Capítulo 10

Relaciones de preferencia y equilibrio general

En este capítulo presentamos una introducción a las teorías del consumidor y del equilibrio general, disciplinas fundamentales de la microeconomía. Para la teoría del consumidor, comenzamos definiendo primero el concepto de «relación de preferencia» y luego el de «función de utilidad», que es una idea asociada a la noción de preferencias. Para la teoría del equilibrio general, explicamos lo que es un «óptimo de Pareto» y el concepto vinculado conocido como «equilibrio walrasiano».

Nuestro propósito es mostrar algunas aplicaciones adicionales de la optimización en la teoría económica. El lector podrá apreciar que algunos conceptos matemáticos como el de conjunto abierto, conjunto cerrado, o ideas como la convergencia o convexidad juegan un rol importante en la obtención de resultados fundamentales de la teoría microeconómica.

10.1. Relación de preferencia

Sea X un conjunto de opciones o alternativas de un individuo. En el contexto de la teoría microeconómica, se suele tomar $X = \mathbb{R}^n_+$, y se le llama «conjunto de consumo». Cada vector $\mathbf{x} \in X$ se interpreta como una canasta de consumo, y cada componente $x_i, i = 1, \ldots, n$, de $\mathbf{x}$ representa la cantidad consumida de la i-ésima mercancía. Al individuo que toma decisiones sobre las distintas canastas de X se le llama «consumidor».

Para describir el comportamiento del consumidor como un individuo racional que toma decisiones, se introduce una relación binaria sobre X, conocida como relación de preferencia, y, a menos que se diga lo contrario, siempre tomaremos $X = \mathbb{R}^n_+$.

Definición 10.1.1. Una relación de preferencia sobre X es una relación binaria sobre dicho conjunto y se le denota por $\succeq$. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, la expresión $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ se lee «$\mathbf{x}$ es al menos tan bueno como $\mathbf{y}$» o «$\mathbf{x}$ es preferible a $\mathbf{y}$».

Por ejemplo, si X es un conjunto de frutas, un individuo podría establecer sus preferencias sobre X de acuerdo con su percepción sobre la acidez de las frutas. En este caso, si x denota naranjas e y, fresas; la relación $x \succeq y$ establece que «las naranjas son al menos tan ácidas como la fresas».

En la teoría, suele asumirse que las preferencias de los consumidores tienen las propiedades de «completitud» y «transitividad», esto es, que frente a dos canastas cualesquiera el consumidor siempre es capaz de tomar una decisión (completitud); y que si una canasta es preferible a otra y ésta es preferible a una tercera, entonces la primera es preferible a la tercera (transitividad). Una relación de preferencia que posee estas características se llama «racional». Aún cuando suena razonable suponer que las preferencias de los consumidores deban ser racionales, en el mundo real no siempre es así, es decir, no siempre el individuo es capaz de decidir por una alternativa frente a otra. Esto es más factible en situaciones límite; por ejemplo, imagínese el lector a una madre teniendo que decidir, en medio de un naufragio, a cuál de sus dos hijos entrega el único flotador disponible. Incluso, puede ser que las decisiones no tengan la consistencia de la transitividad (véase, más delante, el ejemplo 10.1.1).[1] Sin embargo, la racionalidad es una hipótesis que permite el desarrollo de la teoría, en la medida que facilita el uso de diversas herramientas matemáticas para el análisis de la toma de decisiones. Así pues, siempre asumiremos que las preferencias son racionales.

Definición 10.1.2. Se dice que la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es:

a) «Completa» si se cumple lo siguiente:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X :\ \mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \ \vee\ \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}.$$

b) «Transitiva» si se cumple lo siguiente:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X :\ \mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \ \wedge\ \mathbf{y} \succeq \mathbf{z} \ \Rightarrow\ \mathbf{x} \succeq \mathbf{z}.$$

[1] Algunas situaciones interesantes sobre estas cuestiones se pueden encontrar, por ejemplo, en Microeconomic Theory (1995) Mas-Colell, Whinston and Green, capítulo 1 o bien en el artículo «Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk» de Daniel Kahneman y Amos Tversky publicado en *Econometrica*.

La relación $\succeq$ induce otras dos importantes relaciones binarias sobre X: la «relación de preferencia estricta», denotada por $\succ$; y la «relación de indiferencia», denotada por $\sim$. La expresión $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ se lee «$\mathbf{x}$ es preferido a $\mathbf{y}$» o «$\mathbf{x}$ es mejor que $\mathbf{y}$» y se define por

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \ \wedge \ \mathbf{y} \not\succeq \mathbf{x}.$$

Por otro lado, la expresión $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ se lee «$\mathbf{x}$ es indiferente a $\mathbf{y}$» y se define por

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \ \wedge \ \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}.$$

Con cada canasta de consumo $\mathbf{x} \in X$ se pueden asociar cinco diferentes conjuntos de interés que describimos a continuación.

a) El «contorno superior» de $\mathbf{x}$, definido como el conjunto de canastas que son al menos tan buenas como $\mathbf{x}$. Denotamos este conjunto por $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$, y se define por

$$\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}.$$

b) El «contorno estrictamente superior» de $\mathbf{x}$, definido como el conjunto de canastas que son preferidas a $\mathbf{x}$. Denotamos este conjunto por $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$, y se define por

$$\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}.$$

c) El «contorno inferior» de $\mathbf{x}$, definido como el conjunto de canastas, tales que $\mathbf{x}$ es al menos tan buena como ellas. Denotamos este conjunto por $\mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})$, y se define por

$$\mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}.$$

d) El «contorno estrictamente inferior» de $\mathbf{x}$, definido como el conjuntos de canastas, tales que $\mathbf{x}$ es preferida a ellas. Denotamos este conjunto por $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$, y se define por

$$\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}.$$

e) El «conjunto de indiferencia» de $\mathbf{x}$, definido como el conjuntos de canastas que son indiferentes a $\mathbf{x}$. Denotamos este conjunto por $\mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})$, y se define por

$$\mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}.$$

En el ejercicio 10.1.3, se le pide al lector que pruebe que si $\succeq$ es una relación de preferencia completa sobre X, entonces, para cada $\mathbf{x} \in X$, los conjuntos $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$, $\mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$, en el caso de ser no vacíos, constituyen una partición de X; esto es, dado $\mathbf{y} \in X$, solo se cumple una y solo una de las tres posibilidades: $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ o $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$).

Ejemplos

Ejemplo 10.1.1. (Relación de preferencia no transitiva). El siguiente ejemplo, que muestra una relación de preferencias no transitiva, aparece en el artículo de R. D. Luce «Semiorders and a theory of utility discrimination» publicado en 1956 en *Econometrica.*

Imaginemos un individuo que gusta mucho del café y prefiere una taza de café con solo una cucharada de azúcar, en lugar de cinco cucharadas (muy dulce). Preparemos para este individuo 401 tazas de café con $(1 + i/100)x$ gramos de azúcar, $i = 0, 1, \ldots, 400$, donde x es el peso en gramos de una cucharada de azúcar. Así, la primera taza, $i = 0$, contiene x gramos de azúcar (una cucharada), y la última, $i = 400$, contiene $5x$ gramos de azúcar (5 cucharadas). Es claro que esta persona no notará la diferencia entre la taza i y la taza $i{+}1$ para cada i; esto es $i \sim i{+}1$. Así pues, por un lado tenemos $0 \sim 1 \sim ... \sim 400$, lo que, asumiendo la hipótesis de transitividad, implica que $0 \sim 400$. Sin embargo, como se estableció inicialmente, sabemos que $0 \succ 400$, lo que está en contradicción con lo anterior. Así pues, la hipótesis de transitividad induce una contradicción, por lo que esta relación de preferencias no puede ser transitiva.

Ejemplo 10.1.2. (Relación de preferencia incompleta). Sea $X = \mathbb{R}^2$ y consideremos que la relación $\succeq$ viene definida por

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 > y_1 \;\wedge\; x_2 > y_2.$$

Esta relación de preferencia es incompleta, pues, por ejemplo, para los pares $(12, 4)$ y $(10, 6)$ no se cumple que $(12, 4) \succeq (10, 6)$ o que $(10, 6) \succeq (12, 4)$.

Ejemplo 10.1.3. Sea $X = \mathbb{R}^2$ y definamos $\succeq$ por

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2.$$

Para el punto $P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ determinemos los conjuntos $\mathcal{C}_{\succeq}(P)$, $\mathcal{C}_{\sim}(P)$ y $\mathcal{C}_{\preceq}(P)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\succeq}(P) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 3\},\\
\mathcal{C}_{\sim}(P) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3\},\\
\mathcal{C}_{\preceq}(P) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 3\}.
\end{aligned}$$

El contorno superior $\mathcal{C}_{\succeq}(P)$ es el semi espacio superior $\mathcal{H}_{\geq}((1,1);3)$, el conjunto de indiferencia $\mathcal{C}_{\sim}(P)$ es la recta de pendiente $m=-1$ que corta al eje vertical en el punto $b=3$, y el contorno inferior $\mathcal{C}_{\preceq}(P)$ es el semi espacio inferior $\mathcal{H}_{\leq}((1,1);3)$.

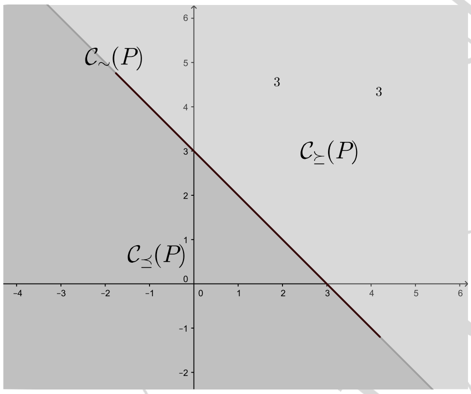

Figura 10.1.1 Partición de $\mathbb{R}^2$

◊◊◊

Además de la completitud y transitividad, las preferencias del consumidor pueden satisfacer otras propiedades. Por ejemplo, dada una mercancía, es razonable suponer que el consumidor siempre querrá más, en lugar de menos de dicha mercancía. Esta propiedad se conoce como propiedad de monotonía («más es mejor»).[2] Formalmente:

[2] Si el conjunto de consumo está formado solo por mercancías que son bienes de consumo, la propiedad de monotonía es perfectamente legítima, pero no todos las mercancías consumidas por un individuo son «bienes de consumo». Por ejemplo, la polución o las drogas son mercancías que no son bienes de consumo. Naturalmente en este caso, la propiedad de monotonía no se satisface.

