobre un intervalo común.
- La firma 1 nombra el precio superior del intervalo con probabilidad estrictamente positiva siempre que $x_1 > x_2$.
- Si denotamos por $T_i(p)$ la función de distribución acumulada de precios para la firma i , entonces se cumple que:

$$T_1(p) \leq T_2(p) \quad \text{para todo } p,$$

con desigualdad estricta en algún intervalo si $x_1 > x_2$. Es decir, la estrategia de la firma 1 estocásticamente domina a la de la firma 2.

Proposición C.0.6. En el juego de dos etapas descrito —en el cual las firmas primero eligen capacidades y luego compiten en precios tipo Bertrand con restricciones de capacidad— existe un único resultado de equilibrio. Dicho equilibrio corresponde al resultado de Cournot: ambas firmas eligen capacidades $x_1 = x_2 = x^*(b)$, donde $x^*(b)$ es la cantidad de equilibrio en el juego de Cournot con función de costo b , y ambas nombran precios $p_1 = p_2 = P(2x^*(b))$ en la etapa de precios.

Demostración. La demostración se desarrolla en cuatro pasos y usa el lema C.0.5.

Paso 1: Preliminares. Sea un equilibrio cualquiera del juego. Como parte de este equilibrio, cada firma i elige su capacidad de acuerdo con una medida de probabilidad μ_i con soporte $S_i \subset \mathbb{R}_+$. Denotemos por $\beta_i(x_1, x_2)$ la (posiblemente mixta) estrategia de precios que adopta la firma i en el subjuego asociado a las capacidades (x_1, x_2) . Excepto sobre un subconjunto de medida nula de $S_1 \times S_2$, se requiere que $\beta_i(x_1, x_2)$ sea una mejor respuesta a $\beta_j(x_1, x_2)$. Definamos $Q_i = \{(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 : \beta_i(x_1, x_2) \text{ es mejor respuesta a } \beta_j(x_1, x_2)\}$, con $i \neq j$, y sea $Q = Q_1 \cap Q_2$, de modo que $(\mu_1 \times \mu_2)(Q) = 1$. Para cada $x_i \in S_i$, definimos el conjunto de respuestas óptimas seguras:

$$E(x_i) = \{x_j \in S_j : (x_i, x_j) \in Q\}, \quad \text{y} \quad X_i = \{x_i \in S_i : \mu_j(E(x_i)) = 1\}.$$

Entonces $\mu_i(X_i) = 1$, es decir, la firma i casi siempre elige valores de capacidad tales que el rival responde óptimamente.

Sea π_i la ganancia esperada de la firma i en equilibrio, y $\pi_i(x_i)$ su ganancia esperada si fija capacidad x_i (y el rival juega según μ_j). Definimos el subconjunto:

$$\widehat{X}_i = \{x_i \in X_i : \pi_i(x_i) = \pi_i\},$$

que contiene los valores de capacidad óptimos. Como las funciones de ingreso en el subjuego son continuas en (x_1, x_2) y las ganancias están acotadas, el ínfimo y supremo de \widehat{X}_i , denotados \underline{x}_i y \bar{x}_i , también son óptimos. Sin pérdida de generalidad, supongamos desde ahora que $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$.

Paso 2: $\bar{x}_1 \geq r_b(\bar{x}_2)$. Supongamos lo contrario, es decir, que $\bar{x}_1 < r_b(\bar{x}_2)$. Entonces, en el subjuego asociado a (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , la firma 2 obtiene ingreso esperado de $P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\bar{x}_2 - b(\bar{x}_2)$.

Si ahora la firma 2 aumenta ligeramente su capacidad a $\bar{x}_2 + \varepsilon$, donde $\bar{x}_1 < r_b(\bar{x}_2 + \varepsilon)$, su ingreso se convierte en:

$$(\bar{x}_2 + \varepsilon)P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \varepsilon) - b(\bar{x}_2 + \varepsilon).$$

Dado que P es continua y b es suavemente creciente, este ingreso es mayor que el anterior, contradiciendo la optimalidad de \bar{x}_2 . Por tanto, debe ser $\bar{x}_1 \geq r_b(\bar{x}_2)$.

Paso 3: Se prueba que $\bar{x}_1 \leq r_b(\bar{x}_2)$. Supongamos por contradicción que $\bar{x}_1 > r_b(\bar{x}_2)$. Evaluamos entonces las ganancias esperadas de la firma 1 cuando fija su capacidad en \bar{x}_1 y enfrenta a la distribución de capacidad μ_2 del rival. Observamos que en el subjuego, si $x_1 > r(x_2)$, la firma 1 obtiene ingreso $R(x_2) = r(x_2)P(r(x_2) + x_2)$. En cambio, si $x_1 < r(x_2)$, su ingreso es simplemente $x_1P(x_1 + x_2)$. Así, la ganancia esperada de la firma 1 al elegir \bar{x}_1 es:

$$\pi_1 = \int_{(r^{-1}(\bar{x}_1), \bar{x}_2]} (R(x_2) - b(\bar{x}_1)) \mu_2(dx_2) + \int_{[x_2, r^{-1}(\bar{x}_1)]} (\bar{x}_1 P(\bar{x}_1 + x_2) - b(\bar{x}_1)) \mu_2(dx_2). \quad (C.1)$$

Ahora, consideremos que la firma 1 reduce su capacidad ligeramente a $\bar{x}_1 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y tal que $\bar{x}_1 - \varepsilon > r_b(\bar{x}_2)$. Analizamos su nueva ganancia esperada, que será al menos:

$$\pi'_1 = \int_{[r^{-1}(\bar{x}_1 - \varepsilon), \bar{x}_2]} R(x_2) d\mu_2(x_2) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon) \quad (C.2)$$

$$+ \int_{[x_2, r^{-1}(\bar{x}_1 - \varepsilon)]} [(\bar{x}_1 - \varepsilon)P(\bar{x}_1 - \varepsilon + x_2) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon)] d\mu_2(x_2). \quad (C.3)$$

Queremos probar que $\pi'_1 > \pi_1$ para ε suficientemente pequeño. Para ello, consideramos la diferencia $\pi'_1 - \pi_1$, que podemos analizar separando los intervalos de integración en tres subconjuntos:

- **Intervalo I:** $x_2 \in [r^{-1}(\bar{x}_1 - \varepsilon), \bar{x}_2]$.

En este intervalo, la función de ingreso cambia de $R(x_2)$ a $R(x_2)$, pero el costo marginal cambia de $b(\bar{x}_1)$ a $b(\bar{x}_1 - \varepsilon)$. Por tanto, la diferencia en el integrando es:

$$R(x_2) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon) - [R(x_2) - b(\bar{x}_1)] = b(\bar{x}_1) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon) = \varepsilon b'(\bar{x}_1) + o(\varepsilon).$$

Como $b'(\cdot) > 0$, esta expresión es estrictamente positiva para ε pequeño.

- **Intervalo II:** $x_2 \in [\underline{x}_2, r^{-1}(\bar{x}_1)]$.

Aquí, el integrando cambia de:

$$\bar{x}_1 P(\bar{x}_1 + x_2) - b(\bar{x}_1) \quad \text{a} \quad (\bar{x}_1 - \varepsilon) P(\bar{x}_1 - \varepsilon + x_2) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon).$$

Entonces, la diferencia es:

$$[(\bar{x}_1 - \varepsilon) P(\bar{x}_1 - \varepsilon + x_2) - b(\bar{x}_1 - \varepsilon)] - [\bar{x}_1 P(\bar{x}_1 + x_2) - b(\bar{x}_1)].$$

Expandiendo en serie de Taylor y simplificando:

$$\approx -\varepsilon [P(\bar{x}_1 + x_2) + \bar{x}_1 P'(\bar{x}_1 + x_2) - b'(\bar{x}_1)] + o(\varepsilon).$$

Por hipótesis (de paso 2), $\bar{x}_1 \geq r_b(\bar{x}_2)$, y entonces este término es no negativo. De hecho, si μ_2 asigna masa positiva a este intervalo, la contribución neta será estrictamente positiva para ε pequeño.

- **Intervalo III:** $x_2 \in (r^{-1}(\bar{x}_1), r^{-1}(\bar{x}_1 - \varepsilon))$. Este intervalo es pequeño (de ancho $O(\varepsilon)$), y los integrandos son funciones continuas, por lo que la contribución total de esta parte es $o(\varepsilon)$.

Por lo tanto, si μ_2 asigna masa positiva a los intervalos I o II (lo cual sucede por la hipótesis $\bar{x}_1 > r_b(\bar{x}_2)$), entonces $\pi'_1 - \pi_1 > 0$ para ε suficientemente pequeño. Esto contradice la optimalidad de \bar{x}_1 como elección de capacidad. Por tanto, se concluye que debe cumplirse:

$$\bar{x}_1 \leq r_b(\bar{x}_2).$$

Paso 4: Unicidad y carácter del equilibrio. De los pasos 2 y 3 se concluye que:

$$\bar{x}_1 = r_b(\bar{x}_2), \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = r_b(\bar{x}_1).$$

Esto implica que $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = x^*(b)$, donde $x^*(b)$ es el punto fijo de la mejor respuesta de Cournot con costo b . En consecuencia, ambas firmas eligen con probabilidad uno la misma capacidad $x^*(b)$, y en el subjuego asociado, el equilibrio en precios es que ambas nombren el precio:

$$P(2x^*(b)),$$

que corresponde al precio de equilibrio de Cournot. Esto completa la demostración. \square

Incluso en una versión más realista del modelo, donde tanto la instalación de capacidad como la producción posterior son actividades costosas con estructuras convexas, el resultado de equilibrio continúa siendo el de Cournot, siempre que el costo de capacidad sea positivo en el margen. Esto subraya que la preasignación de cantidades —seguida de competencia en precios con restricciones de capacidad— conduce de manera robusta a resultados tipo Cournot. Es particularmente relevante que dicho resultado no requiere que el costo de capacidad sea elevado en términos absolutos, sino únicamente distinto de cero marginalmente. Así, incluso en situaciones que visualmente parecen de tipo Bertrand (por ejemplo, cuando la mayoría de los costos se incurren después de conocer la demanda), el modelo predice un comportamiento compatible con Cournot. Los autores sugieren, como línea futura, que la introducción de incertidumbre sobre la demanda podría modificar sustancialmente estos resultados.

Apéndice D

Existencia de equilibrios de Nash en juegos discontinuos

Seguimos en esta sección a [Reny \(1999\)](#). Muchos juegos económicos relevantes poseen espacios de estrategias infinitos. Este es el caso, por ejemplo, en modelos clásicos como el de competencia a la Bertrand ([Bertrand, 1883](#)), localización a la Hotelling ([Hotelling, 1929](#)), o en subastas ([Milgrom and Weber, 1982](#)). En estos contextos, las funciones de pago suelen ser *discontinuas*, lo que invalida la aplicación directa de los teoremas clásicos de existencia de equilibrios en estrategias puras, como [Nash \(1950\)](#) o [Glicksberg \(1952\)](#). En algunos juegos con discontinuidades, es posible construir directamente un equilibrio. Sin embargo, este enfoque no siempre es viable. Por ejemplo, en ciertas subastas multiunitarias del tipo *paga lo que ofreces* (*pay-your-bid*), dicha construcción directa se vuelve intratable. El artículo [Reny \(1999\)](#) ofrece una *condición general de existencia de equilibrio de Nash en estrategias puras* para juegos con discontinuidades, extendiendo y unificando resultados previos de la literatura. Este trabajo generaliza los teoremas de existencia de [Nash \(1950\)](#), [Glicksberg, 1952](#); [Dasgupta and Maskin, 1986a](#); [Mertens, 1986](#); [Simon, 1987](#)), introduciendo una condición denominada *better-reply security* (seguridad por mejor respuesta).

Un juego es *better-reply secure* si, para toda estrategia conjunta x^* que *no* es un equilibrio de Nash, y para todo vector de pagos límite u^* que puede surgir como resultado de secuencias de estrategias cercanas a x^* , *existe al menos un jugador i que*

puede garantizarse un pago superior a u_i^* mediante una desviación unilateral, incluso si los demás jugadores se desvían ligeramente de x^* . En otras palabras, la condición de *better-reply security* asegura que si una estrategia conjunta no es un equilibrio, entonces algún jugador tiene un incentivo robusto para desviarse, en el sentido de que esa desviación le proporciona un pago estrictamente mayor que el que podría obtener en el entorno de x^* , aún si sus rivales no permanecen exactamente en x^* . Esta idea permite manejar discontinuidades en los pagos y refinar los criterios de existencia de equilibrio. Un ejemplo ilustrativo es la competencia de precios a la Bertrand. Dado un vector de precios p^* , cada empresa puede garantizarse una ganancia cercana a su valor máximo al fijar un precio ligeramente inferior al mínimo de sus rivales, suponiendo que ningún otro jugador iguala exactamente ese precio. Esta ganancia se puede *asegurar* porque se mantiene incluso si los precios de los demás cambian levemente. Ahora bien, si p^* *no* es un equilibrio, entonces —dado que el beneficio total de la industria es una función continua— debe existir un jugador cuyo pago cae por debajo de lo que puede garantizarse, generando un incentivo claro para desviarse. Este razonamiento ilustra por qué la competencia a la Bertrand cumple la condición de *better-reply security*.

El resultado principal de [Reny \(1999\)](#) establece que si un juego posee espacios de estrategias *convexos y compactos*, y sus funciones de pago son *cuasi cóncavas* respecto a la estrategia del jugador, entonces existe un *equilibrio de Nash en estrategias puras* si, además, el juego cumple la condición de *better-reply security*. Reny muestra que esta condición generaliza dos nociones previamente consideradas en la literatura:

- **Upper semicontinuidad recíproca** (*reciprocally upper semicontinuous games*): Introducida por [Simon \(1987\)](#), se refiere a juegos donde, si la función de pago de un jugador presenta una caída brusca, otro jugador experimenta una ganancia abrupta. Esta reciprocidad mitiga los efectos de discontinuidades individuales en el comportamiento agregado.
- **Seguridad de pago** (*payoff security*): Para cada estrategia conjunta x , incluso si los demás jugadores no juegan exactamente x_{-i} sino algo cercano, cada jugador tiene alguna estrategia que le permite garantizarse un pago cercano a $u_i(x)$.

La condición introducida por Reny engloba estas dos propiedades y permite probar la

existencia de equilibrio sin requerir continuidad total en los pagos.

Sean N jugadores. Cada jugador $i = 1, 2, \dots, N$ posee un conjunto de estrategias puras $A_i = X_i$, el cual es un subconjunto no vacío y compacto de un espacio vectorial topológico. Cada jugador tiene una función de pago $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \otimes_{i=1}^N A_i$ representa el conjunto de perfiles de estrategias puras. Bajo estas condiciones, denotamos el juego como $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ y lo llamamos un *juego compacto*.

A lo largo del análisis, se asume que el producto de cualquier número de conjuntos está dotado con la *topología producto*. Como de costumbre, el símbolo $-i$ se refiere a todos los jugadores excepto i . En particular, definimos¹

$$A_{-i} = \otimes_{j \neq i} A_j,$$

y para todo $a \in A$, denotamos por a_{-i} al perfil de estrategias de todos los jugadores distintos de i . El vector de funciones de pago se denota por $u : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ y está definido por

$$u(a) = (u_1(a), \dots, u_N(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

El *gráfico* de la función de pagos vectorial es el subconjunto de $A \times \mathbb{R}^N$ dado por

$$\{(a, u) \in A \times \mathbb{R}^N \mid u = u(a)\}.$$

Finalmente, si cada conjunto A_i es convexo, y para cada jugador i y todo $a_{-i} \in A_{-i}$, la función $u_i(\cdot, a_{-i})$ es cuasi cóncava en A_i , entonces se dice que el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es un *juego cuasi cóncavo*.

Las siguientes definiciones desempeñan un papel central en los resultados principales.

Definición D.0.1. Seguridad de pago. Se dice que el jugador i puede *asegurar* un pago $\gamma \in \mathbb{R}$ en un perfil de estrategias $a \in A$ si existe una estrategia $a_i \in A_i$ tal que se cumple

$$u_i(a_i, a'_{-i}) \geq \gamma \quad \text{para todo } a'_{-i} \in U,$$

donde U es una vecindad abierta de a_{-i} en A_{-i} . Es decir, el jugador i dispone de una estrategia que le garantiza al menos el pago γ , incluso si los demás jugadores se desvían ligeramente de a_{-i} .

¹En el artículo original, se usa la notación (X, x) y no (A, a) .

La siguiente condición se formula en términos del cierre del gráfico de la función de pagos vectorial del juego. Aunque esta noción se encuentra bien definida en un entorno general de espacios topológicos, puede resultar más intuitiva si se considera el caso particular de espacios métricos. En ese contexto, un par (a^*, u^*) pertenece a la cerradura del gráfico si u^* es el límite de una sucesión de vectores de pago generada por una sucesión de estrategias que converge a a^* .

Definición D.0.2. Seguridad por mejor respuesta. Un juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ se dice *seguro por mejor respuesta* si, para todo par (a^*, u^*) que pertenece al cierre del gráfico de la función de pagos vectorial y tal que a^* no constituye un equilibrio, existe algún jugador i que puede asegurar un pago estrictamente mayor que u_i^* en a^* .

En otras palabras, un juego es seguro por mejor respuesta si, para cada perfil de estrategias a^* que no representa un equilibrio y todo vector de pagos u^* que puede resultar de aproximarse a a^* , existe un jugador que dispone de una estrategia que le proporciona un pago estrictamente superior a u_i^* , incluso cuando los demás jugadores se desvían ligeramente de a^* .

Los juegos con funciones de pago continuas siempre satisfacen esta propiedad, ya que toda mejor respuesta asegura un pago superior al que se obtendría fuera del equilibrio, incluso frente a estrategias cercanas. Sin embargo, muchos juegos económicos con pagos discontinuos también son seguros por mejor respuesta. Como se señaló anteriormente, el juego de competencia de precios de tipo Bertrand constituye un ejemplo de ello. También se verá más adelante que las subastas de primer precio verifican esta propiedad. No obstante, en tales casos, las funciones de pago pueden no ser cuasi cóncavas respecto a la estrategia propia, por lo cual el siguiente teorema no siempre resulta aplicable directamente. Aú así, un corolario posterior garantiza la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas en esos entornos.

Teorema D.0.3. Si el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es compacto, cuasi cóncavo y seguro por mejor respuesta, entonces posee un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Un aspecto técnico de interés radica en que, como ocurre en algunos resultados previos, no se requiere que el conjunto A sea un espacio de Hausdorff ni localmente convexo. Esto contrasta con muchos teoremas clásicos de punto fijo que sí imponen

dichas condiciones topológicas. En una sección posterior se demostrará que este resultado generaliza los teoremas clásicos sobre la existencia de equilibrios en estrategias mixtas. Además, como se verá en un corolario posterior, el resultado también se extiende al caso general de juegos no cero suma con múltiples jugadores, proporcionando condiciones suficientes para la existencia de equilibrios en estrategias puras. Aunque verificar la seguridad por mejor respuesta es relativamente directo, en ocasiones resulta más sencillo comprobar condiciones alternativas que implican dicha propiedad. A continuación, se presentan dos condiciones útiles que, en conjunto, garantizan la seguridad por mejor respuesta.