Definición 10.1.3. Se dice que la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es monótona si para todo $\mathbf{x} \in X$ se cumple que:

$$\mathbf{y} > \mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} \succ \mathbf{x}.$$

Ahora, si se cumple que:

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \;\Rightarrow\; \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$$

se dice que la relación es fuertemente monótona.

Mientras la monotonía exige que cada componente de $\mathbf{y}$ sea mayor que la correspondiente componente de $\mathbf{x}$ para que $\mathbf{y}$ sea preferida a $\mathbf{x}$, la monotonía fuerte exige menos pudiendo ser iguales algunas de sus componentes correspondientes y no todas mayores.

Dada una canasta de consumo $\mathbf{x}$, es posible que el consumidor sea capaz de hacer algunos ajustes en dicha canasta de suerte que obtenga otra mejor. Si sus preferencias son monótonas, podría, por ejemplo, aumentar el consumo de todas las mercancías. Eventualmente también podría mantener el consumo de algunas mercancías y disminuir el de otras o, incluso, disminuir el consumo de todas que componen la canasta.[3] Si las preferencias del consumidor satisfacen esta propiedad para toda canasta $\mathbf{x}$, se dice que el consumidor es insaciable, en el sentido de que ninguna canasta actual lo deja satisfecho, pues siempre podrá hacer los ajustes correspondientes para conseguir una mejor canasta. Enseguida definimos formalmente esta propiedad.

[3] Si todas las mercancías que componen la canasta son, por así decirlo, «males de consumos» en lugar de bienes de consumo, entonces lo mejor para el bienestar del individuo será no consumir tales mercancías.

Definición 10.1.4. Se dice que la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es «localmente insaciable» si se cumple que:

$$\forall\, \mathbf{x} \in X, \forall\, r > 0, \exists\, \mathbf{y} \in X \cap \mathcal{B}(\mathbf{x}; r):\ \mathbf{y} \succ \mathbf{x}.$$

La propiedad de insaciabilidad local impide que los conjuntos de indiferencia sean «gruesos». La figura 10.1.2-(a) corresponde a una relación de preferencia que no satisface la propiedad de insaciabilidad local; pues si la satisficiera la bola $\mathcal{B}(\mathbf{x}; r)$ contendría una canasta $\mathbf{y}$ que es preferida a $\mathbf{x}$, pero esto es imposible, pues la bola solo contiene canastas indiferentes a $\mathbf{x}$. Por otro lado, es claro que el conjunto de indiferencia de la figura 10.1.2-(b) sí corresponde a una relación de preferencia que satisface la propiedad de insaciabilidad local.

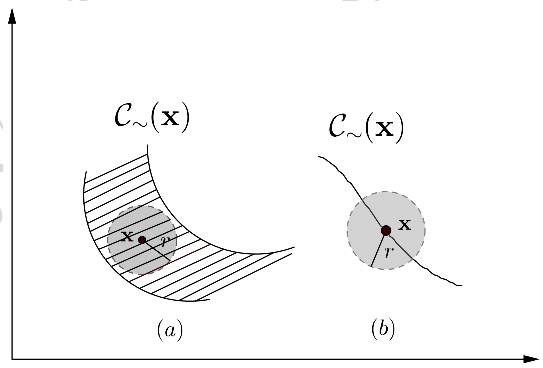

Figura 10.1.2 Insaciabilidad local

Es claro que la propiedad de monotonía implica la insaciabilidad local. Si una relación de preferencia $\succeq$ sobre $X = \mathbb{R}^2_+$ es monótona, entonces para toda canasta $\mathbf{x} \in X$, los puntos que se encuentran en el nor-este de $\mathbf{x}$ constituyen canastas preferidas y, a su vez, $\mathbf{x}$ es preferida a todas las canastas que se encuentran en el sur-oeste de $\mathbf{x}$. Esto induce en el conjunto de consumo $\mathbb{R}^2_+$ dos zonas o cuadrantes claramente diferenciadas: el cuadrante II, contenido en el contorno estrictamente superior de $\mathbf{x}$ (II $\subset \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$); y el cuadrante IV, contenido en el contorno estrictamente inferior de $\mathbf{x}$ ($IV \subset \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$). La figura 10.1.3 muestra estos contornos así como el conjunto de indiferencia, con una canasta $\mathbf{y}$ indiferente a $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$:

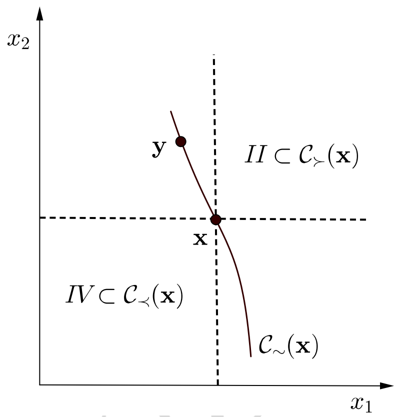

Figura 10.1.3 Zonas de consumo

Si dos canastas de consumo son al menos tan buenas como una tercera, ¿por qué no habría de serlo una combinación de estas? Si una relación de preferencia posee esta propiedad, se dirá que es convexa. Formalmente:

Definición 10.1.5. Se dice que la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es convexa si para cualquier $\mathbf{x} \in X$, su contorno superior es un conjunto convexo; esto es, $\forall\, \mathbf{x} \in X\ \forall\, \lambda \in\ [0,1]$ se cumple:

$$\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\ \wedge\ \mathbf{z} \succeq \mathbf{x}\ \Rightarrow\ \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}.$$

La relación de preferencia $\succeq$ es estrictamente convexa si para cualquier $\mathbf{x} \in X$, su contorno superior es un conjunto estrictamente convexo; esto es, $\forall\, \mathbf{x} \in X\ \forall\, \lambda \in\ ]0,1[$ se cumple:

$$\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\ \wedge\ \mathbf{z} \succeq \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{z},\ \Rightarrow\ \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \succ \mathbf{x}.$$

La figura 10.1.4 muestra dos contornos superiores. Mientras que el contorno superior de la figura 10.1.4-(a) es estrictamente convexo, el de la figura 10.1.4-(b) es convexo. La convexidad de una preferencia modeliza la tendencia por la diversificación que suelen tener los consumidores; si dos canastas son mejores que una tercera, en vez de consumir solo una de las primeras dos, se prefiere consumir un poco de cada una de ellas.

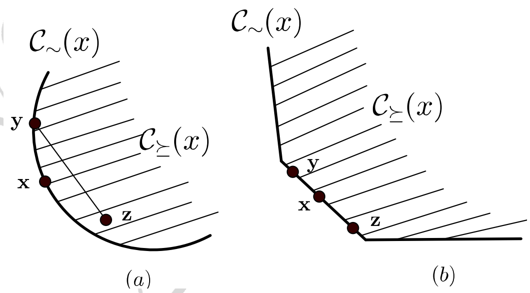

Figura 10.1.4 Preferencias convexas

Ejemplo

Ejemplo 10.1.4. Retomemos la relación de preferencias del ejemplo 10.1.3 y veamos que es convexa. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} =$

(y_1, y_2) y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ tales que $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ y $\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$. Luego:

$$y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2.$$
$$z_1 + z_2 \geq x_1 + x_2.$$

Tomemos $\lambda \in [0, 1]$ y consideremos:

$$\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} = (\lambda y_1 + (1 - \lambda)z_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda)z_2).$$

Así, puesto que:

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda)z_1 + \lambda y_2 + (1 - \lambda)z_2 &= \lambda(y_1 + y_2) + (1 - \lambda)(z_1 + z_2) \\ &\geq \lambda(x_1 + x_2) + (1 - \lambda)(x_1 + x_2) \\ &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

concluimos que $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$; o sea, $\succeq$ es convexa, por definición.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

LISTA DE EJERCICIOS

Ejercicio 10.1.1. Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre X. Pruebe que si $\succeq$ es racional, entonces se cumple lo siguiente (teorema 1:B.1 [Mas-Colell et al.]):

a) $\succ$ es irreflexiva y transitiva.

b) $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.

c) Si $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$, entonces $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Ejercicio 10.1.2. Sea $\succeq$ una relación de preferencia completa sobre X. Pruebe que para todo $\mathbf{x} \in X$ se cumple lo siguiente:

a) $\mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})$.

b) $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x}) \uplus \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$.

Ejercicio 10.1.3. Sea $\succeq$ una relación de preferencia completa sobre X. Pruebe que, para cada $\mathbf{x} \in X$, los conjuntos $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$, $\mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$ constituyen una partición de X:

Sugerencia. Por ejemplo, veamos que los contornos estrictos $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$ son disjuntos.

Si existe $\mathbf{y} \in X$, tal que $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$, entonces debe cumplirse que:

$$(\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{x} \not\succeq \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y} \not\succeq \mathbf{x}),$$

lo que evidentemente es una contradicción. Por consiguiente, $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}) = \emptyset$. Proceda similarmente para probar que las otras intersecciones son vacías.

Ejercicio 10.1.4. En cuanto a la relación de preferencia $\succeq$, pruebe que la monotonía fuerte implica la monotonía y que ésta, a su vez, implica la insaciabilidad local.

Ejercicio 10.1.5. Explique por qué la propiedad de monotonía impide que no consumir ninguna mercancía sea una situación deseable.

Ejercicio 10.1.6. Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre X, pruebe que si la relación es localmente insaciable, entonces no puede ocurrir que la canasta de consumo $\mathbf{x}$ esté compuesta solo por «males de consumo».

Ejercicio 10.1.7. Dada la relación de preferencia $\succeq$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ definida por

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; e^{x_1+x_2} \geq e^{y_1+y_2} \;,$$

responda las siguientes cuestiones:

a) De acuerdo con $\succeq$, ¿qué relación existe entre $A = (2, 1)$ y $B = (1, 3)$?

b) Determine el conjunto de indiferencia de $P = (1, 0)$.

c) Determine el contorno superior de P.

d) ¿Es convexa la relación de preferencia?

e) ¿Es monótona la relación de preferencia?

Ejercicio 10.1.8. Dada la relación de preferencia $\succeq$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ definida por

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 + 2x_2 \geq 3y_1 + y_2 \;.$$

responda las siguientes cuestiones:

a) De acuerdo con $\succeq$, ¿qué relación existe entre $A = (2, 5)$ y $B = (3, 2)$?

b) Determine el conjunto de indiferencia de $P = (2, 1)$.

c) Determine el contorno superior de P.

d) ¿Es convexa la relación de preferencia?

e) ¿Es localmente insaciable la relación de preferencia?

10.2. Función de utilidad

Con el objetivo de poder «cuantificar» las preferencias del consumidor y poder usar las herramientas clásicas del cálculo, se introduce el concepto de función de utilidad. Naturalmente, primero existen las preferencias que los individuos tienen frente a un conjunto de opciones. Una función de utilidad, asociada con dichas preferencias, es una construcción casi artificial, que permite describir numéricamente las preferencias y, de esta manera, aplicar el cálculo para abordar ciertos problemas del consumidor.

Definición 10.2.1. Dada la relación de preferencia $\succeq$ sobre X, se dice que la función $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa o está asociada con la relación de preferencia $\succeq$ si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ se cumple que:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}). \tag{10.2.1}$$

Observe que la función u que verifica la condición (10.2.1) no es única, sino que cualquier función f estrictamente creciente compuesta con u genera otra función v que verifica la misma condición, por lo que también representa a la relación de preferencias $\succeq$. En efecto, digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente y sea $v : X \to \mathbb{R}$ definida por $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$. Entonces:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \;\Leftrightarrow\; f(u(\mathbf{x})) \geq f(u(\mathbf{y})).^4 \tag{10.2.2}$$

No es la cardinalidad lo importante de una función de utilidad, sino la relación de orden que se establece entre las distintas opciones. Si $\mathbf{x}$ es mejor que $\mathbf{y}$, entonces $u(\mathbf{x})$ debe ser mayor que $u(\mathbf{y})$ sin importar cuáles son los valores específicos de $u(\mathbf{x})$ y $u(\mathbf{y})$. De hecho,

[4] A partir del ejercicio 10.2.1, el lector podrá entender la razón por la que la función f debe ser estrictamente creciente, y no simplemente creciente.

la representación de una relación de preferencia por medio de una función de utilidad es única salvo una transformación estrictamente creciente (véase el ejercicio 10.2.3).

Ejemplo

Ejemplo 10.2.1. En microeconomía, a veces se utiliza la función de tipo Cobb-Douglas como función de utilidad. Esta función, que ya ha sido introducida en capítulos anteriores, tiene la siguiente forma general:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, ..., x_n) = A\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right).$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$, A es una constante positiva y para todo $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i \in [0, 1]$. Si definimos la relación de preferencia $\succeq$ sobre $\mathbb{R}^n_{++}$ por

$$(x_1, \ldots, x_n) \succeq (y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i},$$

es claro que la función $u(\cdot)$ satisface la condición (10.2.1), por lo que es una función de utilidad asociada a $\succeq$.

Eventualmente, por motivos de cálculo, es mejor trabajar con una función más amigable, por ejemplo, de tipo lineal. Esto se logra tomando una transformación logarítmica de $u(\cdot)$:[5]

$$v(\mathbf{x}) = v(x_1, ..., x_n) = \underbrace{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i}_{v(\mathbf{x})=f(u(\mathbf{x}))=\ln(u(\mathbf{x}))}.$$

[5] Para simplificar, tomamos $A = 1$.

Como la función ln(·) estrictamente creciente, las equivalencias establecidas en (10.2.2) garantizan que $v(\cdot)$ también es una función de utilidad que representa a la misma relación de preferencia que representa la función $u(\cdot)$ (note el lector que esta función fue utilizada en el ejemplo 8.3.3, donde presentamos la función de utilidad de Stone-Geary).[6]

Es pertinente aquí establecer algunas observaciones respecto de la función Cobb-Douglas como una función que mide la utilidad del consumidor. En principio, la forma de la función deja claro que para que el consumidor obtenga cierta utilidad necesariamente debe consumir todos los bienes. Es claro que la utilidad es monótona respecto de cada uno de los bienes, lo que técnicamente se expresa diciendo que la utilidad marginal de cada bien es positiva. En efecto, el lector puede verificar que para cada i se obtiene $(\partial u/\partial x_i)(\mathbf{x}) > 0$. No podría haber sido de otra forma, pues la relación de preferencia que la función Cobb-Douglas representa es monótona.

◊◊◊

Por las razones ya mencionadas, las funciones de utilidad juegan un rol fundamental en el desarrollo de la teoría. En este sentido, es pertinente preguntarse si es siempre posible asociar una función de utilidad con una relación de preferencia. La respuesta es negativa. En la literatura existe un contraejemplo clásico de una relación de preferencia que no posee asociada una función de utilidad. Esta relación es conocida como «Relación de preferencia

[6] Como fue visto en capítulos anteriores, la función de tipo Cobb-Douglas también fue utilizada para representar una función de producción.

lexicográfica» (véase el ejercicio 10.2.12), y recibe su nombre porque se establece siguiendo el orden en que son colocadas las palabras en un diccionario.

Ahora bien, si una relación de preferencia tiene asociada una función de utilidad u que la representa, entonces la preferencia debe ser necesariamente racional. En efecto, la completitud y la transitividad se derivan de inmediato del hecho de que u es una función real valuada y de que en $\mathbb{R}$ la relación de orden $\geq$ es tanto completa como transitiva. Establecemos este hecho como un resultado formal, los detalles de la prueba se dejan como ejercicio.

Teorema 10.2.1. Si la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es representable por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, entonces $\succeq$ es racional.

La preferencia lexicográfica es racional; sin embargo, como se mencionó antes, no existe una función de utilidad que la represente. Así pues, por sí sola la racionalidad de una relación de preferencia no garantiza la existencia de una función de utilidad asociada. Además de la racionalidad, ¿qué otra propiedad debe añadirse a la relación de preferencia para garantizar la existencia de una función de utilidad que la represente? Debe añadirse, además, la «propiedad de continuidad», que básicamente consiste en que las preferencias se preservan bajo la toma de límites. Formalmente:

Definición 10.2.2. Se dice que la relación de preferencia $\succeq$ sobre X es continua si para cualquier sucesión $\{(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) \in X \times X\}$, tal que $\mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}$, se tiene $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$.

El siguiente esquema captura la idea de la continuidad de una relación de preferencia $\succeq$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_m & \succeq & \mathbf{y}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{x} & \succeq & \mathbf{y} \end{array}$$

Básicamente la continuidad impide «saltos» en la decisiones del consumidor: después de una secuencia larga de decisiones prefiriendo $\mathbf{x}_m$ en lugar de $\mathbf{y}_m$, de pronto en el limite de las decisiones se revierte la preferencia. Si la relación de preferencia es continua, estos saltos no pueden ocurrir.

Ejemplos

Ejemplo 10.2.2. (Preferencias de Leontief). Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. La relación de preferencia de Leontief viene dada por

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; \text{mín}\{x_1, x_2\} \geq \text{mín}\{y_1, y_2\}.$$

Veamos que esta relación de preferencias es continua.

Sean $\{\mathbf{x}_m = (x_{1m}, x_{2m})\}$ y $\{\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m})\}$ dos sucesiones en X, tales que $\text{lím}_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$ y $\text{lím}_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20})$. Si $\mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m \Rightarrow\; & \text{mín}\{x_{1m}, x_{2m}\} \geq \text{mín}\{y_{1m}, y_{2m}\} \\ & \Rightarrow\; x_{1m} \geq \text{mín}\{y_{1m}, y_{2m}\} \;\wedge\; x_{2m} \geq \text{mín}\{y_{1m}, y_{2m}\}. \end{aligned}$$

De aquí, tomando límite cuando $m \to \infty$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & x_{10} \geq \text{mín}\{y_{10}, y_{20}\} \;\wedge\; x_{20} \geq \text{mín}\{y_{10}, y_{20}\} \\ & \Rightarrow \text{mín}\{x_{10}, x_{20}\} \geq \text{mín}\{y_{10}, y_{20}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}_0 \succeq \mathbf{y}_0$.

Ejemplo 10.2.3. Consideremos $\mathbb{R}^2_+$ una versión simple de la preferencia Cobb-Douglas definida en el ejemplo 10.2.1:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 x_2 \geq y_1 y_2.$$

La continuidad de esta relación de preferencia se prueba similarmente a como se hizo en el ejemplo anterior. Sean $\{\mathbf{x}_m = (x_{1m}, x_{2m})\}$ e $\{\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m})\}$ dos sucesiones en X, tales que $\mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20})$. Por la definición de $\succeq$, tenemos:

$$x_{1m} x_{2m} \geq y_{1m} y_{2m}.$$

De aquí, tomando limites cuando $m \to \infty$ se obtiene:

$$x_{10} x_{20} \geq y_{10} y_{20},$$

lo que implica que $\mathbf{x}_0 \succeq \mathbf{y}_0$. Luego, $\succeq$ es continua.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

La continuidad de una relación de preferencia se puede establecer en términos de los contornos inferior y superior de la preferencia, como se prueba en el teorema 10.2.2. Este resultado constituye una caracterización topológica de la continuidad.