Definición D.0.4. Seguridad de pago. Un juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ se considera *seguro en pagos* si, para todo perfil de estrategias $a \in A$ y todo $\varepsilon > 0$, cada jugador i puede asegurar un pago de al menos $u_i(a) - \varepsilon$ en una vecindad de a_{-i} .

La seguridad en pagos exige que, para toda estrategia $a \in A$, cada jugador disponga de una estrategia que le garantice virtualmente el pago que recibe en a , incluso si los demás jugadores se desvían ligeramente de dicho perfil. Este concepto refleja la importancia de la robustez del pago de un jugador frente a perturbaciones en las estrategias de sus oponentes. La noción de seguridad en pagos formaliza esta idea de estabilidad frente a desviaciones cercanas.

Definición D.0.5. Semicontinuidad superior recíproca. Un juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es *semicontinuo superiormente de forma recíproca* si, para todo par (a, u) en la clausura del gráfico de la función de pagos vectorial, se cumple lo siguiente: si $u_i(a) < u_i$ para todo jugador i , entonces necesariamente $u_i(a) = u_i$ para todo i .

La semicontinuidad superior recíproca requiere que el pago de algún jugador aumente siempre que el pago de otro jugador disminuya. Esta propiedad generaliza la condición según la cual la suma de los pagos de todos los jugadores debe ser semicontinua superiormente, y la reemplaza por una relación estructural más flexible y ordinal entre los pagos individuales.

A continuación se establece la conexión entre estas dos propiedades y la seguridad por mejor respuesta:

Proposición D.0.6. Si el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es semicontinuo superiormente de forma recíproca y seguro en pagos, entonces es seguro por mejor respuesta.

Demostración. Sea (a^*, u^*) un punto en la clausura del gráfico de la función de pagos vectorial del juego, y supóngase que a^* no es un equilibrio. Dado que el juego es semicontinuo superiormente de forma recíproca, se cumple una de las siguientes dos posibilidades:

- Existe un jugador i tal que $u_i(a^*) > u_i^*$.
- Para todo jugador i , se tiene $u_i(a^*) = u_i^*$.

En el segundo caso, como a^* no es un equilibrio, debe existir un jugador i y una desviación a_i tal que

$$u_i(a_i, a_{-i}^*) > u_i(a^*) = u_i^*.$$

En consecuencia, en ambos casos existe un jugador i y una estrategia a_i (que puede coincidir con a_i^* en el primer caso) tal que

$$u_i(a_i, a_{-i}^*) > u_i^*.$$

Fijado ese jugador i , se elige $\varepsilon > 0$ tal que

$$u_i(a_i, a_{-i}^*) > u_i^* + \varepsilon.$$

Dado que el juego es seguro en pagos, el jugador i dispone de una estrategia a_i que le permite asegurar

$$u_i(a_i, a'_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) - \varepsilon > u_i^*$$

para todo a'_{-i} en una vecindad abierta de a_{-i}^* . Por lo tanto, el jugador i puede asegurar un pago estrictamente mayor que u_i^* en a^* . Se concluye así que el juego es seguro por mejor respuesta. \square

El juego de competencia de precios con costos nulos constituye un caso en el que esta proposición puede aplicarse directamente. Este juego es semicontinuo superiormente de forma recíproca, ya que la suma de los pagos de las firmas es continua. Además, es seguro en pagos, dado que cada firma puede garantizarse un pago que no sea peor que el

actual reduciendo ligeramente su precio. En consecuencia, este juego también es seguro por mejor respuesta. Por otro lado, los juegos de subasta de primer precio, si bien son seguros en pagos, no satisfacen la propiedad de semicontinuidad superior recíproca. Por tanto, la proposición anterior no es aplicable en ese caso. No obstante, estos juegos sí son seguros por mejor respuesta. Esto implica que la propiedad de seguridad por mejor respuesta es más general que la combinación de seguridad en pagos y semicontinuidad superior recíproca. Sin embargo, el teorema de existencia de equilibrio en estrategias puras no se aplica a las subastas de primer precio, ya que los pagos en estos juegos no son funciones cuasi cóncavas respecto a la estrategia propia.

Corolario D.0.7. Si el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es compacto, cuasi cóncavo, semicontinuo superiormente de forma recíproca y seguro en pagos, entonces posee un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Este resultado se deduce inmediatamente del teorema D.0.3 y la proposición D.0.6.

Corolario D.0.8. Sea $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego compacto, cuasi cóncavo y semicontinuo superiormente de forma recíproca. Si el pago de cada jugador es semicontinuo inferiormente respecto a las estrategias puras de los demás jugadores, entonces el juego posee un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Demostración. Por el corolario D.0.7, basta verificar que el juego es seguro en pagos. Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Dado que la función $u_i(a_i, \cdot)$ es semicontinua inferiormente en A_{-i} , el conjunto

$$\{a'_{-i} \in A_{-i} \mid u_i(a_i, a'_{-i}) > u_i(a) - \varepsilon\}$$

forma una vecindad abierta de a_{-i} . Por tanto, el juego es seguro en pagos. \square

La noción de seguridad por mejor respuesta permite construir, para cada jugador i , una función $u_i(a)$ que es semicontinua inferiormente en las estrategias de los oponentes, y que detecta desviaciones rentables. Específicamente, un perfil a^* es un equilibrio si y solo si para todo i se cumple:

$$\sup_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a^*_{-i}) \leq u_i(a^*).$$

La capacidad de detectar desviaciones rentables mediante funciones semicontinuas inferiormente proporciona la continuidad suficiente para reducir la cuestión de

existencia a verificar que, para todo conjunto finito de desviaciones, existe una estrategia contra la cual ninguna de ellas es rentable. Las tres partes de la demostración del teorema D.0.3 consisten en lo siguiente:

- En las Partes I y II, se establece que para cada conjunto finito de desviaciones, existe una estrategia que actúa como una especie de equilibrio restringido respecto a dicho conjunto.
- En la Parte III, se construye una estrategia con propiedades de equilibrio cuando los espacios de estrategia están restringidos pero deben contener el conjunto fijo de desviaciones. Aunque estos espacios restringidos no son finitos, la semicontinuidad inferior de u_i en las estrategias de los demás permite aproximarla desde abajo mediante una sucesión de funciones continuas.
- Cada juego aproximado admite un equilibrio en estrategias mixtas, ya que los pagos son continuos. En estas aproximaciones, cada jugador emplea mezclas pero evalúa el pago suponiendo que los demás usan estrategias puras. Esto permite explotar la cuasi concavidad de u_i respecto a la estrategia propia para construir una secuencia purificada de equilibrios mixtos que converge a un equilibrio puro del juego original restringido.

La clave está en que, a lo largo de esta sucesión, los pagos aproximados subestiman los valores reales de u_i en la secuencia purificada, pero sobreestiman el valor de una desviación en el límite. La primera propiedad se deduce de que u_i se aproxima desde abajo; la segunda exige que dicha aproximación sea lo más alta posible dentro de esa restricción.

Definición D.0.9. Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, se define su *envolvente convexa*, denotada por $\text{co}(X)$, como el conjunto de todas las combinaciones convexas finitas de puntos en X . Es decir,

$$\text{co}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición D.0.10. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f es *semicontinua superiormente* en un punto $a_0 \in A$ si para

todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad abierta V de a_0 tal que:

$$f(a) \leq f(a_0) + \epsilon \quad \text{para todo } a \in V \cap A.$$

Equivalente a esto, se tiene que:

$$\limsup_{a \rightarrow a_0} f(a) \leq f(a_0).$$

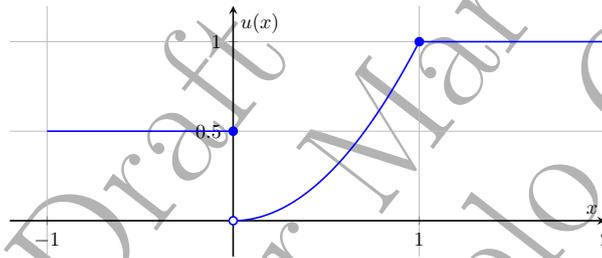


Figura D.1 Semicontinua superior.

Definición D.0.11. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* en un punto $a_0 \in A$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad abierta V de a_0 tal que:

$$f(a) \geq f(a_0) - \epsilon \quad \text{para todo } a \in V \cap A.$$

Esto es equivalente a:

$$\liminf_{a \rightarrow a_0} f(a) \geq f(a_0).$$

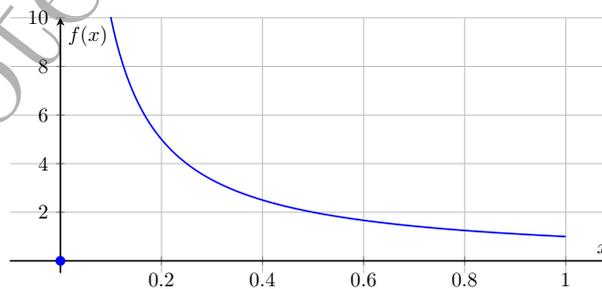


Figura D.2 Semicontinua inferior.

Observación D.0.12. Una función es *semicontinua inferiormente* en un punto x_0 si, en una vecindad de ese punto, los valores de la función no caen bruscamente por

debajo de $f(x_0)$. Es decir, puede presentar aumentos abruptos, pero no disminuciones repentinas.

De manera análoga, una función es *semicontinua superiormente* en x_0 si no puede elevarse bruscamente por encima de $f(x_0)$. En este caso, se permiten caídas bruscas, pero no subidas inesperadas.

Lema D.0.13. Sea Y un espacio compacto y métrico, y sea $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas definidas en Y , con valores reales, tales que para todo $y \in Y$ se cumple:

1. $f_n(y) \leq f(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
2. Para toda sucesión $\{y_n\} \subset Y$ tal que $y_n \rightarrow y$, se tiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \geq f(y).$$

Demostración. Sea Y un espacio métrico compacto y sea $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Sea $C(Y)$ el espacio de funciones reales, acotadas y continuas sobre Y , dotado de la métrica del supremo:

$$d_\infty(g, h) = \sup_{y \in Y} |g(y) - h(y)|.$$

Este espacio es separable. Defínase el conjunto

$$\mathcal{F} = \{g \in C(Y) \mid g(y) \leq f(y), \forall y \in Y\}.$$

Como \mathcal{F} es cerrado en $C(Y)$ y $C(Y)$ es separable, \mathcal{F} también lo es (de Azevedo Botelho et al., 2023). Sea $\{g_1, g_2, \dots\}$ un subconjunto numerable y denso de \mathcal{F} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase la función

$$f_n(y) = \max\{g_1(y), \dots, g_n(y)\}, \quad \forall y \in Y.$$

Cada f_n es continua y satisface $f_n(y) \leq f(y)$ para todo $y \in Y$, ya que cada g_j lo es. Esto prueba la propiedad (i).

Ahora se prueba que la sucesión $\{f_n\}$ también satisface la propiedad (ii): sea $\{y_n\}$ una sucesión convergente a $y_0 \in Y$, y supóngase, para obtener una contradicción, que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \leq a < f(y_0).$$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $f(y_0) > a + \epsilon$. Para proceder, se utilizará el siguiente resultado auxiliar:

(*) Si $f(y_0) > a$, entonces existe $h \in C(Y)$ y una vecindad abierta U de y_0 tal que:

(a) $h(y) \leq f(y)$ para todo $y \in Y$,

(b) $h(y) > a$ para todo $y \in U$.

Demostración de ():* Si $f(y_0) > a$, sea $a' \in (a, f(y_0))$. Como f es semicontinua inferiormente, el conjunto $\{y \in Y \mid f(y) > a'\}$ es abierto y contiene a y_0 . Por tanto, existen bolas abiertas B_1 y B_2 centradas en y_0 con radios $r_1 > r_2 > 0$, tales que:

$$B_2 \subset B_1 \subset \{y \in Y \mid f(y) > a'\}.$$

Defínase la función $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$h(y) = \begin{cases} a', & y \in \bar{B}_2, \\ \min_{y \in Y} f(y), & y \in Y \setminus B_1. \end{cases}$$

Por el Teorema de Extensión de Tietze², h puede extenderse a una función continua sobre todo Y que satisfaga $h(y) \leq f(y)$ en Y . Tomando $U = B_2$, se obtiene que h cumple (a) y (b), lo cual demuestra (*).

Volviendo a la demostración principal, por (*), existe una función $h \in \mathcal{F}$ y una vecindad U de y_0 tal que $h(y) > a + \epsilon$ para todo $y \in U$. Como $\{g_j\}$ es denso en \mathcal{F} , existe g_k tal que

$$\sup_{y \in Y} |g_k(y) - h(y)| < \epsilon/2.$$

Entonces, para todo $y \in Y$ se cumple:

$$g_k(y) > h(y) - \epsilon/2 > a + \epsilon/2 \quad \text{para todo } y \in U.$$

²**Tietze.** Sea X un espacio topológico normal y sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces existe una función continua $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$F|_A = f.$$

Es decir, f puede extenderse a todo X sin perder continuidad ni acotación.

Además, para $n \geq k$ se tiene $f_n(y) \geq g_k(y)$, ya que f_n toma el máximo de al menos g_k . Si $y_n \in U$ para infinitos n , entonces

$$f_n(y_n) \geq g_k(y_n) > a + \epsilon/2,$$

lo cual contradice $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \leq a$. Esto demuestra que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \geq f(y_0),$$

y por tanto se cumple la propiedad (ii). □

Prueba del teorema **D.0.3**.

Demostración. Para cada jugador i y todo $a \in A$, se define la función

$$\underline{u}_i(a) := \sup_{U \ni a_{-i}} \inf_{a'_{-i} \in U} u_i(a_i, a'_{-i}),$$

donde el supremo se toma sobre todas las vecindades abiertas U de a_{-i} . Dado que u_i es acotada, $\underline{u}_i(a_i, \cdot)$ toma valores reales. Además, para cada $a_i \in A_i$, la función $\underline{u}_i(a_i, \cdot)$ es semicontinua inferiormente en A_{-i} . En efecto, se tiene

$$\underline{u}_i(a_i, a_{-i}) = \sup_{U \ni a_{-i}} f_U(a_{-i}),$$

donde

$$f_U(a_{-i}) := \begin{cases} \inf_{a'_{-i} \in U} u_i(a_i, a'_{-i}) & \text{si } a_{-i} \in U, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cada f_U es semicontinua inferiormente, por lo que su supremo puntual también lo es. Así, $\underline{u}_i(a_i, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. Nótese que el jugador i puede asegurar un pago estrictamente mayor que $\gamma \in \mathbb{R}$ en $a^* \in A$ si y solo si

$$\sup_{a_i \in A_i} \underline{u}_i(a_i, a^*_{-i}) > \gamma. \tag{D.1}$$

Sea Γ la clausura del gráfico de la función de pagos vectorial $u : A \rightarrow \mathbb{R}^N$. Lo que sigue de la demostración se divide en tres partes.

Parte I. Detección del equilibrio de Nash. A partir de (D.1) y de la propiedad de seguridad por mejor respuesta, se obtiene lo siguiente: si $(a^*, u^*) \in \Gamma$ y para todo jugador i se cumple que

$$\sup_{a_i \in A_i} \underline{u}_i(a_i, a^*_{-i}) \leq u_i^*, \tag{D.2}$$

entonces a^* es un equilibrio de Nash.

Parte II. Suficiencia de conjuntos finitos de desviaciones. Para $a, b \in A$, se define

$$\underline{u}(a, b) := (\underline{u}_1(a_1, b_{-1}), \dots, \underline{u}_N(a_N, b_{-N})),$$

y para cada $a \in A$, defínase

$$E(a) := \{(b, u) \in \Gamma \mid \underline{u}(a, b) \leq \bar{u}\},$$

donde la desigualdad \leq se interpreta componente a componente. Sea

$$E := \bigcap_{a \in A} E(a).$$

La Parte I implica que si existe $(a^*, u^*) \in E$, entonces a^* es un equilibrio de Nash. Por tanto, basta demostrar que E es no vacío. Como cada u_i es acotada, $\Gamma \subset A \times \mathbb{R}^N$ es compacto. Por ende, como $u(a, \cdot)$ es semicontinua inferiormente para cada $a \in A$, cada $E(a)$ también es compacto. Así, E será no vacío si se prueba que la familia $\{E(a)\}_{a \in A}$ posee la propiedad de intersección finita, lo cual se establece en la Parte III.

Parte III (Construcción de estrategias inmunes a desviaciones finitas). La Partes I y II implican que basta demostrar que para cada subconjunto $F \subset A$ finito, existe $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$ tal que

$$\underline{u}(x, \bar{x}) \leq \bar{u}, \quad \forall x \in F.$$

Sean $F = \{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$ un subconjunto finito de A , y para cada jugador i , sea $A_i^0 = \{a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(m)}\} \subset A_i$. Sea $\text{co}(A_i^0)$ la envolvente convexa de A_i^0 y \rightarrow_E la convergencia con la métrica euclidiana. Dado que A_i es un espacio vectorial topológico, la métrica euclidiana induce una topología al menos tan fina como la original. Así, $\underline{u}_i(a_i, \cdot)$, siendo semicontinua inferiormente en la topología producto original, también lo es sobre $\bigotimes_{j \in i} \text{co}(A_j^0)$ con la métrica euclidiana. Además, $\bigotimes_{j \in i} \text{co}(A_j^0)$ es compacto con la métrica euclidiana. Luego, aplicando el lema D.0.13, para cada i y $a_i \in A_i^0$ existe una sucesión $\{u_i^n(a_i, \cdot)\}_n$ de funciones continuas sobre $\bigotimes_{j \neq i} \text{co}(A_j^0)$ tales que:

- $u_i^n(a_i, a_{-i}) \leq u_i(a_i, a_{-i})$ para todo n ,
- para toda sucesión $a_{-i}^{(n)} \rightarrow_E a_{-i}$, se cumple $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_i^n(a_i, a_{-i}^{(n)}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$.

Para cada n , se define el juego G_n de N jugadores en el cual el conjunto de estrategias puras del jugador i es el conjunto de medidas de probabilidad sobre A_i^0 . Para un perfil de estrategias mixtas $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \otimes_{i=1}^N \Delta(A_i^0)$, se define el pago del jugador i como

$$v_i^n(\mu) = \int_{A_i^0} u_i^n(a_i, \bar{a}_{-i}) d\mu_i(a_i),$$

donde $\bar{a}_{-j} := \int a_j d\mu_j$ pertenece a $\text{co}(A_j^0)$ para cada j .