Teorema 10.2.2. Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre X. La relación $\succeq$ es continua si y solo si para todo $\mathbf{x} \in X$, sus contornos superior e inferior, $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})$, son cerrados.

Demostración. Supongamos que $\succeq$ es continua. Sea $\mathbf{x} \in X$ fijo y tomemos una sucesión $\{\mathbf{y}_m\}$, tal que $\mathbf{y}_m \in \mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0$. Como $\mathbf{y}_m \succeq \mathbf{x}$ para todo m, por la continuidad de $\succeq$, se tiene $\mathbf{y}_0 \succeq \mathbf{x}$; es decir, $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$. Esto implica, por el Teorema 4.3.4, que $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$ es cerrado. Un argumento similar se aplica para el contorno inferior.

Ahora, supongamos que para todo $\mathbf{x} \in X$ tanto el contorno superior $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$ como el contorno inferior $\mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})$ son conjuntos cerrados. Tomemos las sucesiones $\{\mathbf{x}_m\}$ e $\{\mathbf{y}_m\}$, tales que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0$ y $\mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Contrariamente a lo que queremos probar, supongamos que $\mathbf{y}_0 \succ \mathbf{x}_0$; es decir, $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}_0)$. Como $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}_0)$ es abierto, existe $r > 0$, tal que $\mathcal{B}(\mathbf{y}_0; r) \subset \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{x}_0)$. Así, por la convergencia $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0$, podemos afirmar que $\mathbf{y}_m \succ \mathbf{x}_0$, cuando $m \to \infty$. Esto significa que para cada $m \to \infty$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{y}_m)$. Luego, como $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{y}_m)$ es abierto, para cada $m \to \infty$, existe $r_m > 0$, tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0; r_m) \subset \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{y}_m)$. Así, para $m \to \infty$, podemos tomar $\mathbf{x}_m \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0; r_m)$, tal que $\mathbf{x}_m \prec \mathbf{y}_m$, pero esto contradice la hipótesis inicial de que $\mathbf{x}_m \succeq \mathbf{y}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $\mathbf{x}_0 \succeq \mathbf{y}_0$. □

Ejemplo

Ejemplo 10.2.4. Considere en $X = \mathbb{R}^2_+$ la relación de preferencia $\succeq$ dada por

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \Leftrightarrow \lfloor x_1 \rfloor \cdot \lfloor x_2 \rfloor \geq \lfloor y_1 \rfloor \cdot \lfloor y_2 \rfloor. \tag{10.2.3}$$

La relación de preferencias definida por (10.2.3) indica que el consumidor no valora una cantidad fraccional de un bien y que su felicidad depende de consumir simultáneamente ambos bienes y no cada uno independientemente.

Probemos que $\succeq$ no es continua. Para esto, basta con mostrar que, para cierto $\mathbf{x} \in X$, $\mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$ o $\mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})$ no son conjuntos cerrados. En concreto, probaremos que $\mathcal{C}_{\preceq}(1,1) = \{\mathbf{x} \in X : \ (1,1) \succeq \mathbf{x}\}$ no es cerrado.

La sucesión $\left\{\mathbf{y}_m = \left(2 - \frac{1}{m}, 2 - \frac{1}{m}\right)\right\}$ de elementos de X es tal que $\mathbf{y}_m \sim (1,1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$\left\lfloor 2 - \frac{1}{m} \right\rfloor \cdot \left\lfloor 2 - \frac{1}{m} \right\rfloor = 1 = \lfloor 1 \rfloor \cdot \lfloor 1 \rfloor, \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

De este modo, $\mathbf{y}_m \in \mathcal{C}_{\preceq}(1,1)$. Por otro lado, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m = \mathbf{y} = (2,2)$. Puesto que $\lfloor 2 \rfloor \cdot \lfloor 2 \rfloor = 4 > 1$, entonces $\mathbf{y} \notin \mathcal{C}_{\preceq}(1,1)$. Así, hemos exhibido una sucesión en $\mathcal{C}_{\preceq}(1,1)$ que converge a un elemento que no está en $\mathcal{C}_{\preceq}(1,1)$, por lo que, de acuerdo con el teorema 4.3.4, $\mathcal{C}_{\preceq}(1,1)$ no es un conjunto cerrado.

◊◊◊

Una consecuencia interesante del teorema 10.2.2 es que entre dos canastas cualesquiera, tales que una de ellas es preferida a la otra, siempre existe una tercera canasta entre ellas. El resultado utiliza la propiedad de «conexidad» de $\mathbb{R}^n_+$, veamos:

Corolario 10.2.1. Sea $\succeq$ una relación de preferencia continua sobre X. Para todo par de canastas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in X$, tales que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, existe $\mathbf{z} \in X$, tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que no existe $\mathbf{z} \in X$, tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Esto es equivalente a

$$\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{y}) = \emptyset \tag{10.2.4}$$

De aquí, para cualquier $\mathbf{w} \in X$, se tiene:

$$\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x}) \cup \mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{y}).$$

Si $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\succeq}(\mathbf{x})$, entonces $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{y})$; si $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{y})$, entonces $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$ (véase ejercicio 10.1.1). Así:

$$X = \mathbb{R}^n_+ = \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}) \cup \mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{y}) \tag{10.2.5}$$

Debido a (10.2.4), los contornos $\mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{C}_{\succ}(\mathbf{y})$ son disjuntos, y, dado que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, son no vacíos. Además, puesto que $\succeq$ es continua, son abiertos, de donde la igualdad expresada en (10.2.5) es imposible.[7] □

Para lo que sigue, es importante que el lector tenga presente la definición de conjunto contable no finito y de subconjunto denso. Recordemos rápidamente estos conceptos.

Definición 10.2.3. Decimos que un conjunto Y es contable no finito si existe una biyección $f : Y \to \mathbb{N}$.

Por ejemplo, puede probarse que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q}^n$ son conjuntos contables y, ciertamente, no finitos. Note que si Y es contable no finito, podemos escribir el conjunto Y como una sucesión o enumeración de puntos: $Y = \{\mathbf{y}_m\}$.

[7] Note que $\mathbb{R}^n_+$ no se puede escribir como la unión disjunta de dos abiertos de $\mathbb{R}^n$, lo que en la literatura se conoce como propiedad de conexidad.

Definición 10.2.4. Sea X un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $Y \subset \mathbb{R}^n$ es denso en X si para todo $\mathbf{x} \in X$ y para todo $r > 0$ existe $\mathbf{y} \in Y$ tal que $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}; r) \cap X$.

Un conocido resultado del análisis establece que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Más aún, $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}^n_+$ es denso en $\mathbb{R}^n_+$.

Bajo determinadas condiciones, que se establecen en el lema 10.2.1, es suficiente la racionalidad de una relación de preferencias para asegurar la existencia de una función den utilidad asociada.

Lema 10.2.1. Sea $Y \subset X = \mathbb{R}^n_+$ un conjunto contable no finito. Entonces, toda relación de preferencia racional sobre Y puede ser representada por una función de utilidad $u(\cdot)$ con rango en $]-1, 1[$.

Demostración. Sea $\succeq$ una relación de preferencia racional sobre Y y sea $\{\mathbf{y}_m\}$ una enumeración de Y. El argumento de la prueba consiste en construir $u(\cdot)$ por inducción.[8]

Primero, definimos $u(\mathbf{y}_1) = 0$. Luego, si $\mathbf{y}_2 \sim \mathbf{y}_1$, definimos $u(\mathbf{y}_2) = u(\mathbf{y}_1) = 0$. En caso $\mathbf{y}_2 \succ \mathbf{y}_1$, definimos $u(\mathbf{y}_2) \in]0, 1[$, y, en caso $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2$, definimos $u(\mathbf{y}_2) \in]-1, 0[$. De esta forma, para $k, \ell \in \{1, 2\}$ se obtiene:

$$\mathbf{y}_k \succeq \mathbf{y}_\ell \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_k) \geq u(\mathbf{y}_\ell),\ u(\mathbf{y}_k), u(\mathbf{y}_\ell) \in]-1, 1[. \tag{10.2.6}$$

Sea ahora $m \in \mathbb{N}$, m fijo, y supongamos que se cumple (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m-1\}$. El objetivo es definir $u(\mathbf{y}_m)$ de modo que

[8] Seguimos fundamentalmente las Lecture Notes in Microeconomic Theory de Ariel Rubinstein (Rubinstein, 2006).

se satisfaga (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m\}$. Tenemos dos casos posibles, el primero es cuando $\mathbf{y}_m \sim \mathbf{y}_k$ para algún $k = 1, ..., m-1$. En este caso, definiendo $u(\mathbf{y}_m) = u(\mathbf{y}_k)$, vemos que, por la hipótesis de inducción, se verifica (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m\}$. El segundo caso es cuando $\mathbf{y}_m \nsim \mathbf{y}_k$ para todo $k = 1, ..., m-1$. En este caso, consideremos los conjuntos (no vacíos):

$$A_m = \{u(\mathbf{y}_k) : \mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k\} \cup \{-1\}.$$
$$B_m = \{u(\mathbf{y}_k) : \mathbf{y}_k \succ \mathbf{y}_m\} \cup \{1\}.$$

y tomemos $u(\mathbf{y}_m) \in I_m =]\max A_m, \min B_m[$. Si $\mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k$ para algún $k \in \{1, ..., m-1\}$, entonces $u(\mathbf{y}_k) \in A_m$. Por consiguiente:

$$\mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_k) \in A_m \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_m) > \max A_m \geq u(\mathbf{y}_k),$$

es decir, se cumple (10.2.6). Si, por el contrario, $\mathbf{y}_k \succ \mathbf{y}_m$, se prueba que (10.2.6) también se cumple similarmente. Por inducción, el resultado vale para cualquier $m \in \mathbb{N}$. $\square$

El teorema 10.2.3 que se da a continuación generaliza el lema 10.2.1 en el sentido de que el conjunto sobre el cual está definida la relación de preferencia ya no tiene que ser contable no finito. El lector interesado en el teorema original puede consultar el artículo de G. Debreu «Representation of a preference ordering by a numerical function» publicado en la revista «Decision Processes», en 1954. Aquí presentamos una versión de tal resultado.[9]

[9] El teorema 10.2.3 es válido para cualquier conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo que posee un subconjunto denso y contable.

Teorema 10.2.3. Sea $\succeq$ una relación de preferencia racional y continua sobre X. Entonces, existe una función de utilidad continua $u : X \to \mathbb{R}$ que la representa.

Demostración. Por brevedad, solo probamos la existencia y dejamos la prueba de la continuidad como ejercicio guiado para el lector (véase el ejercicio 10.2.15).

Sea $Y = \mathbb{Q}^n_+ \subset X$. Por el lema 10.2.1, existe $v : Y \to]-1, 1[$, función de utilidad que representa a $\succeq$ sobre Y. Luego, para cualquier $\mathbf{x} \in X$ definamos:

$$u(\mathbf{x}) = \sup \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\}}_{=A_{\mathbf{x}}} \tag{10.2.7}$$

o $u(\mathbf{x}) = -1$ en caso $A_{\mathbf{x}} = \emptyset$. Con base en la definición 10.2.7, vamos a establecer que para todo $\mathbf{z} \in X$ se cumple que:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{z} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z}).$$

Si $\mathbf{z} \sim \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Por lo tanto:

$$\{v(\mathbf{y}) :\ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} = \{v(\mathbf{y}) :\ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{z})\}.$$

De acuerdo con (10.2.7), tendremos entonces que $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{z})$ (se está tomando el supremo sobre el mismo conjunto).

Si $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$, sabemos del corolario 10.2.1 que existe $\mathbf{w} \in X$ tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$. Por la continuidad de la relación de preferencias existe $r > 0$ tal que $\forall\ \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r)$, $\mathbf{x} \succ \tilde{\mathbf{w}} \succ \mathbf{z}$ (véase el ejercicio 10.2.10). Como Y es denso en X, existe $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r) \cap Y$ de forma que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}_1 \succ \mathbf{z}$. De nuevo, por el corolario 10.2.1, existe $\mathbf{y}_2 \in Y$ tal que $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \succ \mathbf{z}$. Así pues, a partir de:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \succ \mathbf{z},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \sup\{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} \\
&\geq v(\mathbf{y}_1) \\
&> v(\mathbf{y}_2) \\
&\geq \sup\{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} \\
&= u(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\mathbf{y}_1 \in \{\mathbf{y} \in Y, \ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ para la primera desigualdad; que $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \Leftrightarrow v(\mathbf{y}_1) > v(\mathbf{y}_2)$ (véase ejercicio 10.2.1), para la desigualdad estricta; y que $\mathbf{y}_2 \notin \{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y, \ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}\}$, para la última desigualdad. De este modo, $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{z})$. Con esto, hemos probado que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z} \implies u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$.

Finalmente, si $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$, entonces:

$$A_{\mathbf{z}} \subset A_{\mathbf{x}} \Leftrightarrow [\forall \ \mathbf{y} \in Y : \ \mathbf{y} \prec \mathbf{z} \implies \mathbf{y} \prec \mathbf{x}].$$

Así, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, lo que concluye la prueba. □

Como hemos visto, las diversas propiedades que se puedan imponer a las preferencias implican o inducen propiedades sobre las funciones de utilidad que las representan. Por ejemplo, si una relación de preferencias es monótona, entonces la función de utilidad que la representa es creciente, es decir, se cumple que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$.

Por razones de análisis, no solo es deseable que una función sea continua, sino más aún, que sea diferenciable. La función de utilidad asociada a una relación de preferencia podría ser continua, pero no diferenciable. Consideremos por ejemplo la preferencia de

Leontief definida en el ejemplo 10.2.2. Vimos que dicha relación de preferencias es continua. Sin embargo, se puede observar en la figura 10.2.1 (véase el ejemplo 10.2.5) que la función de utilidad que la representa no es diferenciable en los puntos del tipo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, donde $x_1 = x_2$. El análisis de la diferenciabilidad requiere de más herramientas matemáticas que el de la continuidad y no será abordado en este libro. El lector interesado puede revisar, por ejemplo, el libro de Mas-Colell «The theory of general economic equilibrium. A differentiable approach», publicado en Cambridge university Press (Mas-Colell, 1985).

Ejemplo

Ejemplo 10.2.5. Recordemos las preferencias de Leontief, definida en el ejemplo 10.2.2. Siendo ésta continua, por el teorema 10.2.3, existe una función de utilidad $u(\cdot)$ continua que la representa. Por ejemplo, la función:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \tag{10.2.8}$$

es continua y representa a la relación de preferencia sobre $\mathbb{R}^2_+$. Note que esta función de utilidad ilustra la noción de «complementaridad» en el consumo. Por ejemplo, si x_1 y x_2 denotan, respectivamente, la cantidad de zapatos izquierdos y derechos, la preferencia de Leontief es adecuada para representar la utilidad generada por el consumo de pares de zapatos. En este caso, la utilidad solo aumenta si ambos bienes se incrementan por igual, y permanece constante si solo uno de los bienes cambia. Así, tener 7 zapatos izquierdos y 7 derechos proporciona la misma utilidad que tener 7 zapatos izquierdos y 10 derechos. Note que las curvas de indiferencia de esta función están dadas por líneas rectas, como se muestra en la figura 10.2.1:

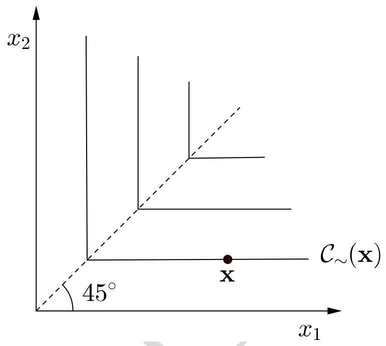

Figura 10.2.1 Curvas de indiferencia de Leontief

◊◊◊

El teorema 10.2.4 relaciona cuatro de las funciones de utilidad más usadas en la teoría microeconómica; esto es, las funciones de utilidad Lineal, Cobb-Douglas, Leontief y la CES (Constant Elasticity of Substitution).

Teorema 10.2.4. Considere la función de utilidad CES, definida sobre $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}]^{1/\rho}. \tag{10.2.9}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \rho \neq 0$. Entonces:

a) Cuando $\rho = 1$, u representa una función de utilidad de tipo lineal.

b) Cuando $\rho \to 0$, u representa una función de utilidad de tipo Cobb-Douglas.

c) Cuando $\rho \to -\infty$, u representa una función de utilidad de tipo Leontief.

Demostración. En el caso $\rho = 1$, la prueba es directa. Simplemente reemplazando, se obtiene que:

$$u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1]^{1/1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \tag{10.2.10}$$

Ahora bien, si $\rho \to 0$, el análisis es menos directo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} u(x_1, x_2) &= \lim_{\rho\to 0} [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \exp\left[\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}\right] \\
&= \lim_{\rho\to 0} \exp\left[\frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right].
\end{aligned}$$

Por la continuidad de la exponencial y por la Regla de L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} \exp\left[\frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right] &= \exp\left[\lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\rho\to 0} \frac{d}{d\rho} \ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)\right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, escribiendo:

$$x_1^\rho = e^{\ln x_1^\rho} = e^{\rho \ln x_1},$$

se sigue que:

$$\frac{d}{d\rho}(x_1^\rho) = e^{\rho \ln x_1} \ln x_1 = x_1^\rho \ln x_1.$$

Luego:

$$\frac{d}{d\rho}\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho) = \frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \ln x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho}.$$

De este modo, volviendo al límite, puesto que $\lim_{\rho\to 0} x_i^\rho = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} u(x_1,x_2) &= \exp\left[\lim_{\rho\to 0}\frac{d}{d\rho}\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \ln x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho}\right] \\
&= \exp\left[\frac{\alpha_1(1)\ln x_1 + \alpha_2(1)\ln x_2}{\alpha_1(1)+\alpha_2(1)}\right] \\
&= \exp\left[\frac{\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$\lim_{\rho\to 0} u(x_1,x_2) = \exp(\ln x_1^{\alpha_1} + \ln x_2^{\alpha_2}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

Concluyamos con el tercer caso, $\rho \to -\infty$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 < x_2$ (si $x_1 = x_2$, el resultado es inmediato). Entonces, nuestro objetivo es mostrar que:

$$\min\{x_1,x_2\} = x_1 = \lim_{\rho\to-\infty}[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho}.$$

Podemos reescribir el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{\rho\to\infty}[\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
[\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} &= \left[\frac{\alpha_1}{x_1^\rho} + \frac{\alpha_2}{x_2^\rho}\right]^{-1/\rho} \\
&= \left[\frac{1}{x_1^\rho}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 x_1^\rho}{x_2^\rho}\right)\right]^{-1/\rho} \\
&= x_1\left[\alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\rho\right]^{-1/\rho}.
\end{aligned}$$

Como $x_1 < x_2$, entonces, por la continuidad de la función potencia, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty} u(x_1,x_2) &= \lim_{\rho\to\infty} x_1 \left[\alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho}\right]^{-1/\rho}. \\
&= x_1(\alpha_1 + 0)^0 \\
&= x_1(1) \\
&= x_1 = \min\{x_1, x_2\}.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Ejemplo 10.2.6. En este ejemplo verificamos, vía simulaciones numéricas, el teorema 10.2.4. Para esto fijamos el valor de los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ y graficamos las curvas de indiferencia:

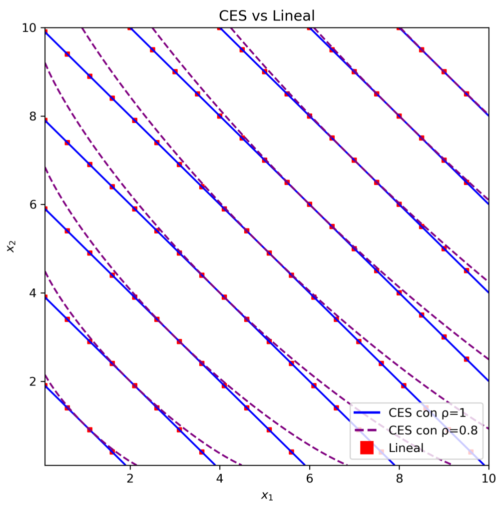

Figura 10.2.2 CES ($\rho = 0.8$ y $\rho = 1$) y lineal

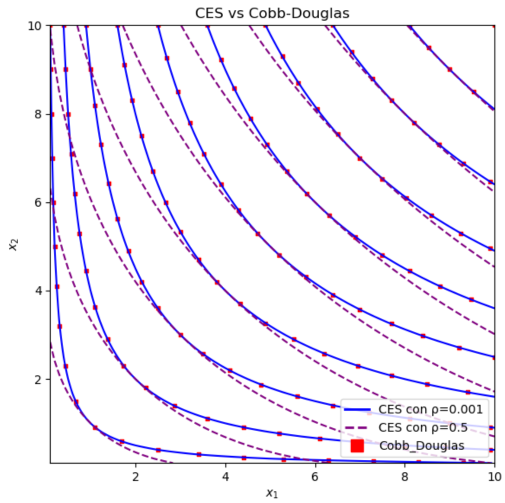

Figura 10.2.3 CES ($\rho = 0.001$ y $\rho = 0.5$) y Cobb-Douglas

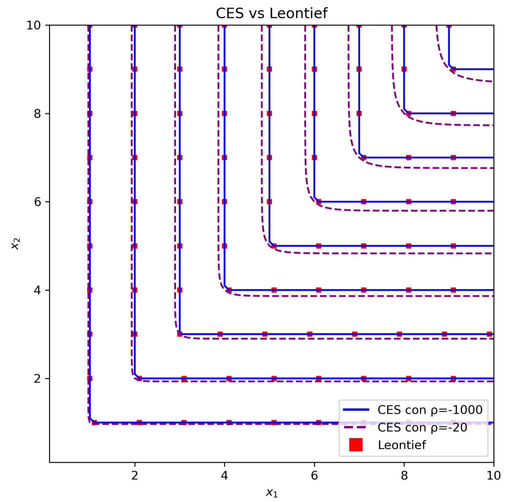

Figura 10.2.4 CES ($\rho = -20$ y $\rho = -1000$) y Leontief

a) Figura 10.2.2: En esta figura presentamos las curvas de indiferencia de la función de utilidad lineal CES para $\rho = 1$ (línea continua), $\rho = 0.8$ (línea discontinua) y las curvas de indiferencia de la función de utilidad lineal (cuadrados). Se evidencia que las curvas de indiferencia de la función CES corresponden idénticamente a las de la utilidad lineal cuando $\rho = 1$, y para $\rho = 0.8$, se asemejan bastante.

b) Figura 10.2.3: En esta figura presentamos las curvas de indiferencia de la función CES para $\rho = 0.001$ (línea continua), para $\rho = 0.5$ (líneas discontinuas) y las curvas de indiferencia de la función Cobb-Douglas (cuadrados). Observamos que las curvas de indiferencia para la CES cuando $\rho = 0.001$ son casi indistinguibles de las curvas de indiferencia de la Cobb-Douglas. Por otro lado, las asociadas al caso $\rho = 0.5$, si bien se aproximan bastante, no son «idénticas» gráficamente. Esta semejanza visual resalta cómo, para valores de ρ más cercanos a 0, las curvas de indiferencia de la función CES tienden a adoptar la forma de las curvas de indiferencia Cobb-Douglas.

c) Figura 10.2.4: En esta última figura, presentamos las curvas de indiferencia de la función CES $\rho = -1000$ (línea continua), para $\rho = -20$ (línea discontinua), y las de la función de utilidad Leontief (cuadrados). Se observa que, en ambos casos, las curvas de indiferencia de la CES se asemejan a las de la función Leontief, siendo claramente las asociadas a $\rho = -1000$ mucho más parecidas. Así pues, si ρ se hace más negativo, las curvas de indiferencia de la CES se aproximan más a las de la Leontief, en conformidad con el teorema 10.2.4

◊◊◊

En el ejercicio 10.2.17, el lector podrá verificar que el teorema 10.2.4 puede ser generalizado para el caso de n bienes. Inicialmente, las funciones de utilidad Lineal, Cobb-Douglas y Leontief que, como hemos visto, son casos especiales de la CES, fueron creadas para modelar procesos de producción. Es interesante notar que las funciones de producción comparten con las funciones de utilidad algunas características como la monontonía, por ejemplo.

Veamos algunas otras propiedades de la función CES, por ejemplo, la homogeneidad:

$$\begin{aligned} u(\lambda x_1, \lambda x_2) &= [\alpha_1(\lambda x_1)^\rho + \alpha_2(\lambda x_2)^\rho]^{1/\rho} \\ &= [\lambda^\rho(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)]^{1/\rho} \\ &= \lambda[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho} \\ &= \lambda u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Esencialmente la homogeneidad implica que si se multiplican cada uno de los bienes de consumo por cierto factor, se multiplica también la utilidad del consumidor, por el mismo factor.

Calculemos ahora la tasa marginal de sustitución $MRS_{1,2}$. Para esto, calculamos primero las utilidades marginales:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho \alpha_1 x_1^{\rho-1} : \tag{10.2.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho \alpha_2 x_2^{\rho-1}. \tag{10.2.12}$$

Luego, recordando la ecuación (8.1.14), de (10.2.11) y (10.2.12), se sigue:

$$MRS_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}. \tag{10.2.13}$$

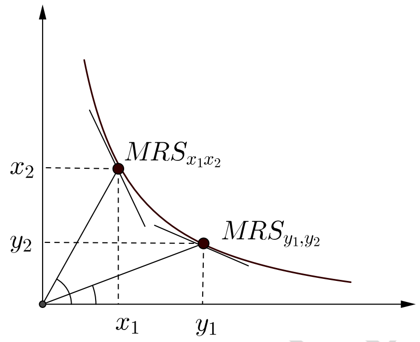

Figura 10.2.5 CES

Como se aprecia en la figura 10.2.5, y también en (10.2.13), la tasa marginal de sustitución depende del punto específico donde ésta se calcula a lo largo de la curva de indiferencia. Un traslado a lo largo de esta curva no solo induce un cambio en la proporción x_2/x_1, sino también en la tasa marginal de sustitución. La elasticidad de sustitución, denotada por σ, mide el cambio porcentual de la razón de cambio x_2/x_1 en relación a un cambio porcentual de la tasa marginal de sustitución, esto es:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{\dfrac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\dfrac{dMRS_{1,2}}{MRS_{1,2}}} = \frac{MRS_{1,2}}{(x_2/x_1)} \frac{d(x_2/x_1)}{dMRS_{1,2}}. \qquad (10.2.14)$$

De (10.2.13) derivando x_2/x_1 con respecto a $MRS_{1,2}$, obtenemos:

$$\frac{d(x_2/x_1)}{dMRS_{1,2}} = \frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\rho)\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}}.$$

Luego, reemplazando en (10.2.14):

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1, x_2) &= \frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\rho)\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}} \frac{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}}{(x_2/x_1)} \\
&= \frac{1}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Así pues, la elasticidad de sustitución es constante a lo largo de la curva de indiferencia, de donde la función de utilidad definida en (10.2.9) recibe su nombre.

Para culminar esta sección, presentamos una extensión del modelo del consumidor, ampliamente estudiada en teoría económica: el modelo de la utilidad esperada. Este modelo se usa para poder estudiar la elección bajo incertidumbre, es decir, la elección en un contexto donde los retornos son inciertos. Aquí, asumiendo que el lector está familiarizado con conceptos básicos de probabilidades,[10] presentamos una breve introducción del tema. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, Theory of Decision Under Uncertainty (Gilboa, 2009), para un análisis más profundo.

Considere un conjunto finito de estados de la naturaleza $S = \{1, \ldots, n\}$, y un conjunto de pagos monetarios $X_S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde cada pago x_s está asociado a un estado de la naturaleza s. Esto es, si ocurre el estado s, entonces el pago es x_s. La probabilidad de ocurrencia de cada estado $s \in S$ se denota como $p_s \in [0, 1]$. Luego, el vector de probabilidades $(p_1, \ldots, p_n)$ que satisface $\sum_{s=1}^{n} p_s = 1$ se denomina «lotería» y se denota por L.

[10] Una referencia clásica sobre estos temas es Probability and Measure (Billingsley, 1996).

Dada una función de utilidad sobre los pagos, $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conocida como función de utilidad tipo Bernoulli, se define la utilidad esperada de la lotería L:

$$U(L) = \sum_{s=1}^{n} p_s u(x_s).$$

Note que $U(L)$ corresponde justamente al valor esperado de la utilidad del agente bajo la distribución de probabilidades definida por L (la lotería).

De manera similar al modelo del consumidor, podemos introducir una relación de preferencia $\succeq$, esta vez definida sobre el espacio de las loterías:

$$\mathcal{L} = \left\{ L = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^S : \sum_{s=1}^{n} p_s = 1 \right\}.$$

Así, dadas $L, L' \in \mathcal{L}$, en analogía con (10.2.1), $L \succeq L' \Leftrightarrow U(L) \geq U(L')$.

Hasta ahora hemos asumido un número finito de estados. Sin embargo, puede que éstos sean infinitos e incluso no enumerables (por ejemplo: si cada estado corresponde a cada posible temperatura en grados Celsius). En dicho caso, los estados vienen representados por un continuo en $\mathbb{R}$ y las preferencias se definen sobre el espacio de las funciones de distribución para espacios continuos. En este caso, la utilidad esperada asociada a una distribución F se define como:

$$U(F) = \int u(x) dF(x). \tag{10.2.15}$$

Por ejemplo, si F es la distribución normal con media μ y varianza

σ^2, y $u(x) = -e^{-ax}$,

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-ax}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = -e^{\frac{a^2\sigma^2-2\mu a}{2}}.$$

De manera análoga al caso de las loterías, podemos definir una relación de preferencias sobre el espacio de distribuciones de forma que:

$$F \succeq G \Leftrightarrow \int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x).$$

Algunos conceptos fundamentales que surgen en esta teoría son, por ejemplo, la «aversión al riesgo», la «dominancia estocástica» y las «probabilidades subjetivas» (Gilboa, 2009).