Cada G_n es un juego con pagos continuos, por lo que posee un equilibrio mixto μ^n . Para todo i , se debe tener que para todo a_i que recibe peso positivo bajo μ_i^n , y para todo $a'_i \in A_i^0$,

$$u_i^n(a'_i, \bar{a}_{-i}^n) \leq v_i^n(\mu^n) = u_i^n(a_i^n, \bar{a}_{-i}^n) \leq u_i(a_i, \bar{a}_{-i}^n) \leq u_i(a'_i, \bar{a}_{-i}^n),$$

Además, por cuasi concavidad de $v_i(\cdot, \bar{a}_{-i})$, también se satisface

$$u_i^n(a_i, \bar{a}_{-i}) \leq \underline{u}_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}).$$

Dado que los espacios de estrategias están contenidos en el compacto $\text{co}(A_i^0)$, se puede suponer que $\bar{a}^n \rightarrow \bar{a} \in \otimes_i \text{co}(A_i^0)$. Usando la propiedad (ii) de la aproximación y el paso al límite inferior, se obtiene:

$$\underline{u}_i(a_i, \bar{a}_{-i}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_i^n(a_i, \bar{a}_{-i}^n) \leq \bar{u}_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}),$$

para todo $a_i \in A_i^0$, lo que prueba que \bar{a} cumple la condición (D.2) respecto a cada elemento de F . Por tanto, (\bar{a}, u) pertenece a E .

Como F era arbitrario, esto prueba que la familia $\{E(a)\}_{a \in A}$ tiene la propiedad de intersección finita, por lo que E es no vacío. Por la Parte I, se concluye que existe un equilibrio de Nash en estrategias puras. \square

El teorema principal de [Reny \(1999\)](#) demuestra que un juego admite un **equilibrio de Nash en estrategias puras** aun cuando las funciones de pago sean **discontinuas**, siempre que se verifiquen tres condiciones: que el juego sea **compacto**, que los pagos sean **cuasi cóncavos** respecto a la estrategia propia, y que el juego sea **seguro por mejor respuesta**. Esta última propiedad garantiza que, si un perfil de estrategias no es un equilibrio, entonces algún jugador puede asegurar un **pago estrictamente**

mayor frente a desviaciones pequeñas de sus oponentes. La intuición de la prueba consiste en reemplazar las funciones de pago discontinuas por **funciones continuas que las aproximan por debajo**, construir una familia de **juegos auxiliares** donde los pagos son continuos y se pueden aplicar los teoremas clásicos, obtener **equilibrios mixtos** en esos juegos, y luego usar **purificación** para demostrar que estos equilibrios convergen a un equilibrio puro del juego original. El uso de funciones **semicontinuas inferiormente** permite mantener el control sobre las desviaciones, y la **compacidad** de los conjuntos de estrategias asegura la existencia de límites apropiados.

Observación D.0.14. La seguridad por mejor respuesta garantiza que el conjunto de equilibrios de Nash es cerrado y que los límites de ϵ -equilibrios son equilibrios. Ambas afirmaciones se derivan de la primera parte de la demostración. Para ver la primera, nótese que si a^* es un equilibrio de Nash, entonces $(a^*, u(a^*))$ satisface la condición (D.2). Por lo tanto, el conjunto cerrado $\{a^* \mid (a^*, u^*) \in \Gamma \text{ satisface la condición (D.2) para algún } u^*\}$ coincide con el conjunto de equilibrios de Nash. Para ver la segunda cuestión, considérese que si a^ϵ es una sucesión de ϵ -equilibrios que converge a a^* cuando ϵ tiende a cero, entonces para todo jugador i , todo $a_i \in A_i$, y todo ϵ , se cumple que

$$\underline{u}_i(a_i, a_{-i}^\epsilon) \leq \underline{u}_i(a_i^\epsilon, a_{-i}^\epsilon) \leq \underline{u}_i(a^\epsilon) + \epsilon.$$

Por lo tanto, la semicontinuidad inferior de cada $u_i(a_i, \cdot)$ en las estrategias de los demás implica que $(a^*, u^*) \in \Gamma$ satisface la condición, donde $u^* = \lim_\epsilon u(a^\epsilon)$.

Ejemplo D.0.15. Considérese una clase de juegos estáticos de dos jugadores, de suma nula, definidos sobre el cuadrado unidad $[0, 1]^2$, donde cada jugador i elige una acción $a_i \in [0, 1]$ que representa el momento en que decide actuar. Este tipo de juego se conoce como un *juego de temporización con ruido* (*noisy timing game*), ya que cada jugador puede percibir si el otro actuó antes, después o al mismo tiempo (por ejemplo, como si pudiera escuchar el disparo del otro en un duelo). Este tipo de juegos aparece en la literatura sobre duelos, carreras de innovación o I+D, y competencia temporal en mercados estratégicos. La función de utilidad para el jugador i está definida como:

$$u_i(a_i, a_{-i}) = \begin{cases} \ell_i(a_i), & \text{si } a_i < a_{-i}, \\ \varphi_i(a_i), & \text{si } a_i = a_{-i}, \\ m_i(a_{-i}), & \text{si } a_i > a_{-i}, \end{cases}$$

donde:

- $\ell_i(a_i)$ es el pago que recibe el jugador i si actúa antes que el otro jugador.
- $\varphi_i(a_i)$ es el pago si ambos jugadores actúan al mismo tiempo.
- $m_i(a_{-i})$ es el pago que recibe si actúa después del oponente.

Supondremos que $\ell_i(\cdot)$ y $m_i(\cdot)$ son funciones continuas en $[0, 1]$, y que $\ell_i(\cdot)$ es no decreciente (es decir, actuar más tarde nunca da un pago menor cuando se actúa antes que el oponente). El siguiente resultado establece condiciones bajo las cuales este juego admite un equilibrio puro:

- (i) Para todo $a \in [0, 1]$, se cumple que $\varphi_i(a) \in \text{co}\{\ell_i(a), m_i(a)\}$, es decir, el pago en caso de empate está dentro del segmento que une los pagos por actuar antes o después. Esta condición refleja que el empate no da ventajas extremas.
- (ii) Para todo $a \in [0, 1]$, se cumple que

$$\text{sgn}(\ell_i(a) - \varphi_i(a)) = \text{sgn}(\varphi_{-i}(a) - m_{-i}(a)),$$

lo cual implica que los incentivos estratégicos de ambos jugadores están alineados: si para el jugador i actuar antes es mejor que empatar, entonces para el otro jugador actuar después es peor que empatar (y viceversa). Esta condición evita círculos de incentivos contradictorios.

Bajo estas condiciones, el juego admite al menos un *equilibrio de Nash en estrategias puras*. En efecto:

- El conjunto de estrategias es compacto (cada acción está en $[0, 1]$).
- La continuidad de ℓ_i y m_i , junto con la condición (ii), garantiza que la utilidad es semicontinua inferiormente.
- La condición (i), junto con el hecho de que ℓ_i es no decreciente, implica que las funciones de utilidad son cuasi cóncavas.

- Finalmente, la condición (i) también asegura que el juego es *payoff-secure*, es decir, cada jugador puede garantizarse un pago mínimo estable bajo pequeñas perturbaciones.

Así, al cumplirse estos tres elementos estándar en existencia de equilibrio (estrategias compactas, semicontinuidad inferior y cuasi concavidad), se puede concluir, por teoremas clásicos de equilibrio, que existe al menos un equilibrio puro.

Ejemplo D.0.16. El siguiente ejemplo muestra cómo el teorema D.0.3 puede emplearse como una alternativa al clásico resultado de existencia de equilibrio social (Debreu, 1952) para establecer la existencia de un equilibrio Walrasiano. En lugar de restringir directamente los conjuntos de elección de los consumidores mediante el presupuesto, se define que sus pagos sean (de manera discontinua) poco atractivos en elecciones que no pueden costearse, lo cual permite tratar el problema como un juego con espacios de estrategia fijos e independientes del vector de precios. Considérese una economía de intercambio con n consumidores y m bienes, donde cada consumidor i tiene una función de utilidad

$$u_i : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

que es continua, localmente no saciada y cuasi cóncava, y cuenta con una dotación estrictamente positiva $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^m$. El juego asociado se construye del siguiente modo:

- Cada consumidor i elige un bundle de consumo $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $\mathbf{x}_i \leq \boldsymbol{\omega} + \mathbf{1}$, donde $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega_i$ es la dotación agregada y $\mathbf{1}$ es el vector de unos.
- El subastador elige un vector de precios \mathbf{p} perteneciente al simplex unitario en \mathbb{R}_+^m , es decir, $\mathbf{p} \in \Delta := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{j=1}^m p_j = 1\}$.

Los pagos se definen como sigue:

- El consumidor i recibe utilidad $u_i(x_i)$ si $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i$ (es decir, si su bundle es asequible), y -1 en caso contrario.
- El subastador recibe un pago igual al exceso de demanda valorado en precios: $\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \omega_i)$.

Bajo estas definiciones:

- Los espacios de estrategia son compactos y convexos.
- Las funciones de utilidad de los consumidores son cuasi concavas en x_i y semicontinuas superiormente en todas las estrategias.
- La utilidad del subastador es continua (lineal en p).
- Cada consumidor puede asegurar un pago positivo realizando una reducción proporcional en su consumo, lo que garantiza seguridad del pago (*payoff security*).

Dado que se cumplen las condiciones del teorema D.0.3, aplicamos el corolario D.0.7 para concluir que el juego admite un equilibrio de Nash en estrategias puras. Por argumentos estándar de economía del equilibrio general, dicho equilibrio coincide con un equilibrio Walrasiano de la economía de intercambio.

Los resultados introducidos hasta ahora pueden fortalecerse cuando el juego posee suficiente simetría. Supongamos que para todos los jugadores i, j , se cumple que $A_i = A_j = A$. Así, ahora se asume que el espacio de estrategias es común. Si, además, las funciones de utilidad cumplen que

$$u_1(a', a, \dots, a) = u_2(a, a', a, \dots, a) = \dots = u_N(a, \dots, a, a')$$

para toda permutación de los argumentos y todo $a, a' \in A$, se dice que el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es *cuasi-simétrico*.³

A partir de este punto, se adopta la siguiente convención: para cada jugador i y para todo par de estrategias $a, y \in A$, la notación $u_i(y, \dots, a, \dots, y)$ representa la utilidad que obtiene el jugador i cuando elige a mientras los demás jugadores eligen y .

³En teoría de juegos, se dice que un juego es *simétrico* si todos los jugadores comparten el mismo conjunto de estrategias y si, además, las funciones de pago son invariantes ante cualquier permutación de los jugadores. Es decir, el juego no cambia cuando se intercambian las identidades de los jugadores. Por el contrario, la *cuasi-simetría* impone una condición más débil: solo se requiere que las funciones de utilidad coincidan sobre la diagonal simétrica, es decir, cuando todos los jugadores eligen la misma estrategia. Esta relajación es suficiente para ciertos resultados de existencia de equilibrio, pero no garantiza la invariancia estructural completa del juego. En juegos con tres o más jugadores, la diferencia entre simetría total y cuasi-simetría se vuelve particularmente relevante, ya que puede haber estrategias conjuntas con simetría parcial que no satisfacen la simetría total del juego.

Se define la *función de pagos diagonal* de un juego cuasi-simétrico como la función $\nu : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\nu(a) = u_1(a, \dots, a) = \dots = u_N(a, \dots, a)$$

para todo $a \in A$.

Observación D.0.17. Un perfil de estrategias (a_1^*, \dots, a_N^*) constituye un equilibrio de Nash *simétrico* si se cumple que $a_1^* = \dots = a_N^*$.

Definición D.0.18. Se dice que el jugador i puede *asegurar un pago* de $\gamma \in \mathbb{R}$ sobre la *diagonal* en $(a, \dots, a) \in A^N$ si existe un punto $\bar{a} \in A$ tal que

$$u_i(a', \dots, \bar{a}, \dots, a') \geq \gamma$$

para todo a' perteneciente a una vecindad abierta de a .

Definición D.0.19. El juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ se denomina *diagonalmente seguro por mejor respuesta* si, para cada par $(a^*, u^*) \in A \times \mathbb{R}$ perteneciente a la clausura del grafo de la función de pagos diagonal, y tal que (a^*, \dots, a^*) no es un equilibrio de Nash, existe al menos un jugador i que puede asegurar un pago estrictamente mayor que u^* sobre la diagonal en (a^*, \dots, a^*) .

Definición D.0.20. El juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ se considera *diagonalmente cuasi cóncavo* si el conjunto A es convexo y, para cada jugador i , cualquier conjunto finito de puntos $a^1, \dots, a^m \in A$, y todo $\bar{a} \in \text{co}\{a^1, \dots, a^m\}$, se satisface⁴:

$$u_i(\bar{a}, \dots, \bar{a}) \geq \min_{1 \leq k \leq m} u_i(\bar{a}, \dots, a^k, \dots, \bar{a}).$$

Teorema D.0.21. Sea $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego cuasi-simétrico, compacto, diagonalmente cuasi cóncavo y diagonalmente seguro por mejor respuesta. Entonces, dicho juego posee un equilibrio de Nash simétrico en estrategias puras.

Demostración. Sea $a, y \in A$. Se define:

$$\underline{u}_1(a, y) := \sup_{U \ni y} \inf_{y' \in U} u_1(a, y', \dots, y'),$$

⁴Cada jugador prefiere, o al menos no empeora, moverse hacia una combinación convexa de estrategias simétricas. Esto es una versión débil de cuasi concavidad, pero solo evaluada sobre perfiles simétricos —es decir, donde todos los jugadores eligen la misma acción.

donde el supremo se toma sobre todas las vecindades abiertas $U \subseteq A$ de y . Así definida, $\underline{u}_1(a, y)$ es una función real (ya que u_1 es acotada) y semicontinua inferiormente como función de y en A . La semicontinuidad inferior se deduce de manera análoga a la demostración del teorema D.0.3. Por lo tanto, el jugador 1 puede asegurar un pago estrictamente mayor que $\gamma \in \mathbb{R}$ sobre la diagonal en $(y, \dots, y) \in A^N$ si y solo si:

$$\sup_{a \in A} \underline{u}_1(a, y) > \gamma. \quad (\text{D.3})$$

Sea Γ la clausura del grafo de la función de pago diagonal del juego. Como G es cuasi-simétrico y diagonalmente seguro por mejor respuesta, la condición (D.3) implica que $(a^*, \dots, a^*) \in A^N$ es un equilibrio simétrico de Nash de G si existe $u^* \in \mathbb{R}$ tal que $(a^*, u^*) \in \Gamma$ y

$$\underline{u}_1(a, a^*) \leq u^*, \quad \forall a \in A. \quad (\text{D.4})$$

Para cada $a \in A$, se define:

$$E(a) := \{y \in A : \underline{u}_1(a, y) \leq \bar{u}_1(y)\},$$

donde:

$$\bar{u}_1(y) := \inf_{U \ni y} \sup_{y' \in U} u_1(y', \dots, y')$$

es una función semicontinua superiormente y bien definida en A , dado que los pagos están acotados. La demostración de la semicontinuidad superior de \bar{u}_1 es análoga a la de la semicontinuidad inferior de \underline{u}_1 . Supóngase ahora que $a^* \in E(a)$ para todo $a \in A$. Entonces:

$$\underline{u}_1(a, a^*) \leq \bar{u}_1(a^*) \quad \forall a \in A.$$

Dado que $(a^*, \bar{u}_1(a^*)) \in \Gamma$, se satisface la condición (D.4) con $u^* = \bar{u}_1(a^*)$, lo que implica que (a^*, \dots, a^*) es un equilibrio simétrico de Nash. Basta entonces probar que:

$$\bigcap_{a \in A} E(a) \neq \emptyset.$$

Dado que \bar{u}_1 es semicontinua superiormente en A y $\underline{u}_1(a, \cdot)$ es semicontinua inferiormente para cada $a \in A$, el conjunto $E(a)$ es cerrado (y por compacidad de A , es compacto). Por lo tanto, basta probar que la colección de conjuntos $\{E(a)\}_{a \in A}$

posee la propiedad de intersección finita. Por el teorema de KKM⁵, esto ocurre si para todo subconjunto finito $\{a^1, \dots, a^m\} \subset A$ se cumple:

$$\text{co}(a^1, \dots, a^m) \subseteq E(a^1) \cup \dots \cup E(a^m).$$

Supóngase, por contradicción, que existe $\bar{a} \in \text{co}(a^1, \dots, a^m)$ tal que $\bar{a} \notin E(a^1) \cup \dots \cup E(a^m)$. Esto implica que:

$$u_1(a^k, \bar{a}) > \bar{u}_1(\bar{a}) \geq u_1(\bar{a}, \dots, \bar{a}) \quad \text{para todo } k = 1, \dots, m,$$

donde la segunda desigualdad se deduce de las definiciones de u_1 y \bar{u}_1 . Esto contradice la cuasiconcavidad diagonal de G . \square

Definición D.0.22. Se dice que el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es *diagonalmente seguro por pagos* si, para todo $a \in A$ y para todo $\epsilon > 0$, cada jugador i puede asegurar un pago no menor que

$$u_i(a, \dots, a) - \epsilon$$

sobre la diagonal (a, \dots, a) .

Incluso si los demás jugadores eligen estrategias cercanas a a , el jugador i puede actuar de forma que asegure casi el mismo pago que obtendría si todos eligieran exactamente a . Esto captura una noción de robustez del pago en la vecindad de perfiles simétricos.

Proposición D.0.23. Si el juego cuasi-simétrico $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ es diagonalmente seguro por pagos, y si cada función $a \mapsto u_i(a, \dots, a)$ es semicontinua superiormente, entonces el juego es diagonalmente seguro por mejor respuesta.

⁵**Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz.** Sea Δ_{n-1} un simplex de dimensión $n - 1$ con vértices etiquetados por $1, \dots, n$. Sea C_1, \dots, C_n una colección de subconjuntos cerrados de Δ_{n-1} tal que, para todo subconjunto $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, se cumple:

$$\text{co}(\{v_i : i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i,$$

donde v_i es el vértice i del simplex. Entonces, la intersección común es no vacía:

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

Corolario D.0.24. Sea $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego cuasi-simétrico, compacto, diagonalmente cuasi cóncavo y diagonalmente seguro por pagos. Si, además, cada función $u_i(a, \dots, a)$ es semicontinua superiormente como función de a en A , entonces el juego posee un equilibrio de Nash simétrico en estrategias puras.

Demostración. Se sigue de combinar el teorema D.0.21 y la proposición D.0.23. \square

Concluimos la exposición del artículo [Reny \(1999\)](#) presentando una serie de corolarios sobre la existencia de estrategias mixtas, derivados de los resultados obtenidos en secciones anteriores del artículo original, relacionados al caso de las estrategias puras. Dado que se desea calcular pagos esperados, se asume que cada función de utilidad u_i es acotada y medible. Además, se supone que cada espacio de estrategias A_i es compacto y de Hausdorff, por lo que el juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ se considera un juego compacto de Hausdorff.

Sea M_i el conjunto de medidas de probabilidad regulares, aditivas numerables, sobre los subconjuntos de Borel de A_i . Entonces M_i es compacto en la topología débil* [Aliprantis and Border \(2006\)](#). Cada función u_i se extiende naturalmente al producto $M = \prod_{i=1}^N M_i$ mediante

$$u_i(\mu) := \int_A u_i(a) d\mu,$$

para toda $\mu \in M$. Se denota $\bar{G} = (M_i, u_i)_{i=1}^N$ a esta *extensión mixta* del juego G . Las definiciones de seguridad por mejor respuesta, semicontinuidad superior recíproca, seguridad por pagos, etc., se aplican de manera directa a la extensión mixta \bar{G} . No obstante, debe señalarse que aunque la semicontinuidad superior recíproca de \bar{G} implica la correspondiente propiedad para G , la seguridad por mejor respuesta (o por pagos) de \bar{G} no implica ni es implicada por la seguridad por mejor respuesta (o por pagos) de G .