El siguiente ejemplo permite ilustrar los conceptos introducidos como estados de la naturaleza, loterías y utilidad esperada.

Ejemplo

Ejemplo 10.2.7. (Elección bajo incertidumbre). Considere un agente con función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$, estrictamente cóncava, creciente y dos veces diferenciable, y con una riqueza inicial $w > 0$. Este agente elige una cobertura[11] $\alpha \geq 0$ ante un incendio que ocurre con probabilidad $\pi \in (0, 1)$ y genera una pérdida $D > 0$. El precio de una unidad de cobertura es $q = \pi$. Por lo tanto, tenemos dos estados de la naturaleza, s_1 =Incendio y s_2 =No incendio, con pagos x_s asociados $x_{s_1} = w + \alpha - \pi\alpha - D$ y $x_{s_2} = w - \pi\alpha$, y lotería asociada $L = (\pi, 1-\pi)$. Se sigue que la utilidad esperada del agente es:

$$\pi u\left(w - D + \alpha(1-\pi)\right) + (1-\pi)u\left(w - \alpha\,\pi\right). \tag{10.2.16}$$

[11] α es la cantidad que desea asegurar. Es decir, el monto que la aseguradora le paga al agente en caso de incidente.

El agente busca α que maximice la utilidad esperada dada en (10.2.16). Es decir, busca la cantidad óptima con la que debe asegurarse. Para encontrar tal α, es suficiente aplicar la condición de primer orden:

$$\pi(1-\pi)u'\left(w-D+\alpha(1-\pi)\right)-(1-\pi)\pi u'\left(w-\pi\alpha\right)=0. \quad (10.2.17)$$

La ecuación (10.2.17) implica que:

$$u'(w-D+\alpha(1-\pi))=u'(w-\pi\alpha). \quad (10.2.18)$$

Al ser $u''(\cdot)<0$, $u'(\cdot)$ es inyectiva. Por lo tanto, (10.2.18) implica a su vez que:

$$w-D+(1-\pi)\alpha=w-\pi\alpha.$$

O sea, $\alpha^*=D$. Esto significa que el agente se asegura completamente.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

La teoría de la elección bajo incertidumbre es bastante rica y extensa, y ha sido objeto de mucho estudio (véase por ejemplo el capítulo 6 de Microeconomic Theory (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995) o Notas en Teoría de la Incertidumbre (Gallardo, 2018)).

LISTA DE EJERCICIOS

Ejercicio 10.2.1. Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre X. Pruebe que si $u: X\to\mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a $\succeq$, entonces se cumple que:

a) $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y})$.

b) $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$.

Ejercicio 10.2.2. Si $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$ sobre X y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente, explique por qué la composición $f \circ u$ no es necesariamente una función de utilidad que represente a $\succeq$.

Ejercicio 10.2.3. Pruebe que si la funciones $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ representan a la misma relación de preferencia $\succeq$, entonces estas funciones están relacionadas mediante una transformación $f(\cdot)$ estrictamente creciente.

Sugerencia. Ya fue probado en (10.2.2) que si $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$, con f estrictamente creciente, entonces $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ representan a la misma relación de preferencia. Para probar el regreso, puede proceder por contradicción.

Ejercicio 10.2.4. Si $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_1x_2$ y $u(\cdot)$ representa a $\succeq$, determine si $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} = (2, 1)$ e $\mathbf{y} = (1, 2)$.

Ejercicio 10.2.5. Si para cierta relación de preferencia $\succeq$ se cumple que $(2, 0) \succeq (1, 1)$, diga si la función $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ representa a $\succeq$.

Ejercicio 10.2.6. La función $u(\cdot)$ representa a $\succeq$. Para cada uno de los siguientes casos, diga si $v(\cdot)$ representa también a $\succeq$:

a) $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + (u(\mathbf{x}))^3$.

b) $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - (u(\mathbf{x}))^2$.

c) $u(x) = \sqrt{u(\mathbf{x})} + 2$.

d) $u(x) = |u(\mathbf{x})|$.

Ejercicio 10.2.7. ¿Qué tipo de preferencia representa una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 + x_2}$.

Ejercicio 10.2.8. Pruebe el teorema 10.2.1.

Ejercicio 10.2.9. Considere sobre el conjunto $X = \mathbb{R}_+$ la relación de preferencia $\succeq$:

$$x \succeq y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor.$$

Demuestre que esta relación de preferencias no es continua.

Sugerencia. Al igual que en el ejemplo 10.2.4 use la definición por contornos superior e inferior.

Ejercicio 10.2.10. Sea $\succeq$ una relación de preferencias continua sobre X. Pruebe que si $\mathbf{x} \succ \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$, existe $r > 0$ tal que $\forall\ \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r)$, $\mathbf{x} \succ \tilde{\mathbf{w}} \succ \mathbf{z}$.

Sugerencia. Como la relación de preferencia es continua, recuerde que los contornos superior e inferior son cerrados, y, por lo tanto, sus complementos son abiertos. Así, existen bolas centradas en w totalmente contenidas en estos complementos.

Ejercicio 10.2.11. Sea X un conjunto finito y $\succeq$ racional definida sobre X. Demuestre que existe $u : X \to \mathbb{N}$ que representa a la relación de preferencia.

Sugerencia. Sea $X = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$. Defina $X_i = \{1 \leq j \leq n : \mathbf{x}_i \succeq \mathbf{x}_j\}$ y u tal que $u(\mathbf{x}_i) = |X_i|$ (la cardinalidad de X_i).

Ejercicio 10.2.12. La relación de preferencia lexicográfica se define de la siguiente manera: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X = \mathbb{R}^n_+$, entonces:

$$\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$$

si $x_1 > y_1$ o bien $x_1 = y_1$ y $x_2 > y_2$ o bien $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ y $x_3 > y_3$, y así sucesivamente hasta que $x_i = y_i$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n > y_n$. En caso $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \sim_L \mathbf{y}$. Demuestre que la relación de preferencia $\succeq_L$ es racional pero no es continua.

Sugerencia. Dados $\mathbf{x}_m = (1/m, 1, 1, ..., 0)$ e $\mathbf{y}_m = (0, 2, 1/m, ..., 0)$, note que $\mathbf{x}_m \succ \mathbf{y}_m$ para todo m. Finalmente, concluya estableciendo que $\lim_m \mathbf{x}_m \prec \lim_m \mathbf{y}_m$.

Ejercicio 10.2.13. Demuestre que una relación de preferencia es convexa si y solamente si $u(\cdot)$ es cuasicóncava.

Sugerencia. Recuerde el teorema 6.3.1.

Ejercicio 10.2.14. Recuerde el problema de la maximización de la utilidad trabajado en el capítulo 7, ejemplo 7.1.2 (el problema del consumidor). Explique por qué la monotonía de las preferencias implican que la restricción es $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = I$.

Ejercicio 10.2.15. Pruebe que la función de utilidad del teorema 10.2.3 es continua.

Sugerencia. Sea $\{\mathbf{x}_m\}$ una sucesión que converge a $\mathbf{x}$. Por la continuidad de $\succeq$, si $\mathbf{x}_m \succ \mathbf{y}$, entonces $\lim_m \mathbf{x}_m = \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Por otro lado, recuerde que de acuerdo con la ecuación (10.2.7):

$$u(\mathbf{x}_m) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}_m)\}}_{=A_{\mathbf{x}_m}}.$$

$$u(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\}}_{=A_{\mathbf{x}}}.$$

De este modo:

$$\lim_m u(\mathbf{x}_m) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})\}}_{=B_{\mathbf{x}}}.$$

Denotando $I_{\mathbf{x}} = \{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})\}$ y teniendo en cuenta que $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}$:

$$
\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{y}\in Y} B_{\mathbf{x}} &= \sup_{y\in \mathbf{y}} \{A_{\mathbf{x}} \cup I_{\mathbf{x}}\} \\
&= \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{y}\in Y} A_{\mathbf{x}}, \sup_{\mathbf{y}\in Y} I_{\mathbf{x}}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{y}\in Y} A_{\mathbf{x}}, a\right\} \\
&= u(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

donde:

$$
a = \begin{cases} v(\mathbf{y}_0), & \text{con } \mathbf{y}_0 \sim \mathbf{x}, \text{ en caso exista dicho } \mathbf{y}_0 \\ -1, & \text{si no existe } \mathbf{y}_0 \text{ tal que} \mathbf{y}_0 \sim \mathbf{x}. \end{cases}
$$

Note que para la tercera igualdad se ha usado que si $\mathbf{y}_1 \sim \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_2 \sim \mathbf{x}$, $v(\mathbf{y}_1) = v(\mathbf{y}_2)$, y para la cuarta que, dado $\mathbf{y}_0 \in Y$, podemos encontrar $\mathbf{y}_m \in Y$ tal que $\mathbf{y}_m \to \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_m \prec \mathbf{y}_0$ y $v(\mathbf{y}_m) \to v(\mathbf{y}_0)$[12]. Concluya así que $\text{lím}_m\, u(\mathbf{x}_m) = u(\mathbf{x})$.

Ejercicio 10.2.16. Demuestre que la función de utilidad tipo CES generalizada para n bienes:

$$
u(x_1, ..., x_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}\right]^{1/\rho}, \tag{10.2.19}
$$

con $\rho \neq 0$ y $\alpha_i > 0$, es cuasicóncava para $\rho \leq 1$.[13]

[12]Esta convergencia es consecuencia de la forma cómo se construyó $v(\cdot)$, ver lema 10.2.1.