Definición D.0.25. Espacio normal. Un espacio topológico X se dice *normal* si, para cualesquiera dos conjuntos cerrados disjuntos $A, B \subseteq X$, existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tales que

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Proposición D.0.26. Si la suma $\sum_{i=1}^N u_i(a)$ es semicontinua superiormente en $a \in A$, entonces $\sum_{i=1}^N \int_A u_i(a) d\mu$ es semicontinua superiormente en $\mu \in M$. En consecuencia,

la extensión mixta del juego $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$, denotada por \bar{G} , es semicontinua superiormente en sentido recíproco.

Demostración. Claramente, basta con demostrar que $\sum_{i=1}^N u_i(\mu)$ es semicontinua superiormente en $\mu \in M$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente en A , entonces la función $F(\mu) := \int_A f(a) d\mu$ también es semicontinua superiormente en $\mu \in M$. Supóngase que para toda $\mu \in M$, existe una sucesión $\{f_n\} \subseteq C_f := \{g \in C(A) : g \geq f\}$ tal que:

$$\int_A f(a) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(a) d\mu. \quad (\text{D.5})$$

Entonces, se tiene:

$$\int_A f(a) d\mu = \inf_{g \in C_f} \int_A g(a) d\mu, \quad \forall \mu \in M,$$

lo cual implica que $F(\mu)$ es semicontinua superiormente, al ser el ínfimo de funciones continuas. Así, basta probar que para cada $\mu \in M$ existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\} \subseteq C(A)$ que mayoricen a f y satisfagan (D.5). Aunque este resultado no ha sido encontrado explícitamente en la literatura, se procede a demostrarlo. Sea $\mu \in M$. Como f es semicontinua superiormente, entonces es medible. Además, como μ es regular, el teorema de Lusin⁶ garantiza que para cada $n \geq 1$ existe un subconjunto compacto $A_n \subseteq A$ tal que $\mu(A_n) > 1 - (1/n)$ y f es continua sobre A_n . Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $f(a) < 0$ para todo $a \in A$. Para cada $n \geq 1$, se define:

$$g_n(a) := \begin{cases} f(a) + \frac{1}{n}, & \text{si } a \in \bigcup_{k=1}^n A_k, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

⁶Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $E \subseteq [a,b]$ tal que:

- f es continua en E (con la topología subespacio),
- y $\mu(E) > b - a - \varepsilon$.

El teorema de Lusin afirma que cualquier función medible es casi continua: se puede restringir a un conjunto compacto donde es continua, y este conjunto puede tener medida arbitrariamente cercana a la del dominio original. Esto implica que las funciones medibles, aunque puedan tener discontinuidades, se comportan como funciones continuas en casi todo su dominio.

Entonces, se tiene que $g_n \geq g_{n+1} > f$ para todo n , y que $g_n(a) \rightarrow f(a)$ para casi todo $a \in A$, ya que $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$. Por el teorema de convergencia monótona, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(a) d\mu = \int_A f(a) d\mu. \quad (\text{D.6})$$

Dado que cada g_n es semicontinua inferiormente y que f es semicontinua superiormente, se puede aplicar el teorema de Dowker⁷, que garantiza la existencia de funciones continuas $f_n \in C(A)$ tales que $g_n > f_n > f$. Combinando esto con (D.6), se obtiene lo deseado. \square

Se presentan ahora las implicancias en estrategias mixtas del teorema D.0.3 y de la proposición D.0.6.

Corolario D.0.27. Sea $G = (A_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego compacto de Hausdorff. Entonces, G posee un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si su extensión mixta \bar{G} es segura por mejor respuesta. Además, \bar{G} es segura por mejor respuesta si es simultáneamente semicontinua superiormente en sentido recíproco y segura por pagos.

Este corolario generaliza directamente los resultados clásicos de existencia de equilibrios en estrategias mixtas obtenidos por Nash (1950); Dasgupta and Maskin (1986a, b); Simon (1987). El corolario D.0.27 también permite probar la existencia de equilibrios en estrategias mixtas en diversos modelos económicos estándar: competencia en precios a lo Bertrand con funciones de costo y demanda continuas arbitrarias, competencia en cantidades a lo Cournot con costos de producción fijos, modelos de selección adversa, entre otros. La aplicación presentada a continuación ilustra uno de estos casos.

Ejemplo D.0.28. Considérese un juego de suma cero en el que dos jugadores deben elegir un tiempo $t_1, t_2 \in [0, 1]$ para abandonar el juego. El jugador que abandona último gana, aunque condicionalmente a ganar, se prefiere abandonar antes. Si ambos

⁷Un espacio topológico X es normal si y solo si, para toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que sea *semi-continua inferiormente* y *acotada superiormente*, existe una función continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < g(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

jugadores abandonan al mismo tiempo, el premio se divide en partes iguales. Los pagos están dados por:

$$u_i(t_i, t_{-i}) = \begin{cases} -t_i, & \text{si } t_i < t_{-i}, \\ \frac{1}{2} - t_i, & \text{si } t_i = t_{-i}, \\ 1 - t_i, & \text{si } t_i > t_{-i}. \end{cases}$$

Este juego no posee un equilibrio en estrategias puras, ya que no es cuasi cóncavo ni siquiera a lo largo de la diagonal. Sin embargo, es compacto, métrico y de suma cero, lo cual garantiza que su extensión mixta es semicontinua superiormente en sentido recíproco. Además, es sencillo verificar que dicha extensión también es segura por pagos: aumentar ligeramente el tiempo elegido para abandonar disminuye como máximo ligeramente el pago, siempre que la estrategia mixta del oponente no varíe demasiado. Por lo tanto, el corolario **D.0.27** asegura que este juego posee un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Ejemplo D.0.29. Considérese una subasta en la que N postores neutrales al riesgo compiten por K unidades idénticas de un bien. Cada postor i recibe una señal vectorial $x_i \in [0, 1]^m$, la cual determina sus valoraciones marginales $v_k^i(x_i)$ para cada unidad $k = 1, \dots, K$. Estas funciones son continuas y estrictamente crecientes. Cada postor presenta K ofertas no negativas ordenadas $b_1^i \geq b_2^i \geq \dots \geq b_K^i$. Las K ofertas más altas entre todos los postores ganan y cada ganador paga exactamente su oferta por cada unidad ganada. Si existen empates relevantes, se resuelven aleatoriamente. Al restringir el conjunto de estrategias puras a funciones de oferta no decrecientes y acotadas por las valoraciones marginales, se obtiene un espacio métrico compacto de funciones. En este marco, se puede aplicar el corolario **D.0.27**: se verifica la seguridad por mejor respuesta (vía continuidad y posibilidad de mejorar utilidades en vecindades) y también la seguridad por pagos. Esto asegura la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Finalmente, si las funciones de valoración marginal son crecientes estrictas, cualquier equilibrio mixto obtenido es puro. Esto permite probar la existencia de equilibrio en estrategias puras en funciones de oferta no decrecientes en subastas de primer precio con señales privadas independientes.

Apéndice E

Introducción al diseño de mecanismos

E.1. Introducción

En este capítulo, seguimos a (Mas-Colell et al., 1995; Bergara, 2023; Tadelis and Segal, 2005), pero principalmente a Börgers (2015). El diseño de mecanismos es la rama de la teoría de juegos que busca diseñar entornos estratégicos (juegos) tales que, cuando son jugados por agentes racionales, generen un resultado deseado por el diseñador del mecanismo. La metodología utilizada es la teoría de juegos bayesianos, donde los jugadores tienen tipos privados y el diseñador enfrenta un problema de información incompleta. Formalmente, un mecanismo puede representarse como un juego bayesiano de dos etapas: en la primera, el diseñador fija las reglas del juego (mecanismo); en la segunda, los jugadores observan sus tipos y eligen estrategias.

Un mecanismo se especifica como un juego

$$\Gamma = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{\Theta_i\}_{i \in I}, X, g(\cdot), \{u_i\}_{i \in I} \rangle,$$

donde cada jugador $i \in I$ tiene un tipo $\theta_i \in \Theta_i$, una estrategia $\alpha_i : \Theta_i \rightarrow A_i$, y donde el conjunto de estrategias posibles es $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ con $\mathcal{A}_i = \{\alpha_i : \Theta_i \rightarrow A_i\}$. El mecanismo induce una regla de asignación $g(\alpha(\theta)) \in X$, y las funciones de pago $u_i : X \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ determinan la utilidad de cada jugador. Dado que los tipos son

aleatorios, las estrategias se evalúan en términos de su utilidad esperada ex-ante.

Para una exposición formal del concepto de equilibrio en este contexto, remitimos al capítulo 4.

En esta sección se introducen los conceptos básicos del diseño de mecanismos, en particular, los distintos tipos de equilibrios y compatibilidad de incentivos, siguiendo la notación estándar de juegos bayesianos, en el contexto de la regla de asignación $g(\cdot)$.

Definición E.1.1. Equilibrio de Nash ex-post. Un vector de estrategias $\alpha = (\alpha_i, \alpha_{-i})$ es un equilibrio de Nash ex-post en un mecanismo Γ si ningún jugador puede incrementar su utilidad ex-post desviándose unilateralmente. Es decir:

$$u_i(g(\alpha(\theta)); \theta) \geq u_i(g(\alpha'_i(\theta_i), \alpha_{-i}(\theta_{-i})); \theta), \quad \forall i \in I, \forall \alpha'_i \in \mathcal{A}_i.$$

Definición E.1.2. Estrategia dominante. Una estrategia α_i para un jugador $i \in I$ es estrategia dominante si es débilmente óptima independientemente del comportamiento de los demás jugadores:

$$u_i(g(\alpha_i(\theta_i), a_{-i}); \theta_i) \geq u_i(g(\alpha'_i(\theta_i), a_{-i}); \theta_i), \quad \forall \alpha'_i \in \mathcal{A}_i, \forall a_{-i} \in \bigotimes_{j \neq i} \mathcal{A}_j, \forall \theta_i \in \Theta_i.$$

Definición E.1.3. Equilibrio en estrategias dominantes. Un vector de estrategias $\alpha \in \mathcal{A}$ es un equilibrio en estrategias dominantes si todos los jugadores juegan estrategias dominantes.

Definición E.1.4. Equilibrio de Nash ex-post. Un vector de estrategias $\alpha = (\alpha_i, \alpha_{-i})$ es un equilibrio de Nash ex-post en un mecanismo Γ si ningún jugador puede incrementar su utilidad ex-post desviándose unilateralmente. Es decir:

$$u_i(g(\alpha(\theta)); \theta) \geq u_i(g(\alpha'_i(\theta_i), \alpha_{-i}(\theta_{-i})); \theta), \quad \forall i \in I, \forall \alpha'_i \in \mathcal{A}_i.$$

Definición E.1.5. Estrategia dominante. Una estrategia α_i para un jugador $i \in I$ es dominante si es débilmente óptima independientemente del comportamiento de los demás jugadores:

$$u_i(g(\alpha_i(\theta_i), a_{-i}); \theta_i) \geq u_i(g(\alpha'_i(\theta_i), a_{-i}); \theta_i), \quad \forall \alpha'_i \in \mathcal{A}_i, \forall a_{-i} \in \bigotimes_{j \neq i} \mathcal{A}_j, \forall \theta_i \in \Theta_i.$$

Definición E.1.6. Equilibrio en estrategias dominantes. Un vector de estrategias $\alpha \in \mathcal{A}$ es un equilibrio en estrategias dominantes si todos los jugadores juegan estrategias dominantes.

Observación E.1.7. En el contexto de diseño de mecanismos, el objetivo del diseñador puede representarse mediante:

- Una correspondencia de elección social $f : \Theta \rightrightarrows X$. El diseño es exitoso si $g(\alpha^*(\theta)) \in f(\theta)$ para todo θ , o parcialmente exitoso si $g(\alpha^*(\theta)) \cap f(\theta) \neq \emptyset$.
- Una función de bienestar social $W : X \rightarrow \mathbb{R}$, y el diseñador busca maximizar:

$$\mathbb{E}_{\theta \sim F}[W(g(\alpha^*(\theta)))]$$

o una función de ingreso/recompensa:

$$\mathbb{E}_{\theta \sim F}[R(g(\alpha^*(\theta)))]$$

Definición E.1.8. Mecanismo directo. Un mecanismo es directo si el espacio de acciones coincide con el de tipos, es decir, $\mathcal{A}_i = \Theta_i$ para todo i .

Definición E.1.9. Bayesiano-compatible según incentivos. Un mecanismo directo es Bayesiano-compatible según incentivos si reportar el tipo verdadero es un equilibrio bayesiano:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i} \sim F_{-i}} [u_i(g(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i} \sim F_{-i}} [u_i(g(\theta'_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})], \quad \forall i \in I, \forall \theta'_i \in \Theta_i.$$

Definición E.1.10. Ex-post compatible según incentivos. Un mecanismo directo es ex-post compatible según incentivos si decir la verdad es un equilibrio de Nash ex-post:

$$u_i(g(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}) \geq u_i(g(\theta'_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}), \quad \forall i \in I, \forall \theta'_i \in \Theta_i, \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

Definición E.1.11. Dominante según incentivos. Un mecanismo directo es dominante según incentivos si decir la verdad es una estrategia dominante:

$$u_i(g(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}) \geq u_i(g(\theta'_i, \theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}), \quad \forall i \in I, \forall \theta'_i \in \Theta_i, \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

Proposición E.1.12. En mecanismos directos, la compatibilidad de incentivos ex-post implica la compatibilidad de incentivos dominante, y son de hecho equivalentes.

Teorema E.1.13. Principio de revelación. Dado un mecanismo M para el cual existe un perfil de estrategias α de equilibrio, podemos construir un mecanismo de revelación directa equivalente M^* , en el cual decir la verdad (revelar su tipo) es un equilibrio.

Observación E.1.14. Decir que M y M^* son equivalentes significa que:

$$g(\alpha(\theta)) = g^*(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Observación E.1.15. El Teorema anterior nos dice que solo debemos fijarnos en mecanismos directos, ya que podemos transformar cualquier mecanismo general en uno de revelación directa sin pérdida de generalidad. Esto simplifica sustancialmente el análisis.

Observación E.1.16. Construcción del mecanismo directo. El mecanismo directo M^* se define de forma que, para todo θ , la asignación sea $g^*(\theta) = g(\alpha(\theta))$. Para que M^* sea válido, debe inducir a los agentes a reportar su tipo verdadero, es decir, resolver el siguiente problema de compatibilidad de incentivos:

$$u_i(\theta_i, g^*(\theta_i)) \geq u_i(\theta_i, g^*(\theta'_i)), \quad \forall \theta'_i \in \Theta_i.$$

El principio de revelación nos permite restringir el análisis a mecanismos directos en los que decir la verdad es una estrategia de equilibrio. Esta simplificación es particularmente útil en contextos donde los agentes poseen información privada relevante para sus decisiones, y el diseñador enfrenta un problema de selección adversa. Un caso paradigmático de este tipo es el modelo de *screening*, en el cual un agente principal diseña un conjunto de contratos o asignaciones con el objetivo de inducir a los agentes a autoseleccionarse de acuerdo con su tipo. A continuación, desarrollaremos el análisis formal de estos modelos y sus implicancias económicas.

E.2. Screening

Consideremos un entorno clásico de selección adversa, en el cual un vendedor diseña un mecanismo para ofrecer un bien a compradores que difieren en su valoración privada del bien. La utilidad de un comprador de tipo θ que paga una transferencia monetaria t está dada por:

$$u(\theta) = \theta - t.$$

Los tipos θ están distribuidos según una función de distribución F con densidad f ,

es decir:

$$\theta \sim F, \quad \text{con } \frac{dF}{dx} = f(x),$$

y soporte $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, donde $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$. Además, suponemos que $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

La probabilidad de que la valoración de un comprador sea mayor que un precio p es $1 - F(p)$. El vendedor que fija un precio único busca maximizar su ingreso esperado, dado por:

$$p(1 - F(p)).$$

Un mecanismo está definido por un par de funciones:

- $q : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [0, 1]$, que representa la probabilidad de que el bien sea asignado (es decir, comprado).
- $t : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}$, la transferencia o pago realizado por el comprador.

La función $\alpha(\theta)$ representa el tipo reportado por un comprador de tipo real θ . Sin pérdida de generalidad, gracias al Principio de Revelación, podemos asumir que los compradores reportan su tipo verdadero.

Proposición E.2.1. Para todo mecanismo Γ y estrategia óptima α , existe un mecanismo directo Γ' y una estrategia α' tal que:

1. $\alpha'(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.
2. Las funciones $q(\theta)$ y $t(\theta)$ bajo Γ' coinciden con la probabilidad de compra y el pago esperado bajo (Γ, α) .

Definición E.2.2. Diremos que un mecanismo directo (q, t) es:

- *Compatible según incentivos (IC)* si para todo θ, θ' :

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta').$$

- *Individualmente racional (IR)* si para todo θ :

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0.$$

Lema E.2.3. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces $q(\theta)$ es creciente en θ .

Demostración. Sean $\theta > \theta'$. Por IC se tiene:

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'),$$

$$\theta' q(\theta) - t(\theta) \leq \theta' q(\theta') - t(\theta').$$

Restando las desigualdades:

$$(\theta - \theta')q(\theta) \geq (\theta - \theta')q(\theta') \Rightarrow q(\theta) \geq q(\theta').$$

□

Lema E.2.4. Si un mecanismo es IC, entonces la utilidad $u(\theta)$ es creciente y convexa. Además, es diferenciable en casi todo punto, y se cumple:

$$u'(\theta) = q(\theta).$$

Demostración. Se tiene:

$$u(\theta) = \max_{\theta'} \{\theta q(\theta') - t(\theta')\},$$

que es el máximo de funciones lineales afines en θ , por lo que u es convexa y creciente. Como resultado, es diferenciable casi en todo punto y su derivada es $q(\theta)$. En efecto, para lo último: Considere un tipo θ tal que u es diferenciable. Sea $\delta > 0$. Entonces, por compatibilidad según incentivos, se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(\theta + \delta) - u(\theta)}{\delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\theta + \delta)q(\theta) - t(\theta) - (\theta q(\theta) - t(\theta))}{\delta} \quad (\text{E.1})$$

$$= q(\theta). \quad (\text{E.2})$$

De forma análoga, se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(\theta) - u(\theta - \delta)}{\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\theta q(\theta) - t(\theta) - ((\theta - \delta)q(\theta) - t(\theta))}{\delta} \quad (\text{E.3})$$

$$= q(\theta). \quad (\text{E.4})$$

Juntando ambas desigualdades, se concluye que $u'(\theta) = q(\theta)$ siempre que u sea diferenciable en θ . □

Lema E.2.5. Equivalencia de pago.

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Demostración. El hecho de que la función u sea convexa implica, por el corolario 17 del capítulo 6 de Royden and Fitzpatrick (2010), que es absolutamente continua. A su vez, por el teorema 10 del mismo capítulo, se concluye que u es igual a la integral de su derivada, es decir:

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u'(x)dx,$$

donde, como se ha demostrado anteriormente, $u'(\theta) = q(\theta)$ casi en todo punto. \square

Lema E.2.6. Equivalencia del retorno.

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta}q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Demostración. Recordemos que $u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$. Si sustituimos esta expresión en la fórmula del lema E.2.5 y despejamos $t(\theta)$, obtenemos el resultado deseado. \square

Proposición E.2.7. Un mecanismo directo es IC si y solo si:

1. q es no decreciente.
2. Se verifica:

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta}q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Demostración. Para probar la suficiencia, debemos demostrar que ningún tipo θ prefiere hacerse pasar por otro tipo θ' si se satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la proposición. Es decir, queremos probar que:

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'). \tag{E.5}$$

Usando la identidad $u(\theta') = \theta'q(\theta') - t(\theta')$ obtenida en los lemas anteriores, reescribimos la expresión:

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta'q(\theta') + \theta'q(\theta') - t(\theta') \tag{E.6}$$

$$= \theta q(\theta') - \theta'q(\theta') + u(\theta') \tag{E.7}$$

$$\Rightarrow u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta')q(\theta'). \tag{E.8}$$

Por la equivalencia de pagos (lema E.2.5), tenemos que

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx, \quad u(\theta') = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta'} q(x)dx.$$

Restando las dos expresiones:

$$u(\theta) - u(\theta') = \int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx. \tag{E.9}$$

Por lo tanto, la desigualdad (E.8) es equivalente a:

$$\int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta')dx. \tag{E.10}$$

La integral de la derecha es simplemente $q(\theta')$ multiplicada por la longitud del intervalo $|\theta - \theta'|$. Para comparar ambas integrales, supongamos primero que $\theta > \theta'$. Como q es creciente, se tiene que $q(x) \geq q(\theta')$ para todo $x \in [\theta', \theta]$. Por lo tanto, la integral a la izquierda de (E.10) es mayor o igual que la de la derecha. Si por el contrario $\theta < \theta'$, el argumento es completamente análogo: seguimos integrando una función creciente $q(x)$, ahora en el intervalo $[\theta, \theta']$, y de nuevo $q(x) \leq q(\theta')$ en ese intervalo, lo que garantiza que

$$\int_{\theta}^{\theta'} q(x)dx \leq \int_{\theta}^{\theta'} q(\theta')dx.$$

Al cambiar el signo de la desigualdad (ya que ahora $\theta - \theta' < 0$), recuperamos nuevamente (E.10). En consecuencia, se concluye que:

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta') \quad \forall \theta, \theta',$$

es decir, decir la verdad es una estrategia óptima para todos los tipos siempre que q sea creciente y se cumpla la condición de equivalencia de retorno, lo cual completa la prueba de suficiencia. □

Proposición E.2.8. Un mecanismo directo IC es IR si y solo si:

$$u(\underline{\theta}) \geq 0 \Leftrightarrow t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta}q(\underline{\theta}).$$

Demostración. Por el lema E.2.4, u es creciente en θ para mecanismos compatibles según incentivos. Por lo tanto, $u(\underline{\theta})$ es no negativa para todo θ si y solo si es no negativa para el menor valor de θ . □

Lema E.2.9. El mecanismo que maximiza la utilidad del vendedor entre todos los mecanismos IC e IR satisface:

$$t(\theta) = \theta q(\theta).$$

Demostración. Si $t(\theta) < \theta q(\theta)$, el vendedor puede aumentar su ganancia subiendo el pago mínimo. \square

Sea $\mathcal{F} = \{f : \Theta \rightarrow \mathbb{R} \text{ acotadas}\}$ con la estructura de espacio vectorial y norma:

$$\|f\|_1 = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} |f(\theta)| d\mu.$$

Definamos $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ como el conjunto de funciones crecientes que toman valores en $[0, 1]$.

Lema E.2.10. \mathcal{M} es compacto y convexo.

Definición E.2.11. Un punto $x \in C$ es extremo si $x + y \notin C$ o $x - y \notin C$ para todo $y \neq 0$.

Proposición E.2.12. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y lineal, con X compacto y convexo. Entonces el máximo de f se alcanza en un punto extremo de X .

Lema E.2.13. Una función $q \in \mathcal{M}$ es un punto extremo si y solo si $q(\theta) \in \{0, 1\}$ casi en todo punto.

Proposición E.2.14. El mecanismo óptimo que maximiza el valor esperado del vendedor está dado por:

$$q(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta > p^* \\ 0 & \text{si } \theta < p^* \end{cases} \quad \text{donde } p^* \in \arg \max_p p(1 - F(p)),$$

y

$$t(\theta) = \begin{cases} p^* & \text{si } \theta > p^* \\ 0 & \text{si } \theta < p^*. \end{cases}$$

E.3. Precios no lineales

En esta sección analizamos un entorno clásico de precios no lineales. A diferencia del problema de screening anterior, el bien es ahora divisible y la utilidad del comprador depende de la cantidad adquirida. Esto permite diseñar menús de precios más ricos. Un monopolista ofrece un bien infinitamente divisible (como azúcar o electricidad) a un comprador con tipo privado θ . Las características del modelo son:

- Costos lineales de producción: $C(q) = c \cdot q$, con $c \geq 0$.
- El vendedor es neutral al riesgo.
- La utilidad del comprador es $u(\theta) = \theta v(q) - t$, con $v(0) = 0$, $v' > 0$, $v'' < 0$.
- El tipo θ está distribuido en $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ con densidad f estrictamente positiva.
- Suponemos que $\bar{\theta}v'(0) > c$ para que exista demanda.

El mecanismo es un par de funciones (q, t) , donde $q(\theta)$ es la cantidad asignada y $t(\theta)$ el pago que realiza un agente de tipo θ . Por el principio de revelación, se puede suponer que el comprador revela su tipo verdadero, es decir, la estrategia α es la identidad.

Proposición E.3.1. Un mecanismo directo (q, t) es compatible según incentivos si y solo si:

1. q es creciente.
2. Para todo $\theta \in \Theta$,

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + \theta v(q(\theta)) - \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) dx.$$

Además, el mecanismo es individualmente racional si y solo si

$$t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})).$$

De hecho, se satisface con igualdad:

$$t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})),$$

y por lo tanto,

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) dx.$$

El beneficio esperado del monopolista es:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[\theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) dx - cq(\theta) \right] f(\theta) d\theta.$$

Reescribiendo la integral doble:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) dx f(\theta) d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(x)) \int_x^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta dx \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(x)) (1 - F(x)) dx. \end{aligned}$$

Así, el ingreso esperado es:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[v(q(\theta)) \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right) - cq(\theta) \right] f(\theta) d\theta.$$

El vendedor busca entonces maximizar, en q , el llamado *surplus virtual*¹. Maximizar el *surplus virtual* equivale entonces a resolver un problema con información completa, pero sobre esta valoración ajustada, lo cual facilita la caracterización del mecanismo óptimo y permite obtener condiciones de primer orden necesarias para su diseño:

$$v(q(\theta)) \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right) - cq(\theta).$$

Aplicando condiciones de primer orden se obtiene:

$$v'(q(\theta)) \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right) = c.$$

¹A través del proceso de maximización bajo información asimétrica, utilizando el principio de revelación y las condiciones de primer orden, se deduce que el término relevante en el ingreso esperado del vendedor no es simplemente $\theta v(q)$, sino $v(q) \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right)$. A este término se le denomina *surplus virtual*. La expresión $\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$ representa una *valoración ajustada* del comprador, que descuenta el valor real θ en función de la necesidad de mantener incentivos para los tipos inferiores. Esta diferencia se interpreta como la *renta de información* que el vendedor debe dejar al comprador para que revele su tipo de forma veraz. En términos prácticos, el vendedor actúa como si enfrentara un comprador con tipo reducido, igual a esta *valoración marginal virtual*. Desde el punto de vista estructural, el término $\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$ crece con la distribución acumulada $F(\theta)$, ya que un mayor $F(\theta)$ indica que el tipo θ está más arriba en la distribución (es decir, es más raro), lo cual reduce la necesidad de ofrecer incentivos para separarlo de tipos más bajos. A la vez, este término decrece con la densidad $f(\theta)$: una mayor $f(\theta)$ implica que hay muchos tipos cercanos, por lo que es más costoso inducir verdad revelación. Por tanto, una alta densidad en torno a θ implica una mayor penalización informacional. Maximizar el *surplus virtual* equivale entonces a resolver un problema con información completa sobre un tipo *ajustado endógenamente*, lo cual permite derivar condiciones de primer orden bien definidas y simplificar el diseño óptimo del mecanismo.

Si el término multiplicador es no positivo, es óptimo asignar $q(\theta) = 0$. Caso contrario, existe una única solución para $q(\theta)$ debido a la concavidad de v .

Proposición E.3.2. Suponga que la función $\theta \mapsto \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ es creciente. Esta propiedad se denomina regularidad de F . Entonces:

1. Si $v'(0) \left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \right) \leq c$, entonces $q(\theta) = 0$.
2. En caso contrario, $q(\theta)$ resuelve

$$v'(q(\theta)) \left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \right) = c.$$

Y el pago asociado es:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) dx.$$

Ejemplo E.3.3. Supongamos $c = 1$, $v(q) = \sqrt{q}$ y que $\theta \sim U[0, 1]$. Entonces,

$$\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} = 2\theta - 1.$$

Para $\theta \leq 0,5$, $q(\theta) = 0$. Si $\theta > 0,5$:

$$\frac{1}{2\sqrt{q}}(2\theta - 1) = 1 \Rightarrow q(\theta) = \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Ejemplo E.3.4. El pago correspondiente es:

$$t(\theta) = \theta \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \int_{0,5}^{\theta} \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{8}.$$

También se puede expresar la política de precios de forma invertida:

$$\theta = \sqrt{q} + \frac{1}{2} \Rightarrow t(q) = \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q}}{2}.$$

E.4. Subastas con un único bien

En esta sección estudiamos el problema del diseño de mecanismos en un entorno bayesiano con múltiples agentes. Nos situamos en un modelo de valores privados, donde cada agente conoce su propia valoración del bien pero no la de los demás.

Consideramos un conjunto finito de agentes $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Cada agente $i \in I$ tiene una valoración privada $\theta_i \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ sobre el bien, y su utilidad es

$$u_i = \theta_i - t_i,$$

donde t_i representa la transferencia monetaria que realiza al vendedor. Este último es neutral al riesgo y recibe un ingreso total de $\sum_{i \in I} t_i$.

Los tipos θ_i son aleatorios e independientes, con distribuciones acumuladas F_i y densidades f_i estrictamente positivas en el soporte común $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

Definición E.4.1. Un mecanismo directo consiste en funciones q y $\{t_i\}_{i \in I}$ tales que:

$$q : \Theta \rightarrow \Delta = \left\{ (q_1, \dots, q_N) : 0 \leq q_i \leq 1, \sum_{i=1}^N q_i \leq 1 \right\},$$

$$t_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall i \in I.$$

En este mecanismo, los agentes reportan sus tipos de forma simultánea e independiente. La función q define la regla de asignación del bien. El valor $q_i(\theta)$ representa la probabilidad de que el agente i reciba el bien cuando el vector de tipos reportado es θ . La cantidad $1 - \sum_{i=1}^N q_i(\theta)$ es la probabilidad de que el bien no se asigne.

Proposición E.4.2. Principio de revelación. Para todo mecanismo Γ y todo equilibrio de Bayes-Nash σ de Γ , existe un mecanismo directo Γ' y un equilibrio α' de Γ' tal que:

1. Para cada agente i y tipo $\theta_i \in \Theta_i$, se cumple que $\alpha'_i(\theta_i) = \theta_i$.
2. Para cada vector θ , la distribución de pagos resultante bajo Γ si los agentes juegan α es la misma que bajo Γ' si juegan α' . Lo mismo ocurre con los valores esperados de las transferencias.

Demostración. Construyamos Γ' definiendo las funciones q y t_i tal como lo exige el ítem (ii) de la proposición E.4.2. Podemos probar el resultado mostrando que decir la verdad es un equilibrio de Bayes. Supongamos que no lo fuera. Si un tipo θ_i prefiere reportar que su tipo es θ'_i , entonces el mismo tipo θ_i también preferiría desviarse de σ y jugar la estrategia que σ prescribe para θ'_i en el mecanismo original Γ . Por lo tanto, σ no es un equilibrio de Bayes en Γ , lo que contradice la hipótesis inicial. \square

Dado un tipo reportado por el agente i , definimos la cantidad esperada que este recibe como:

$$Q_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} q_i(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i},$$

donde θ_{-i} es el vector de tipos de los demás agentes, y f_{-i} su densidad conjunta. Análogamente, la transferencia esperada es:

$$T_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} t_i(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i}.$$

Finalmente, la utilidad esperada del agente i , dada su valoración θ_i , es:

$$U_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i).$$

Definición E.4.3. Un mecanismo directo es compatible según incentivos si decir la verdad es un equilibrio de Bayes-Nash, es decir, si para todo $i \in I$ y para todo $\theta_i, \theta'_i \in \Theta_i$ se cumple:

$$\theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i) \geq \theta_i Q_i(\theta'_i) - T_i(\theta'_i).$$

Definición E.4.4. Un mecanismo directo es individualmente racional si, condicionado a su tipo, cada agente prefiere participar. Es decir:

$$U_i(\theta_i) \geq 0, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i.$$

Lema E.4.5. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces Q_i es creciente para cada $i \in I$.

Lema E.4.6. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces U_i es creciente y cóncava. Por lo tanto, U_i es diferenciable en casi todo punto, y se cumple:

$$U'_i(\theta_i) = Q_i(\theta_i).$$

Lema E.4.7. Equivalencia de pago. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces para cada $i \in I$ y para todo $\theta_i \in \Theta$ se cumple:

$$U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

Lema E.4.8. Equivalencia de retorno. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces para cada $i \in I$ y para todo $\theta_i \in \Theta$ se cumple:

$$T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

Proposición E.4.9. Un mecanismo directo (q, t_1, \dots, t_N) es compatible según incentivos si y solo si, para todo $i \in I$:

1. La función Q_i es creciente.
2. Se verifica la expresión de equivalencia de retorno:

$$T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

Proposición E.4.10. Un mecanismo directo es compatible según incentivos e individualmente racional si y solo si, para todo $i \in I$:

$$T_i(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta}).$$

E.5. Maximización del retorno esperado

Queremos caracterizar el mecanismo directo que, bajo restricciones de compatibilidad con incentivos e individualmente racionalidad, maximiza el retorno esperado del vendedor.

Lema E.5.1. Si un mecanismo directo es compatible según incentivos e individualmente racional, y maximiza el retorno esperado del vendedor, entonces para todo $i \in I$ se cumple:

$$T_i(\underline{\theta}) = \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta}).$$

Este resultado implica que el vendedor no deja renta informacional a los tipos más bajos. De este modo, se deduce que:

- El vendedor debe escoger funciones q tales que Q_i sea creciente para todo $i \in I$.
- Los pagos se determinan usando la ecuación de equivalencia de retorno (proposición E.4.10):

$$T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

- El retorno esperado del vendedor por parte del agente i es:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} Q_i(\theta_i) \left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right) f_i(\theta_i) d\theta_i.$$

- El retorno esperado total es la suma sobre todos los agentes:

$$\sum_{i \in I} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} Q_i(\theta_i) \left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right) f_i(\theta_i) d\theta_i.$$

Definimos para cada agente i la *valoración marginal virtual* como:

$$\psi_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}, \quad \forall i \in I, \theta_i \in \Theta.$$

La asignación *no restringida* que maximiza el retorno esperado es entonces:

$$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \psi_i(\theta_i) > 0 \text{ y } \psi_i(\theta_i) > \psi_j(\theta_j) \forall j \neq i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El caso de empate tiene probabilidad cero, dado que las distribuciones son continuas (continuidad absoluta respecto a Lebesgue). Si ψ_i es estrictamente creciente (lo cual ocurre bajo regularidad de F_i), entonces se puede garantizar que Q_i también sea creciente.

Proposición E.5.2 (Myerson, 1981). Suponga que cada distribución F_i es regular. Entonces, el mecanismo directo que maximiza el beneficio esperado del vendedor entre todos los que son compatibles con incentivos e individualmente racionales, cumple:

1. Asignación:

$$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \psi_i(\theta_i) > 0 \text{ y } \psi_i(\theta_i) > \psi_j(\theta_j) \forall j \neq i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. Pagos:

$$T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

Ahora consideramos un diseño de mecanismo en el que el vendedor desea maximizar el *bienestar esperado total*, definido como:

$$\sum_{i \in I} q_i(\theta) \theta_i.$$

Proposición E.5.3. Entre todos los mecanismos compatibles con incentivos e individualmente racionales, aquellos que maximizan el bienestar esperado satisfacen:

1. Asignación:

$$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i > \theta_j \forall j \neq i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. Transferencias:

$$T_i(\theta_i) \leq \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x) dx.$$

Ejemplo E.5.4. Supongamos $N = 2$, $\underline{\theta} = 0$, $\bar{\theta}_1 = 1$, con $F_1(\theta_1) = \theta_1^2$ y $F_2(\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_2^2$. Entonces:

$$\psi_1(\theta_1) = \frac{3}{2}\theta_1 - \frac{1}{2\theta_1}, \quad \psi_2(\theta_2) = \frac{3}{2}\theta_2 - \frac{1}{2}.$$

Se tiene que:

$$\psi_1(\theta_1) < 0 \Leftrightarrow \theta_1 < \sqrt{1/3}, \quad \psi_2(\theta_2) < 0 \Leftrightarrow \theta_2 < 1/3.$$

Finalmente, el bien se asigna al agente 1 si:

$$\psi_1(\theta_1) > \psi_2(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1 - \frac{1}{3\theta_1} + \frac{1}{3} > \theta_2.$$

Ejemplo E.5.5. Bienes públicos. La teoría del diseño de mecanismos bayesianos se aplica inicialmente al problema de provisión de bienes públicos. Consideremos una comunidad con N agentes, denotados por $I = \{1, \dots, N\}$, con $N \geq 2$. Se desea decidir si se provee un bien público $g \in \{0, 1\}$, el cual no es excluible.

Cada agente $i \in I$ tiene una valuación privada θ_i y puede realizar una transferencia $t_i \geq 0$. Su utilidad es:

$$\theta_i g - t_i.$$

Su tipo θ_i se distribuye según F_i , con soporte $\Theta_i = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, y con densidad positiva $f_i(\theta_i) > 0$ para todo $\theta_i \in \Theta$. Suponemos que los tipos son i.i.d., y denotamos por $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ el vector de tipos, con soporte $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]^N$. El costo de producir el bien público es $c > 0$. El bienestar social resultante de una asignación g y transferencias t_i es:

$$\left(\sum_{i \in I} \theta_i \right) g - \sum_{i \in I} t_i.$$

Un mecanismo directo en este contexto está dado por una regla de decisión $q : \Theta \rightarrow \{0, 1\}$ y funciones de transferencia $t_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos $Q_i : \Theta_i \rightarrow [0, 1]$ como la probabilidad que el bien se provea dado el tipo de i , y $T_i : \Theta_i \rightarrow \mathbb{R}$ la transferencia esperada. La utilidad esperada del agente i es:

$$U_i(\theta_i) = Q_i(\theta_i)\theta_i - T_i(\theta_i).$$

Un mecanismo es *ex-post presupuesto balanceado* si para todo $\theta \in \Theta$:

$$\sum_{i \in I} t_i(\theta) \geq cq(\theta).$$

Es *ex-ante presupuesto balanceado* si:

$$\int_{\Theta} \sum_{i \in I} t_i(\theta) f(\theta) d\theta \geq \int_{\Theta} cq(\theta) f(\theta) d\theta.$$

Definición E.5.6. Dos mecanismos directos son equivalentes si tienen la misma regla de decisión y, para todo $i \in I$ y $\theta_i, \theta'_i \in \Theta_i$, las transferencias condicionales al reporte de tipo son iguales.

Proposición E.5.7. Todo mecanismo directo que es ex-ante presupuesto balanceado tiene un mecanismo directo ex-post presupuesto balanceado equivalente.

Demostración. Véase [Börgers \(2015\)](#). □

Maximización el bienestar. Para un mecanismo (q, t_1, \dots, t_N) , la regla óptima de asignación que maximiza el bienestar social es:

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i \in I} \theta_i \geq c, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La regla de transferencia correspondiente es:

$$\sum_{i \in I} t_i^*(\theta) = \begin{cases} c, & \text{si } q^*(\theta) = 1, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Proposición E.5.8. Un mecanismo directo es compatible según incentivos e individualmente racional si y solo si:

$$N\theta \geq c \quad \text{o} \quad N\bar{\theta} \leq c.$$

Demostración. Si $N\underline{\theta} \geq c$, entonces un mecanismo en el cual el bien público se produce siempre y cada agente paga c/N es eficiente en el primer orden, compatible con incentivos y racionalmente individual. Si $N\bar{\theta} \leq c$, entonces un mecanismo en el cual el bien nunca se produce y ningún agente paga nada también es eficiente en el primer orden, compatible con incentivos y racionalmente individual. Queda probar la conversas. Consideramos el caso intermedio $N\underline{\theta} < c < N\bar{\theta}$ y queremos demostrar que no existe un mecanismo compatible con incentivos e individualmente racional que sea de primer orden. Para ello, construiremos un mecanismo directo que implementa la regla eficiente q^* y que es compatible con incentivos y racionalmente individual. Luego, argumentaremos que este mecanismo maximiza las transferencias esperadas entre todos los mecanismos que son compatibles con incentivos, individualmente racionales y eficientes. Finalmente, mostraremos que este mecanismo genera un déficit presupuestario esperado en todos los casos no triviales. La afirmación se sigue de este resultado. Véanse los lemas E.5.10 y E.5.11. \square

Definición E.5.9. Un *mecanismo pivote* es aquel definido por la regla de decisión q^* y el siguiente esquema de transferencias:

$$t_i(\theta) = \underline{\theta}q^*(\theta, \theta_{-i}) + (q^*(\theta) - q^*(\theta, \theta_{-i})) \left(c - \sum_{j \neq i} \theta_j \right).$$

Lema E.5.10. El mecanismo pivote es compatible según incentivos y racional individualmente.

Demostración. Consideremos un agente $i \in I$ de tipo θ_i que contempla reportar un tipo falso $\theta'_i \neq \theta_i$. Fijemos los tipos de los demás agentes como θ_{-i} . Vamos a mostrar que reportar la verdad es *siempre* óptimo, independientemente de los tipos de los demás agentes. Esto implica inmediatamente que la verdad es un equilibrio bayesiano. Si ignoramos los términos que no dependen del reporte del agente i , su utilidad al reportar θ'_i es:

$$\begin{aligned} & \theta_i q(\theta'_i, \theta_{-i}) - q(\theta'_i, \theta_{-i}) \left(c - \sum_{j \neq i} \theta_j \right) \\ &= q(\theta'_i, \theta_{-i}) \left(\sum_{j=1}^N \theta_j - c \right). \end{aligned}$$

Es decir, la utilidad del agente i es exactamente igual al índice de bienestar social si se toma la decisión $q(\theta'_i, \theta_{-i})$. Como q es la regla *de primer orden* (first-best), esta decisión maximiza el bienestar social. Por lo tanto, la utilidad del agente i se maximiza si y solo si reporta su tipo verdadero: $\theta'_i = \theta_i$. Esto prueba la compatibilidad con incentivos. Para verificar la racionalidad individual, notamos que la utilidad esperada del agente i es exactamente cero si su tipo es $\underline{\theta}$. Por un resultado análogo al lema E.4.6, esto implica que la utilidad esperada intermedia de todos los tipos es al menos cero. Por tanto, el mecanismo también es racionalmente individual. \square

Lema E.5.11. Si $N\underline{\theta} < c < N\bar{\theta}$, el presupuesto esperado ex-ante del mecanismo pivote es negativo.

Demostración. Mostraremos que el superávit presupuestario ex post del mecanismo pivote es siempre no positivo, y con probabilidad positiva, estrictamente negativo. Esto implica que el superávit presupuestario esperado ex ante es negativo. Primero, consideremos un vector de tipos θ tal que $q^*(\theta) = 0$. En este caso, no se incurre en costos ni se generan pagos por parte de los agentes. Por tanto, el déficit es cero. Luego, consideremos un estado θ tal que $q(\theta) = 1$ y además $q(\theta, \theta_{-i}) = 1$ para todo $i \in I$. En este caso, todos los agentes pagan $\underline{\theta}$. Como asumimos que $N\underline{\theta} < c$, los pagos totales son menores que c y existe un déficit. Finalmente, consideremos los estados θ tales que $q(\theta) = 1$, pero para algún $i \in I$ se tiene que $q(\underline{\theta}, \theta_{-i}) = 0$. Sea P el conjunto de todos esos agentes pivotes. Definamos $NP = I \setminus P$ como el complemento. Llamaremos, con abuso de notación, $P = |P|$ y $NP = |NP|$. El total de transferencias es:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in P} \left(c - \sum_{j \neq i} \theta_j \right) + \sum_{i \in NP} \underline{\theta} &= Pc - P \sum_{j \in NP} \theta_j - (P-1) \sum_{j \in P} \theta_j + \sum_{i \in NP} \underline{\theta} \\ &= Pc - (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}). \end{aligned}$$

Como por construcción, en los estados donde $q(\theta) = 1$, se cumple que $c \leq \sum_{j \in I} \theta_j$, entonces:

$$\begin{aligned} Pc - (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) &\leq Pc - (P-1)c - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) \\ &= c - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}). \end{aligned}$$

Por tanto, el total de transferencias no excede c . Estados en los que el bien público se produce y algunos agentes son pivotes ocurren con probabilidad positiva bajo nuestras hipótesis. Además, condicionado a que tal estado ocurra, con probabilidad 1 se cumple que $\theta_i > \underline{\theta}$ para todo $i \in NP$. En este caso, el cálculo anterior muestra que el superávit es estrictamente negativo, y por lo tanto existe un déficit presupuestario esperado. \square

El mecanismo pivote es un caso particular del mecanismo Vickrey-Clarke-Groves (VCG). En general, un mecanismo pertenece a la clase VCG si la regla de decisión q^* es eficiente, y el pago a cada agente se compone de dos términos: uno que depende únicamente de su tipo reportado y otro que es independiente de dicho reporte. Este segundo término puede ser arbitrario y se ajusta usualmente para cumplir con restricciones presupuestarias o equidad.

En este marco, el diseñador del mecanismo puede tener como objetivo maximizar el valor esperado de la ganancia neta agregada:

$$\int_{\Theta} q(\theta) \left(\sum_{i \in I} \theta_i - c \right) f(\theta) d\theta.$$

Tal como se discutió en secciones anteriores, la maximización está sujeta a las siguientes restricciones:

- **Compatibilidad con incentivos:** Q_i debe ser creciente.
- **Racionalidad individual:** $U_i(\underline{\theta}) \geq 0$.
- **Restricción presupuestaria esperada:**

$$-\sum_{i \in I} U_i(\underline{\theta}) + \int_{\Theta} q(\theta) \left[\sum_{i \in I} \left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} - c \right) \right] f(\theta) d\theta = 0.$$

Luego, el Lagrangiano del problema asociado, introduciendo un multiplicador de Lagrange $\lambda \geq 0$, se escribe como:

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = \int_{\Theta} q(\theta) \left(\sum_{i \in I} \theta_i - c \right) f(\theta) d\theta + \lambda \int_{\Theta} q(\theta) \left[\sum_{i \in I} \left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right) - c \right] f(\theta) d\theta.$$

El multiplicador λ puede tomar el valor cero únicamente si:

$$\int_{\Theta} q(\theta) \left[\sum_{i \in I} \left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right) - c \right] f(\theta) d\theta > 0.$$

Observación E.5.12. Dado que $q \in X$ donde X es convexo, y la función objetivo es lineal (por lo tanto cóncava), las condiciones de primer orden son suficientes.

Reescribiendo el Lagrangiano se tiene:

$$\int_{\Theta} q(\theta)(1 + \lambda) \left[\sum_{i \in I} \left(\theta_i - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right) \right] f(\theta) d\theta.$$

La regla óptima se caracteriza por:

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i \in I} \theta_i > c + \sum_{i \in I} \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} \right), \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Draft: Prof. César Martínelli
Notes by Marcelo Gallardo

Apéndice F

Teorema de la envolvente y equivalencia de pagos

El *teorema de la envolvente* desempeña un rol central en el análisis moderno del diseño de mecanismos, al permitir derivar condiciones sobre pagos e incentivos sin requerir suposiciones restrictivas como la condición de *single crossing*. [Milgrom \(2004\)](#) muestra que muchos de los resultados más relevantes sobre eficiencia e incentivo-compatibilidad se deducen directamente del teorema de la envolvente. Entre estos resultados destacan el *lema de Myerson* ([Myerson, 1981](#)), que caracteriza la utilidad esperada en equilibrio de Bayes-Nash para mecanismos factibles y permite acotar el ingreso máximo alcanzable por cualquier subasta. Myerson demuestra, además, que subastas estándar con un precio de reserva adecuado pueden alcanzar dicho ingreso óptimo. Por su parte, el *lema de Holmström* ([Holmstrom, 1979](#)) establece una fórmula de pagos que debe cumplirse en todo mecanismo eficiente con estrategias dominantes, y prueba que el único esquema de pagos compatible con esa estructura es el mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves, lo que permite caracterizar su unicidad. Ambos lemas son profundamente análogos a resultados clásicos de la teoría de la demanda, como los lemas de Hotelling y Shepard, ya que todos se derivan del mismo principio: el teorema de la envolvente. Estas equivalencias pueden formularse tanto en términos de derivadas como de integrales de las funciones de utilidad. En conjunto, este enfoque proporciona una base teórica unificada para analizar mecanismos en entornos muy generales, ampliando el alcance del análisis económico más allá de modelos con condiciones estructurales

fuertes.

El *Teorema de la Envolvente* proporciona condiciones bajo las cuales la función de valor de un problema de optimización paramétrico es diferenciable y su derivada puede expresarse como el valor marginal del óptimo. A diferencia de las versiones clásicas que requieren convexidad o diferenciability estructural del conjunto de decisiones X , la versión en forma integral desarrollada por [Milgrom \(2004\)](#) y formalizada por [Milgrom and Segal \(2002\)](#) permite aplicarse a contextos como el diseño de mecanismos, donde los agentes eligen mensajes o estrategias de conjuntos no estructurados.

Consideremos una familia de problemas paramétricos indexados por $t \in [0,1]$, con función objetivo $u : X \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Sean:

$$V(t) = \sup_{x \in X} u(x, t), \tag{F.1}$$

$$X^*(t) = \{x \in X : u(x, t) = V(t)\}, \tag{F.2}$$

donde $V(t)$ es la función de valor y $X^*(t)$ el conjunto de soluciones óptimas. Llamaremos $x^*(t)$ una *selección* de $X^*(t)$.

Teorema F.0.1. Teorema de la Envolvente en Forma Integral. Sea $u(x, t)$ tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe una función derivable $u_2(x, t)$ tal que

$$u(x, b) - u(x, a) = \int_a^b u_2(x, s) ds \quad \text{para todo } a, b \in [0,1],$$

2. Existe una función integrable $b : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$|u_2(x, t)| \leq b(t) \quad \text{para todo } x \in X \text{ y casi todo } t \in [0,1],$$

3. Para casi todo $t \in [0,1]$, $X^*(t) \neq \emptyset$.

Entonces, para toda selección medible $x^*(t) \in X^*(t)$, se cumple:

$$V(t) = u(x^*(0), 0) + \int_0^t u_2(x^*(s), s) ds. \tag{F.3}$$

Demostración. Primero, definimos la función de valor:

$$V(t) = \sup_{x \in X} u(x, t).$$

Por la hipótesis (2), existe una función integrable $b : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $|u_2(x, t)| \leq b(t)$ para todo $x \in X$ y casi todo t . Definamos

$$B(t) = \int_0^t b(s) ds.$$

Entonces, para cualquier $t' < t'' \in [0,1]$, se tiene:

$$\begin{aligned} |V(t'') - V(t')| &= \left| \sup_{x \in X} u(x, t'') - \sup_{x \in X} u(x, t') \right| \\ &\leq \sup_{x \in X} |u(x, t'') - u(x, t')| \\ &= \sup_{x \in X} \left| \int_{t'}^{t''} u_2(x, s) ds \right| \\ &\leq \int_{t'}^{t''} \sup_{x \in X} |u_2(x, s)| ds \\ &\leq \int_{t'}^{t''} b(s) ds = B(t'') - B(t'). \end{aligned}$$

Ahora, tomemos una colección de intervalos disjuntos $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^k \subset [0, 1]$. Si $\sum_{i=1}^k (B(b_i) - B(a_i)) < \varepsilon$, entonces

$$\sum_{i=1}^k |V(b_i) - V(a_i)| \leq \sum_{i=1}^k (B(b_i) - B(a_i)) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que V es absolutamente continua (por la definición basada en sumas sobre intervalos disjuntos).

Luego, como V es absolutamente continua, es derivable casi en todo punto $t \in [0, 1]$. Fijemos un punto de derivabilidad t , y sea $x^*(t) \in \arg \max_{x \in X} u(x, t)$ tal que $V(t) = u(x^*(t), t)$. Tomando un punto cercano t' , se tiene:

$$V(t') = \sup_{x \in X} u(x, t') \geq u(x^*(t), t').$$

Entonces:

$$V(t') - V(t) \geq u(x^*(t), t') - u(x^*(t), t) = \int_t^{t'} u_2(x^*(t), s) ds.$$

Dividiendo entre $t' - t$ y tomando el límite cuando $t' \downarrow t$, se obtiene:

$$V'(t) \geq u_2(x^*(t), t).$$

Análogamente, si $t' < t$, se tiene:

$$V(t') \geq u(x^*(t), t'), \quad \Rightarrow \quad V(t) - V(t') \leq u(x^*(t), t) - u(x^*(t), t') = \int_{t'}^t u_2(x^*(t), s) ds,$$

y al dividir por $t - t'$ y tomar $t' \uparrow t$, se concluye:

$$V'(t) \leq u_2(x^*(t), t).$$

Por lo tanto, en todo punto de derivabilidad:

$$V'(t) = u_2(x^*(t), t).$$

Finalmente, aplicando el teorema fundamental del cálculo, se concluye:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t V'(s) ds = u(x^*(0), 0) + \int_0^t u_2(x^*(s), s) ds.$$

□

Este resultado es aplicable a contextos de diseño de mecanismos donde el conjunto de estrategias (acciones) no depende del tipo, y la función $u(x, \theta)$ representa la utilidad del agente tipo θ por el resultado x . La ecuación (F.3) impone una restricción sobre las funciones de desempeño que pueden ser implementadas en espacios de tipos continuos como $[0, 1]$.

Apéndice G

Responsabilidad electoral y democracia receptiva

En este anexo estudiamos el artículo [Martinelli and Duggan \(2020\)](#). El objetivo es, por un lado, ilustrar la aplicación de los teoremas de punto fijo en la búsqueda de equilibrios y, por otro, introducir un ejemplo de dinámica en juegos.

Considere un horizonte de dos periodos. Los jugadores son un político incumbente, un político retador y un votante representativo. La naturaleza selecciona los tipos de los políticos $\theta_i \in \Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, donde $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta(\Theta)$ representa la distribución a priori sobre los tipos. El desarrollo temporal (timing) es el siguiente:

1. En $t = 1$, el incumbente elige una acción x_1 (no observable), tras lo cual se realiza el outcome observado $y_1 = x_1 + \epsilon_1$, donde $\epsilon_1 \sim F$, siendo F una distribución con densidad f respecto a la medida de Lebesgue.
2. Los votantes actualizan sus creencias de manera bayesiana en base a la observación y_1 y eligen al ganador de la elección.
3. En $t = 2$, el ganador de la elección (incumbente o retador) escoge una acción x_2 , y se observa $y_2 = x_2 + \epsilon_2$, donde nuevamente $\epsilon_2 \sim F$. El juego concluye.

Dada una política x , un político de tipo $\theta_j \equiv j$ recibe un pago de la forma $w_j(x) + \beta$, donde w_j representa el interés del político como hacedor de política pública (por

ejemplo, el costo del esfuerzo o su preferencia por captar votantes), y $\beta \geq 0$ es el beneficio adicional asociado a ocupar el cargo. El outcome y genera una utilidad $u(y)$ tanto para el votante como para el político que no esté en el cargo en el segundo periodo. Los pagos totales de políticos y votantes son la suma de sus utilidades a lo largo de los dos periodos.

Se supone que, para cada $j = 1, \dots, n$, la función de utilidad w_j es de clase C^2 y posee un único maximizador \hat{x}_j . Se contemplan entonces familias funcionales como:

- Funciones tipo potencia: $w_j(x) = -|x - \hat{x}_j|^r$, con $r > 1$, incluyendo en particular el caso cuadrático $w_j(x) = -(x - \hat{x}_j)^2$.
- Funciones tipo exponencial: $w_j(x) = -e^{r(x - \hat{x}_j)} + r(x - \hat{x}_j) + 1$, con $r > 0$.

De manera más general, se realizan los siguientes supuestos sobre las funciones w_j :

- Para todo $j < n$, tenemos $w'_j(x) < w'_{j+1}(x)$ para todo x , $w'_1(0) \geq 0$ y $w'_n(x) < 0$ para x suficientemente grande. Note que $w'_j(\cdot)$ representa la voluntad marginal del político de intercambiar una política más alta por una mayor probabilidad de re-elección. Esto además implica que $0 \leq \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_n$.
- Para todo $j < n$, tenemos $w_j(\hat{x}_j) \leq w_{j+1}(\hat{x}_{j+1})$. Combinando este supuesto con el anterior, los incentivos electorales del incumbente son estrictamente crecientes en el tipo, capturando la idea de que tipos con valoraciones más altas tiene mayor disposición a escoger un política que incremente su probabilidad de ser escogidos.
- La densidad f de ϵ es diferenciable, estrictamente positiva sobre \mathbb{R} y satisface la propiedad estándar del ratio de verosimilitud MLRP:

$$\forall x' > x, y' > y : \frac{f(y - x)}{f(y - x')} > \frac{f(y' - x)}{f(y' - x')}.$$

Es una propiedad de log-supermodularidad y hace que un votante que observa un y mayor infiera que es más probable que x (la acción del político) también haya sido mayor. En este contexto, la función de verosimilitud para el parámetro x dado un y observado es $f(y - x)$. La propiedad MLRP implica que f es unimodal y tanto F como f son estrictamente log-cóncavas [Bagnoli and Bergstrom \(2005\)](#).

- Para todo $x > x'$, se cumple que $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{f(y-x)}{f(y-x')} = 0$ y $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y-x')}{f(y-x)} = 0$. En consecuencia, señales suficientemente extremas se vuelven arbitrariamente informativas sobre la acción adoptada. En particular, se captura el caso $f(\cdot)$ con media cero, distribución normal.
- u tiene un único máximo o es estrictamente creciente de forma que, definiendo

$$\mathbb{E}[u(y)|x] = \int u(y)f(y-x)dx,$$

se llega a que para todo $x, x' \in [\hat{x}_1, \hat{x}_n]$, con $x < x'$, tenemos

$$\mathbb{E}[u(y)|x] < \mathbb{E}[u(y)|x'].$$

El eventual máximo de u domina débilmente a \hat{x}_n .

Observación G.0.1. Si se permite que f sea clase C^2 , entonces, especificando parámetros de costo $\theta_j > \theta_{j+1}$ para $j < n$, podemos definir

$$w_j(x) = \mathbb{E}[u(y)|x] - \theta_j c(x),$$

para $c \in C^2$, $c'(\cdot) > 0$ para $x > 0$ y $c'(0) = 0$; siempre y cuando w_j tenga un único maximizador.

Se asume que ni el incumbente ni el retador pueden realizar promesas vinculantes antes de la elección. Es decir, aunque puedan hacer declaraciones o anuncios de campaña, no existe un mecanismo que obligue a los políticos a cumplir sus promesas una vez elegidos, por lo que los votantes forman expectativas racionales basadas en el comportamiento observado. Asimismo, los votantes no pueden comprometer de manera anticipada su voto: la decisión de votar se toma de manera libre e informada en el momento de la elección, en función de la información disponible, como el resultado observado y_1 . Además, se impone una condición de consistencia temporal en la formulación de políticas públicas: el político ganador debe escoger acciones que sean óptimas desde su perspectiva en el momento de actuar, sin posibilidad de comprometerse hoy a políticas que mañana preferiría modificar. En consecuencia, el análisis se centra en equilibrios bayesianos perfectos del modelo de responsabilidad electoral, los cuales requieren estrategias óptimas dadas las creencias y actualización

bayesiana coherente tras toda historia posible. Finalmente, se aplica un refinamiento adicional para eliminar comportamientos inverosímiles por parte de votantes y políticos, garantizando que las estrategias y creencias sean plausibles incluso fuera del equilibrio.

Una estrategia para un incumbente de tipo j es un par (π_1^j, π_2^j) , donde $\pi_1^j \in \Delta(X)$ y $\pi_2^j : X \times Y \rightarrow \Delta(X)$. La estrategia especifica mezclas de elecciones de política en el primer período y decisiones de política en el segundo período, dependiendo de la política previamente elegida y del outcome observado. Por otro lado, una estrategia para un retador de tipo j es una función

$$\gamma^j : Y \rightarrow \Delta(X),$$

que asigna mezclas de políticas en el segundo período para cada outcome observado. En el caso de los votantes, una estrategia es

$$\rho : Y \rightarrow [0, 1],$$

donde $\rho(y)$ es la probabilidad de votar por el incumbente dado el outcome y .

Un sistema de creencias del votante está representado por una distribución de probabilidad $\mu(\cdot|y_1)$ sobre $\Theta \times X$, como función del outcome observado y_1 . Luego, un perfil de estrategias

$$\sigma = ((\pi^j, \gamma^j)_{j \in \Theta}, \rho)$$

es *secuencialmente racional* dado el sistema de creencias μ si ni el incumbente ni el retador pueden obtener un mayor beneficio desviándose de las estrategias propuestas en ningún nodo de decisión, y si el votante elige al candidato que maximiza su utilidad esperada tras toda posible realización de y_1 .

Observación G.0.2. Las creencias μ son *consistentes* con el perfil de estrategias σ si para cada y_1 , la distribución $\mu(j, x|y_1)$ se deriva de las estrategias iniciales $(\pi_1^j)_{j \in \Theta}$ aplicando la regla de Bayes.

Un *equilibrio bayesiano perfecto* es un par (σ, μ) tal que σ es secuencialmente racional dado μ , y μ es consistente con σ .

La racionalidad secuencial implica que los retadores escogen sus políticas ideales en el segundo período, ya que no hay elecciones posteriores. Es decir, γ^j asigna

probabilidad uno a \hat{x}_j para todo y_1 . En consecuencia, el beneficio esperado para el votante al elegir al retador es

$$V_C = \sum_k p_k \mathbb{E}[u(y) \mid x = \hat{x}_k].$$

Asimismo, la racionalidad secuencial implica que $\pi_2^j(\cdot \mid x_1, y_1)$ asigna probabilidad uno a \hat{x}_j para todo x_1 y todo y_1 . Por tanto, se asume que los políticos eligen sus políticas ideales en el segundo período, y se simplifica la notación omitiendo el subíndice en π_1^j para las políticas mixtas usadas por j en el primer período. Se sigue que el pago esperado al votante por la re-elección del incumbente es

$$V_I(y_1) = \sum_k \mu_T(k, y_1) \mathbb{E}[u(y) \mid \hat{x}_k].$$

Así, el beneficio esperado para el votante de re-elegir al incumbente tras observar y_1 es

$$V_I(y_1) = \sum_k \mu_T(k \mid y_1) \mathbb{E}[u(y) \mid x = \hat{x}_k],$$

donde $\mu_T(k \mid y_1)$ es la distribución marginal sobre el tipo del incumbente dado el outcome y_1 . Por tanto, el incumbente es re-elegido si $V_I(y_1) > V_C$ y solo si $V_I(y_1) \geq V_C$.

Definición G.0.3. Un equilibrio es *monótono* si el votante sigue una regla retrospectiva sencilla: existe un umbral $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que el votante reelige al incumbente si y sólo si $y_1 \geq y$.

Observación G.0.4. Esta condición de monotonía surge naturalmente al interpretar los outcomes como señales sobre las acciones de los políticos en el primer período.

Un *equilibrio electoral* es un equilibrio bayesiano perfecto que además es monótono. Los equilibrios electorales se caracterizan por tres condiciones:

1. **Actualización de creencias:** el votante actualiza sus creencias aplicando la Regla de Bayes tras observar el outcome y . En particular, cuando las mezclas de políticas π_j son discretas, se tiene:

$$\mu_T(j \mid y) = \frac{p_j \sum_x f(y - x) \pi_j(x)}{\sum_k p_k \sum_x f(y - x) \pi_k(x)}.$$

Como la densidad de f es positiva, todos los outcomes son observables en el camino de juego, y Bayes determina completamente las creencias del votante.

2. **Condición de umbral:** el umbral y debe ser tal que, anticipando que los políticos escogen sus políticas ideales en el segundo período, el votante prefiere re-elegir al incumbente luego de observar y_1 , dado el sistema de creencias, si su utilidad esperada es mayor a

$$\sum_k p_k \mathbb{E}[u(y)|\hat{x}_k] \implies y_1 > \bar{y}$$

y es mayor o igual a

$$\sum_k p_k \mathbb{E}[u(y)|\hat{x}_k] \Leftrightarrow y_1 \geq \bar{y}.$$

Como $\mu_T(j|y_1)$ es continua en y_1 , se sigue que \bar{y} es finito y tal que $V^I(\bar{y}) = V^C$.

3. **Mejor respuesta del incumbente:** cada tipo de incumbente j , sabiendo que será re-elegido si $y_1 \geq \bar{y}$, y solo si $y_1 \geq \bar{y}$, elige en el primer período una política que maximiza:

$$w_j(x) + (1 - F(\bar{y} - x)) [w_j(\hat{x}_j) + \beta] + F(\bar{y} - x)V_C,$$

donde F es la función de distribución acumulada de la perturbación ε .

Para facilitar el análisis, en adelante se asume que todos los tipos de incumbentes están, en principio, interesados en la reelección, es decir,

$$w'_j(\hat{x}_j) + \beta > V^C > \lim_{x \rightarrow \infty} w_j(x) + \beta. \quad (\text{G.1})$$

de modo que, si la reelección está asegurada eligiendo sus políticas ideales en el primer período, entonces los beneficios de la reelección superan los costos. Nótese que el incumbente siempre puede elegir su política ideal, por lo que nunca es óptimo para el político escoger políticas grandes x para las cuales $w_j(x) + \beta < V^C$. Debido a la concavidad de w_j , nunca es óptimo seleccionar una política por debajo de la política ideal del político, por lo que existe al menos una solución al problema del incumbente en el primer período. Denotando tal solución por x_j^* , y la condición de primer orden necesaria para la solución del problema de maximización del incumbente es

$$w'_j(x_j^*) = -f(\bar{y} - x_j^*) [w_j(\hat{x}_j) + \beta - V^C]. \quad (\text{G.2})$$

Es decir, la desutilidad marginal en el periodo actual derivada de aumentar la política es exactamente compensada por la utilidad marginal en el segundo período, debido

al incremento en la probabilidad de reelección del político. Bajo la suposición de que $f(\cdot)$ es estrictamente positiva en todo su dominio y con la condición (G.1), el lado derecho de (G.2) es negativo, y se observa que para un umbral arbitrario y , el político óptimamente ejerce un esfuerzo positivo, es decir, elige $x_j^* > \hat{x}_j$ en su primer mandato.

Proposición G.0.5. Bajo los supuestos hechos, en todo equilibrio Bayesiano perfecto, exista un umbral $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que los votantes votan re-elección si $y_1 > \bar{y}$ y si y solo si $y_1 \geq \bar{y}$.

En el modelo de **dos tipos**, los políticos eligen políticas x_1, x_2 respectivamente. El votante fija un *cut-off* y^* tal que:

$$p_2 = \frac{p_2 f(y^* - x_2)}{p_1 f(y^* - x_1) + p_2 f(y^* - x_2)},$$

y si f es simétrica, entonces:

$$y^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Cada político maximiza:

$$W_j(x, r) = w_j(x) + r[w_j(\hat{x}_j) + \beta - V_C],$$

sujeto a $g(x, r) = 1 - F(y^* - x) - r \geq 0$.

Observación G.0.6. Con utilidades cuadráticas $w_j(x) = -(x - \hat{x}_j)^2$, el equilibrio puro implica:

$$x_j^* = \hat{x}_j + \frac{\beta - V_C}{2} f\left(\frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{2}\right),$$

y el corte del votante:

$$y^* = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} + \frac{\beta - V_C}{2} f\left(\frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{2}\right).$$

Proposición G.0.7. En el modelo de dos tipos con utilidades cuadráticas para los políticos, densidad normal estándar y votante neutral al riesgo, existe un equilibrio electoral, y todo equilibrio bayesiano perfecto es un equilibrio electoral. Sea el beneficio de ocupar el cargo β arbitrariamente grande. Entonces, para cualquier selección de equilibrios electorales σ :

- (i) el punto de corte del votante y^* crece sin límite, es decir, $y^* \rightarrow \infty$;
- (ii) el político de tipo 1 mezcla con probabilidad positiva entre exactamente dos políticas, $x_{1,*}^*$ y x_1^* , y el político de tipo 2 asigna probabilidad uno a una política x_2^* tal que $x_{1,*}^* < x_1^* < x_2^*$;
- (iii) la política más baja del político de tipo 1 converge hacia su política ideal, y las políticas más altas de ambos tipos crecen sin límite, es decir, $x_{1,*}^* \rightarrow \hat{x}_1$ y $x_1^*, x_2^* \rightarrow \infty$;
- (iv) las políticas más altas de los dos tipos se vuelven arbitrariamente cercanas, es decir, $x_2^* - x_1^* \rightarrow 0$;
- (v) la probabilidad de reelección converge a uno para ambos tipos, y en particular, la probabilidad de que el político de tipo 1 elija la política más alta converge a uno, es decir,

$$1 - F(y^* - x_j^*) \rightarrow 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \quad \text{y} \quad \pi_1(x_1^*) \rightarrow 1.$$

Una propiedad útil e intuitiva de los equilibrios electorales, destacada en la proposición (G.0.7), es que cada tipo de político tiene a lo sumo dos elecciones óptimas de política. Esta propiedad se extiende a una clase general de funciones de utilidad de los políticos y distribuciones de ruido que incluyen al modelo cuadrático-normal (Martinelli and Duggan, 2020).

Para formalizar las condiciones generales bajo las cuales este resultado se sostiene, se definen las funciones $h = f'/f$ y $\text{ARA}_j = w_j''/w_j'$, correspondientes respectivamente a la derivada del logaritmo de la densidad de ruido f y al coeficiente de aversión absoluta al riesgo del político de tipo j .

Se establece la siguiente condición suficiente:

Supuesto G.0.8. Para todo j y todo y finito, la función $\text{ARA}_j(x) + h(y - x)$ es estrictamente convexa en $x > \hat{x}_j$.

Bajo esta condición técnica pero permisiva, cada tipo de incumbente posee a lo sumo dos políticas óptimas como función del punto de corte. La solución mayor, denotada

$x_j^*(y)$, representa la opción de *apostar lo todo*, mientras que la solución menor, $x_{j,*}^*(y)$, representa *tomarlo con calma*. Además, se establece el siguiente resultado principal de existencia de equilibrio:

Teorema G.0.9. Bajo los supuestos iniciales y el supuesto G.0.8, existe un equilibrio electoral, y todo equilibrio electoral está dado por estrategias mixtas de políticas π_1^*, \dots, π_n^* y un punto de corte finito y^* tal que:

- (i) Cada político de tipo j mezcla sus políticas utilizando π_j^* , que asigna probabilidad positiva a lo sumo a dos políticas, denotadas x_j^* y $x_{j,*}$, donde $\hat{x}_j < x_{j,*} \leq x_j^*$;
- (ii) Los soportes de las estrategias de política están estrictamente ordenados por tipo, es decir, para todo $j < n$, se cumple $x_j^* < x_{j+1,*}$;
- (iii) El votante reelige al incumbente si y solo si $y \geq y^*$, y el punto de corte satisface:

$$x_{1,*} + \hat{z} < y^* < x_n^* + \hat{z},$$

donde \hat{z} es el modo de la distribución de resultados.

Para demostrar este teorema, se establece primero que las mejores respuestas de los políticos a la estrategia del votante son estrictamente monótonas en el tipo. Es decir, las estrategias políticas están dadas por una n -tupla ordenada (π_1, \dots, π_n) con soportes que respetan el orden por tipo.

Un aspecto técnico importante es que el dominio de las n -tuplas ordenados de estrategias no es convexo, lo cual impide aplicar directamente teoremas estándar de punto fijo como los de Kakutani o Glicksberg. Para superar este problema, se representa la estrategia de cada político como un triple ordenado (x_j, z_j, r_j) , donde x_j representa la política más baja, z_j la política más alta, y r_j la probabilidad de elegir x_j (con $1 - r_j$ de elegir z_j). Se especifica un perfil de estrategias como una $3n$ -tupla ordenada $((x_1, z_1, r_1), \dots, (x_n, z_n, r_n))$ cumpliendo $z_j \leq x_{j+1}$ para todo $j < n$, junto con el corte del votante y .

Este enfoque recupera la convexidad del dominio, aunque a costa de perder la convexidad de los conjuntos de mejores respuestas. Sin embargo, como estos conjuntos son contractibles (pueden deformarse continuamente a un solo punto), se puede aplicar

el Teorema de Punto Fijo de Eilenberg–Montgomery (Eilenberg and Montgomery, 1946)¹ para deducir la existencia de un punto fijo de la correspondencia de mejores respuestas, lo cual garantiza la existencia del equilibrio electoral.

Finalmente, se concluye que, conforme el beneficio de oficina crece, los políticos se vuelven cada vez más incentivados a elegir políticas altas. El corte del votante y^* diverge a infinito, las políticas óptimas de todos los tipos tienden a sus ideales o se vuelven arbitrariamente grandes, y la probabilidad de reelección al *apostararlo todo* converge a uno. Además, se identifica el caso donde el político de tipo 1 mezcla entre *tomarlo con calma* y *apostararlo todo*, con la probabilidad de elegir la política baja tendiendo a cero conforme $\beta \rightarrow \infty$.

Supuesto G.0.10. Para todo tipo j , se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} w'_j(x) = -\infty$.

Esta condición implica que el costo marginal del esfuerzo crece sin límite conforme aumenta el esfuerzo. Se satisface en casos como la utilidad cuadrática y la utilidad exponencial.

Se define el conjunto $G = \{j : \mathbb{E}[u(y)|\hat{x}_j] > V^C\}$ como el conjunto de tipos "por encima del promedio", es decir, aquellos para los cuales la utilidad esperada de aplicar su política ideal supera la utilidad esperada de un retador. Sea $\ell = \min G$ el menor tipo por encima del promedio, cumpliéndose que $\ell \geq 2$.

Bajo la interpretación de la política como un bien público y suponiendo que las preferencias del votante son monótonas, el análisis implica que cuando los políticos están altamente motivados por el cargo (gran β), el bienestar esperado ex ante del votante en el primer periodo se encuentra acotado inferiormente por:

$$\sum_{j \notin G} p_j \mathbb{E}[u(y)|\hat{x}_j] + \sum_{j \in G} p_j \bar{u},$$

donde $\bar{u} = \lim_{y \rightarrow \infty} u(y)$.

¹Sea X un conjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo. Sea $F : X \rightarrow 2^X$ una correspondencia superiormente semicontinua con valores no vacíos, cerrados y acotados, tal que $F(x)$ es contractible (o tiene el tipo de homotopía de un punto) para todo $x \in X$. Entonces, F tiene un punto fijo; es decir, existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in F(x^*)$. Véase Border (1985). Otro artículo que hace uso de este teorema, en el contexto de juegos bayesianos y la existencia de estrategias monótonas, es Reny (2011).

Si la función de utilidad es no acotada superiormente y $p_n > 0$, el bienestar esperado del votante aumenta sin límite conforme crece β . Sin embargo, si la utilidad es unimodal y no acotada inferiormente, puede ocurrir que el bienestar esperado disminuya sin límite.

Teorema G.0.11. Supónganse las suposiciones hechas hasta ahora. Sea β arbitrariamente grande. Entonces, para toda selección de equilibrios electorales σ :

- (i) El punto de corte del votante diverge: $y^* \rightarrow \infty$.
- (ii) Para cada tipo j suficientemente alto, se cumple que $x_{*j} = x_j^* \rightarrow \hat{x}_j$, o $x_{*j} = x_j^* \rightarrow \infty$, o bien $x_{*j} \rightarrow \hat{x}_j$ y $x_j^* \rightarrow \infty$.
- (iii) Para el tipo $\ell - 1$, se tiene que $x_{\ell-1}^* \rightarrow \infty$ y $\max\{\text{supp}(\pi_{\ell-1}^*)\} \rightarrow \infty$.
- (iv) Para todo $j \geq \ell$, se cumple que $x_{*j} = x_j^* \rightarrow \infty$.

Este teorema implica que existe un tipo marginal $m \leq \ell - 1$ tal que los tipos mayores a m escogen políticas que divergen, mientras que los tipos menores a m convergen a sus políticas ideales. Para los tipos $j < m$, se cumple que $x_j^* \rightarrow \hat{x}_j$ y la probabilidad de reelección tiende a cero.

Corolario G.0.12. Bajo los supuestos del teorema G.0.11, para beneficios de cargo β suficientemente grandes y para cualquier equilibrio electoral σ , existe un tipo marginal $m \leq \ell - 1$ tal que:

- (i) Para todo $j < m$, $x_j^* = x_{*j} \rightarrow \hat{x}_j$ y $1 - F(y^* - x_j^*) \rightarrow 0$.
- (ii) Para todo $j > m$, $x_j^* = x_{*j} \rightarrow \infty$.
- (iii) Para $j = m$, se tiene $x_m \rightarrow \infty$ y, si $x_m^* \neq x_{*m}$, entonces $x_{*m} \rightarrow \hat{x}_m$.

El teorema G.0.11 no identifica explícitamente cuál es el tipo marginal ni precisa la probabilidad de reelección de los incumbentes. Para precisar más la caracterización del comportamiento de equilibrio, se introduce una condición adicional:

Supuesto G.0.13. Para todo j , w_j es cóncava y $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{ARA}_j(x) = 0$.

Este supuesto se satisface, por ejemplo, en el caso cuadrático y en funciones de utilidad tipo potencia.

Teorema G.0.14. Bajo las suposiciones hechas hasta ahora, y β arbitrariamente grande, para toda selección de equilibrios electorales σ :

- (i) $x_{*1} \rightarrow \hat{x}_1$.
- (ii) Si $x_j^* \rightarrow \infty$, entonces $x_j^* - y^* \rightarrow \infty$ y $1 - F(y^* - x_j^*) \rightarrow 1$.

Finalmente, se agrega una condición adicional sobre la relación de las tasas marginales de desutilidad:

Supuesto G.0.15. Para todo $j < n$, se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w'_{j+1}(x)}{w'_j(x)} = 1$.

Bajo esta condición adicional, se identifica al tipo marginal como el tipo 1, obteniéndose el siguiente resultado:

Teorema G.0.16. Bajo los supuestos hechos hasta ahora, y β arbitrariamente grande, para toda selección de equilibrios electorales σ :

- (i) Se tiene que $x_{*1} \rightarrow \hat{x}_1$, $x_1 \rightarrow \infty$ y $\pi_1(x_1^*) \rightarrow 1$.
- (ii) Para todo $j = 1, \dots, n$, $1 - F(y^* - x_j^*) \rightarrow 1$.
- (iii) La diferencia entre las mayores políticas de los tipos se cierra: $x_n^* - x_1^* \rightarrow 0$.
- (iv) Se cumple que $0 < \pi_1(x_1^*) < 1$.

Como consecuencia de este último teorema, se concluye que, conforme β se vuelve grande, todos los tipos adoptan políticas altas y son reelegidos con probabilidad próxima a uno. Así, el efecto de los incentivos electorales pasa de ser una herramienta de selección a una herramienta de sanción: en el límite, todos los políticos eligen aproximadamente la misma política alta en el primer periodo y son reelegidos casi con certeza.

El artículo concluye señalando que el modelo de accountability electoral desarrollado no solo proporciona una estructura sólida para entender la interacción entre incentivos

de reelección y comportamiento político en un entorno de información limitada, sino que también abre nuevas vías de investigación. Se ilustra cómo el modelo puede aplicarse a temas como populismo, ciclos políticos, dictaduras severas y revueltas endógenas, aprendizaje simétrico y la incorporación de incertidumbre electoral. Finalmente, los autores subrayan que el marco analítico presentado resulta particularmente adecuado para el estudio de fenómenos actuales como el exceso de señales electorales, el impacto de la atención racional limitada, los sesgos cognitivos en la evaluación política y los cambios en el entorno informativo, destacando el potencial del enfoque de accountability para futuras aplicaciones en contextos caracterizados por información dispersa, señales mediante decisiones de política y limitada capacidad de compromiso.

Prof.: César Marcelo Gallardo
Notes by Marcelo

Bibliografía

- Ahn, D. S., Choi, S., Gale, D., and Kariv, S. (2014). Estimating ambiguity aversion in a portfolio choice experiment. *Quantitative Economics*, 5(2):195–223.
- Aliprantis, C. D. and Border, K. C. (2006). *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer, 3rd edition.
- Arrow, K. J. (1951). *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press.
- Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22(3):265–290.
- Bagnoli, M. and Bergstrom, T. (2005). Log-concave probability and its applications. *Economic Theory*, 26(2):445–469.
- Baron, D. P. and Myerson, R. B. (1982). Regulating a monopolist with unknown costs. *Econometrica*, 50(4):911–930.
- Bergara, M. (2023). Notas de clase del curso de teoría de contratos (basadas en *Lectures in Contract Theory* de tadelis y segal). Notas no publicadas. Pontificia Universidad Católica del Perú, curso de posgrado en economía.
- Bergemann, D., Heumann, B., and Morris, S. (2019). An ascending auction with multidimensional signals. *Journal of Economic Theory*.
- Bergemann, D. and Morris, S. (2023). Cost based nonlinear pricing.
- Bergemann, D. and Morris, S. (2024). Screening with persuasion. *Journal of Political Economy*.

- Bergemann, D., Morris, S., and Wang, M. (2024). A unified approach to second and third degree price discrimination.
- Bertrand, J. (1883). Théorie des richesses: revue de théories mathématiques de la richesse sociale par léon walras et recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par augustin cournot. *Journal des Savants*, pages 499–508.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition.
- Binmore, K. (2007). *Playing for Real: A Text on Game Theory*. Oxford University Press, Oxford.
- Border, K. C. (1985). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Border, K. C. (2021). Lecture 15: Order statistics; conditional expectation. <https://healy.econ.ohio-state.edu/kcb/Ma103/Notes/Lecture15.pdf>. Ma 3/103: Introduction to Probability and Statistics, Winter 2021, California Institute of Technology.
- Bossaerts, P., Ghirardato, P., Guarnaschelli, S., and Zame, W. R. (2010). Ambiguity in asset markets: Theory and experiment. *Review of Financial Studies*, 23(4):1325–1359.
- Börgers, T. (2015). *An Introduction to the Theory of Mechanism Design*. Oxford University Press.
- Chambers, C. P. and Echenique, F. (2025). Decision theory and the “almost implies near” phenomenon. *arXiv preprint arXiv:2502.07126*.
- Chenault, L. A. (1986). On the uniqueness of nash equilibria. *Economics Letters*, 20(3):203–205.
- Clarke, E. H. (1971). Multipart pricing of public goods. *Public Choice*, 11(1):17–33.
- Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Hachette, Paris.

- Dasgupta, P. and Maskin, E. (1986a). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, i: Theory. *The Review of Economic Studies*, 53(1):1–26.
- Dasgupta, P. and Maskin, E. (1986b). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, ii: Applications. *The Review of Economic Studies*, 53(1):27–41.
- de Azevedo Botelho, G. M., Pellegrino, D. M., and Teixeira, E. V. (2023). *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 3 edition.
- Debreu, G. (1952). A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(10):886–893.
- Dolgoplov, A. and Martinelli, C. (2021). Learning and acyclicity in the market game. *Working paper*.
- Echenique, F. (2002). Comparative statics by adaptive dynamics and the correspondence principle. *Journal of Economic Theory*, 106(2):315–333.
- Echenique, F. (2003). An algorithmic approach to the study of equilibria in games. *Games and Economic Behavior*, 42(2):238–256.
- Echenique, F. (2015). Lecture notes: General equilibrium theory (ss205). Lecture notes, California Institute of Technology.
- Echenique, F. (2024). Minimax. Lecture notes, UC Berkeley.
- Echenique, F. and Saito, K. (2015). Savage in the market. *Econometrica*, 83(4):1467–1495.
- Edgeworth, F. Y. (1897). *Monopoly and Competition*. London School of Economics. Reimpresso em *Papers Relating to Political Economy*, vol. 1.
- Eilenberg, S. and Montgomery, D. (1946). Fixed point theorems for multi-valued transformations. *American Journal of Mathematics*, 68(2):214–222.
- Epstein, L. G. (2000). A definition of uncertainty aversion. *Review of Economic Studies*, 67(3):579–608.

- Fischer, S. (1980). Dynamic inconsistency, cooperation and the benevolent dissembling government. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2:93–107.
- Fishburn, P. C. (1989). Retrospective on the utility theory of von neumann and morgenstern. *Journal of Risk and Uncertainty*, 2(2):127–158.
- Fishburn, P. C. and Rubinstein, A. (1982). Time preference. *International Economic Review*, 23(3):677–694.
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.
- Fudenberg, D. and Levine, D. K. (1986). Limit games and limit equilibria. *Journal of Economic Theory*, 38(2):261–279.
- Fudenberg, D. and Levine, D. K. (1989). Reputation and equilibrium selection in games with a patient player. *Econometrica*, 57(4):759–778.
- Fudenberg, D. and Levine, D. K. (1997). Measuring players' reputations and the value of cheap talk. *The Quarterly Journal of Economics*, 112(1):35–68.
- Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991). *Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Gall, J.-F. L. (2022). *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes*, volume 295 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer.
- Gilboa, I. (2009). *Theory of Decision under Uncertainty*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1989). Maxmin expected utility with a non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18(2):141–153.
- Glicksberg, I. L. (1952). A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(1):170–174.
- Green, J. R. and Laffont, J.-J. (1977). Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods. *Econometrica*, 45(2):427–438.

- Groves, T. (1973). Incentives in teams. *Econometrica*, 41(4):617–631.
- Harris, M. and Townsend, R. M. (1981). Resource allocation under asymmetric information. *Econometrica*, 49(1):33–64.
- Harsanyi, J. C. (1966). Games with incomplete information played by “bayesian” players, part i. *Management Science*.
- Harsanyi, J. C. (1967). Games with incomplete information played by “bayesian” players, part ii. *Management Science*.
- Harsanyi, J. C. (1985). Formulation of bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory*, 14:1–29.
- Henrich, J. (2000). Does culture matter in economic behavior? ultimatum game bargaining among the machiguenga of the peruvian amazon. *American Economic Review*, 90(4):973–979.
- Herfindahl, O. C. (1950). *Concentration in the Steel Industry*. PhD thesis, Columbia University.
- Herstein, I. N. and Milnor, J. (1953). An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica*, 21(2):291–297.
- Hey, J. D. and Pace, N. (2014). The explanatory and predictive power of non two-stage-probability theories of decision making under ambiguity. *Journal of Risk and Uncertainty*, 49(1):1–29.
- Hirschman, A. O. (1945). *National Power and the Structure of Foreign Trade*. University of California Press.
- Holmstrom, B. (1979). Groves schemes on restricted domains. *Econometrica*, 47(5):1137–1144.
- Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *The Economic Journal*, 39(153):41–57.
- Houthakker, H. S. (1950). Revealed preference and the utility function. *Economica*, 17(66):159–174.

- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2):263–291.
- Kakutani, S. (1941). A generalization of brouwer’s fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8(3):457–459.
- Kalai, E. and Smorodinsky, M. (1975). Other solutions to nash’s bargaining problem. *Econometrica*, 43(3):513–518.
- Keynes, J. M. (1921). *A Treatise on Probability*. Macmillan, London.
- Kocherlakota, N. R. (1996). Implications of efficient risk sharing without commitment. *Review of Economic Studies*, 63(4):595–609.
- Kreps, D. M. and Scheinkman, J. A. (1983). Quantity precommitment and bertrand competition yield cournot outcomes. *The Bell Journal of Economics*, 14(2):326–337.
- Kreps, D. M. and Wilson, R. (1982a). Reputation and imperfect information. *Journal of Economic Theory*, 27(2):253–279.
- Kreps, D. M. and Wilson, R. (1982b). Sequential equilibria. *Econometrica*, 50(4):863–894.
- Krishna, V. (2009). *Auction Theory*. Academic Press.
- Laffont, J.-J. and Tirole, J. (1993). *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Lemke, C. E. and Howson, J. T. (1964). Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 12(2):413–423.
- Levitan, R. and Shubik, M. (1972). Price duopoly and capacity constraints. *International Economic Review*, 13(1):111–122.
- Ligon, E., Thomas, J. P., and Worrall, T. (2002). Informal insurance arrangements with limited commitment: Theory and evidence from village economies. *Review of Economic Studies*, 69(1):209–244.
- Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 2nd edition.

- Mailath, G. J. and Samuelson, L. (2006). *Repeated Games and Reputations: Long-run Relationships*. Oxford University Press, New York.
- Marschak, J. (1950). Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. *Econometrica*, 18(2):111–141.
- Martinelli, C. (2006). Would rational voters acquire costly information? *Journal of Economic Theory*, 129:225–251.
- Martinelli, C. and Duggan, J. (2020). Electoral accountability and responsive democracy. *The Economic Journal*, 130(629):675–715.
- Martinelli, C. and Herrera, H. (2006). Group formation and voter participation. *Theoretical Economics*, 1:461–487.
- Martinelli, C., Herrera, H., and Levine, D. K. (2008). Policy platforms, campaign spending and voter participation. *Journal of Public Economics*, 92:501–513.
- Martinelli, C., Levine, D. K., and Stoelinga, N. (2024). Vote or fight. Working Paper.
- Martinelli, C. and Matsui, A. (2002). Policy reversals and electoral competition with privately informed parties. *Journal of Public Economic Theory*, 4(1):39–61.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- Maskin, E. (1999). Nash equilibrium and welfare optimality. *The Review of Economic Studies*, 66(1):23–38.
- McAfee, R. P. and McMillan, J. (1987). Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature*, 25(2):699–738.
- McKelvey, R. D. and Palfrey, T. R. (1995). Quantal response equilibria for normal form games. *Games and Economic Behavior*, 10(1):6–38.
- McKenzie, L. W. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. *Econometrica*, 27(1):54–71.

- Mertens, J.-F. (1986). The minimax theorem for upper semicontinuous-lower semicontinuous payoff functions. *International Journal of Game Theory*, 15(4):237–250.
- Milgrom, P. (2004). *Putting Auction Theory to Work*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Milgrom, P. and Roberts, J. (1982). Limit pricing and entry under incomplete information: An equilibrium analysis. *Econometrica*, 50(2):443–459.
- Milgrom, P. and Segal, I. (2002). Envelope theorems for arbitrary choice sets. *Econometrica*, 70(2):583–601.
- Milgrom, P. R. and Weber, R. J. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50(5):1089–1122.
- Milgrom, P. R. and Wilson, R. (1982). Auction theory. *Journal of Economic Literature*, 17(2):1–32.
- Milnor, J. (1953). Axioms for measurable utility. *Unpublished manuscript*.
- Mirrlees, J. A. (1971). An exploration in the theory of optimum income taxation. *Review of Economic Studies*, 38(2):175–208.
- Modigliani, F. and Miller, M. H. (1958). The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *The American Economic Review*, 48(3):261–297.
- Myerson, R. B. (1978). Refinements of the nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, 7(2):73–80.
- Myerson, R. B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73.
- Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295.
- Nash, J. (1953). Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21(1):128–140.

- Nash, J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica*, 18(2):155–162.
- Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., and Vazirani, V. (2007). *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press.
- Osborne, M. J. (2003). *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, New York.
- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. MIT Press.
- Pata, V. (2019). *Fixed Point Theorems and Applications*. Springer.
- Reny, P. J. (1999). On the existence of pure and mixed strategy nash equilibria in discontinuous games. *Econometrica*, 67(5):1029–1056.
- Reny, P. J. (2011). On the existence of monotone pure-strategy equilibria in bayesian games. *Econometrica*, 79(2):499–553.
- Rosenthal, R. W. (1981). Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox. *Journal of Economic Theory*, 25(1):92–100.
- Ross, S. A. (1977). The determination of financial structure: The incentive-signalling approach. *The Bell Journal of Economics*, 8(1):23–40.
- Roth, A. E. (1977). Individual rationality and nash’s solution to the bargaining problem. *Mathematics of Operations Research*, 2(1):64–65.
- Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis*. Pearson, Boston, 4th edition. Chapter 6, Theorems 10 and Corollary 17.
- Rubin, H. (1953). An axiom system for measurable utility. *Unpublished manuscript*.
- Rubinstein, A. (1982). Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, 50(1):97–109.
- Samuelson, P. A. (1938). A note on the pure theory of consumer’s behaviour. *Economica*, 5(17):61–71.
- Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*. John Wiley & Sons, New York.

- Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4(1):25–55.
- Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. In *Contributions to the Theory of Games*, volume 2, pages 307–317.
- Shapley, L. S. (1955). Markets as cooperative games. *RAND Research Memorandum*.
- Shapley, L. S. and Shubik, M. (1962). The assignment game i: The core. *International Journal of Game Theory*, 1(1):111–130.
- Simon, L. (1987). Games with discontinuous payoffs. *The Review of Economic Studies*, 54(4):569–597.
- Simon, L. K. (1984). Bertrand, the cournot paradigm and the theory of perfect competition. *Review of Economic Studies*, 51(2):209–230.
- Spence, M. (1973). Job market signaling. *Quarterly Journal of Economics*, 87(3):355–374.
- Tadelis, S. and Segal, I. (2005). Lectures in contract theory. Preliminary and Incomplete. Lecture notes for Econ 282/291 (Stanford) and Econ 206 (UC Berkeley).
- Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16(1):8–37.
- von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior. *Princeton University Press*, pages 26–29, 617–628.
- Walker, M. and Wooders, J. (2001). Minimax play at wimbledon. *American Economic Review*, 91(5):1521–1538.
- Wilson, R. (1969). Competitive bidding with disparate information. *Management Science*, 15(7):446–448.

- Wilson, R. (1971). Computing equilibria of n-person games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(1):80–87.
- Wilson, R. (1979). Auctions of shares. *The Quarterly Journal of Economics*, 93(4):675–689.
- Wu, G. and Gonzalez, R. (1996). Curvature of the probability weighting function. *Management Science*, 42(12):1676–1690.
- Zamir, S., Solan, E., and Maschler, M. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press.

Draft
Prof.: César Martinelli
Notes by Marcelo Gallardo