[13]De hecho, es posible demostrar que una función cuasicóncava y homogénea de grado 1 es cóncava, por lo que la CES generalizada es cóncava para $\rho \leq 1$.

Ejercicio 10.2.17. Generalice el teorema 10.2.4 como sigue. Considere la función de utilidad CES para n bienes dada por (10.2.19), donde $\rho \neq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, y $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$, definida sobre $\mathbb{R}^n_{++}$. Demuestre que:

$$\lim_{\rho \to 1} u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

$$\lim_{\rho \to 0} u(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, ..., x_n) = \min\{x_1, ..., x_n\}.$$

Sugerencia. Siga la prueba del teorema 10.2.4.

Ejercicio 10.2.18. Considere el problema de maximización de la utilidad para $u(\mathbf{x}) = (x_1^\rho + x_2^\rho + \cdots + x_n^\rho)^{1/\rho}$, $\rho \in (-\infty, 1)$, $\rho \neq 0$, con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $I > 0$.

a) Demuestre que la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien es $x_i(\mathbf{p})^{CES} = \frac{p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}-1} I}{\sum_{j=1}^n p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$.

b) Pruebe que si $\rho \to 0$, $x_i(\mathbf{p})^{CES} \to x_i(\mathbf{p})^{CD}$, donde $x_i(\mathbf{p})^{CD} = \frac{I}{p_i n}$ es la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien asociada al problema de maximización de la utilidad cuando $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n$.

c) Pruebe que si $\rho \to -\infty$, $x_i(\mathbf{p})^{CES} \to x_i(\mathbf{p})^L = \frac{I}{\sum_{j=1}^n p_j}$, donde $x_i(\mathbf{p})^L$ es la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien asociada al problema de maximización de la utilidad cuando $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, ..., x_n\}$.

Ejercicio 10.2.19. Considere un agente cuya función de utilidad tipo Bernouilli $u(\cdot)$ es estrictamente creciente, y los siguientes pagos $X = \{0, 100, 400, 1000\}$. Demuestre que $L = (1/4, 1/4, 1/3, 1/6) \succeq L' = (0, 1/4, 11/24, 7/24)$.

Ejercicio 10.2.20. La aversión al riesgo es un concepto económico que refleja la preferencia por un pago seguro sobre un pago incierto. Concretamente, suponga que a un agente se le propone los siguientes esquemas de pago: «1000 soles son probabilidad 1/2 y 0 soles con probabilidad 1/2», «500 soles con probabilidad 1». Estos esquemas de pagos pueden representarse a través de loterías: si $X_S = \{0, 500, 1000\}$, entonces, el primer pago corresponde a $L = (1/2, 0, 1/2)$, mientras que el segundo a $L' = (0, 1, 0)$. Un agente será adverso al riesgo si prefiere L' a L. De manera más general, un agente es adverso al riesgo si:

$$u\left(\sum_{s=1}^{n} p_s x_s\right) \geq U(L) = \sum_{s=1}^{n} p_s u(x_s).$$

a) Argumente por qué si $u(\cdot)$ es cóncava, el agente es adverso al riesgo. Interprete.

b) Adapte la definición de aversión al riesgo al caso de distribuciones continuas.

c) ¿Cómo definiría un agente «neutral al riesgo»?

Ejercicio 10.2.21. Una forma de «medir» la aversión al riesgo es a través de los coeficientes de Aversión Absoluta al Riesgo (AAR) y de Aversión Relativa al Riesgo (ARR), definidos (en cuanto u sea dos veces diferenciables y no constante), de la manera siguiente:

$$AAR(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad ARR(x) = xAAR(x).$$

a) Interprete los coeficientes $AAR(x)$ y $ARR(x)$.

b) Calcule los coeficientes $AAR(x)$ y $ARR(x)$ para $u(x) = \sqrt{x}$, $\ln x$, x y x^2. Interprete.

c) Demuestre que si $ARR(x) = \rho$ constante, entonces $u(x) = Ax^{1-\rho} + B$ si $\rho \neq 1$ y $u(x) = C \ln x + D$ si $\rho = 1$, con A, B, C y D constantes.

d) Obtenga $u(x)$ si $AAR(x) = \gamma$ constante.

Ejercicio 10.2.22. Considere la siguiente función de utilidad tipo Bernouilli, $u(x) = a + bx - (c/2)x^2, \quad b, c > 0$. Demuestre que, dado $X_S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y una lotería cualquiera $L = (p_1, \cdots, p_n)$, $U(L) = a + b\mu - (c/2)(\mu^2 + \sigma^2)$, donde $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ y $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$.

10.3. Introducción al Equilibrio General

Con el propósito de mostrar algunas aplicaciones de los conceptos estudiados hasta aquí, en esta sección presentamos una breve introducción a la Teoría del Equilibrio General. La teoría del equilibrio es un modelo matemático que busca analizar cómo se determinan los precios y las cantidades demandadas de los bienes de consumo a partir de la interacción de los distintos mercados que constituyen la economía. Sus orígenes se remontan a los desarrollos de León Walras, que publicó en 1874 su famoso libro «Élements d'Economie Politique Pure» (Walras, 1874). La construcción moderna se basa principalmente en los trabajos de Kenneth Arrow, Gérard Debreu y Lionel McKenzie (Arrow &

Debreu, 1950), (McKenzie, 1959). La teoría del equilibrio general abarca una gran variedad de temas, y por cuenta propia podría constituir un libro en sí mismo. Aquí nos limitamos al escenario básico en el cual se considera una economía con un número finito de agentes y bienes y no existe producción. El lector interesado en un estudio más exhaustivo del tema puede consultar, por ejemplo, el libro «Existence and Optimality of Competitive Equilibrium» (Aliprantis, Brown & Burkinshaw, 1990), en donde se estudian economías con un número infinito de bienes; o bien el texto «General equilibrium overlapping generations models and optimal growth theory» de Truman Bewley (Bewley, 2007), en donde se abordan otras extensiones del modelo.

El estudio del equilibrio general nos permite vincular la teoría con muchos de los conceptos estudiados hasta aquí. En particular, haremos uso del análisis convexo y la optimización con restricciones, así como las diferentes propiedades de las relaciones de preferencias. Empezamos presentando lo que se conoce como una «Economía de Intercambio Puro», que se caracterizan por la ausencia de entidades que permitan producir nuevos bienes. Luego, para presentar el Primer y Segundo Teorema del Bienestar, en el contexto de las economía de intercambio puro, introducimos los conceptos de «Óptimo de Pareto» y «Equilibrio Walrasiano». Veamos.

Pensemos en una economía con $N \geq 2$ individuos y $L \geq 1$ bienes. Como no hay producción, es legítimo preguntarse: ¿de dónde salen entonces los bienes? Expliquemos esto. Cada consumidor $k \in \{1, ..., N\}$ posee una una canasta de bienes $\boldsymbol{\omega}_k = (\omega_{1k}, ..., \omega_{Lk}) \in \mathbb{R}^L_+$, que constituye su dotación inicial. Por ejemplo, supongamos que una economía solo consta de $N = 3$ individuos y $L = 3$ bienes (naranjas, manzanas y camotes). Si las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0, 2), \boldsymbol{\omega}_2 = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{\omega}_3 = (3, 2, 1)$, entonces, puesto que no hay producción, la economía contará en todo momento con 4 naranjas, 2 manzanas y 4 camotes. En general, para cada bien $\ell \in \{1, ..., L\}$, la economía cuenta con una cantidad dada por

$$\omega_\ell = \sum_{k=1}^{N} \omega_{\ell k},$$

donde $\omega_{\ell k}$ representa la ℓ-ésima componente de $\boldsymbol{\omega}_k$.

Para completar las hipótesis básicas del modelo, en adelante consideraremos una economía en la que, para cada individuo k, existe al menos algún ℓ, tal que $\omega_{\ell k} > 0$; y para cada bien ℓ, $\omega_\ell > 0$. Así pues, los consumidores tienen en su dotación inicial al menos una cantidad positiva de uno de los bienes, y todos los bienes existen en la economía. Estas condiciones permiten que se pueda llevar a cabo un intercambio de bienes entre los consumidores.

Claramente, las dotaciones del ejemplo anterior satisfacen las hipótesis establecidas. Ahora bien, si la dotación inicial del tercer individuo fuera, por ejemplo, $\boldsymbol{\omega}_3 = (3, 0, 1)$, se cumpliría la primera hipótesis, pues cada individuo seguiría teniendo al menos un bien de los bienes considerados; sin embargo, no se cumpliría la segunda hipótesis, pues no habrían naranjas en la economía. Las economías que no satisfacen las propiedades anotadas se llaman «degeneradas» y no serán de nuestro interés aquí.

Si dos individuos no están satisfechos con sus dotaciones iniciales entonces, dado que no hay producción, se verán impulsados a intercambiar bienes entre ellos, y éste intercambio será posible si cada uno tiene lo que el otro desea.[14] De esta manera se configura lo que se conoce como una «economía de intercambio puro».

Si el k-ésimo individuo ejecuta un intercambio de bienes, éste pasa de tener una dotación inicial $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^L_+$ a tener una dotación $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+$. Ahora bien, ¿cómo los individuos miden su bienestar?, ¿cómo distinguen entre una dotación y otra? La respuesta viene dada por las preferencias naturales de cada uno de ellos. Así pues, queda configurado el modelo de una economía de intercambio puro en la que cada consumidor posee una dotación inicial $\boldsymbol{\omega}_k$, que satisface las hipótesis establecidas, y que está caracterizado por sus preferencias $\succeq_k$ sobre $\mathbb{R}^L_+$. Si los individuos, de acuerdo con sus preferencias, no están satisfechos con sus dotaciones iniciales, dado que no hay producción, se sentirán impelidos a realizar intercambios de bienes entre ellos, de suerte de conseguir una dotación que les produzca mayor grado de satisfacción. Denotamos esta economía con L bienes y N individuos por el conjunto $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{(\boldsymbol{\omega}_k, \succeq_k);\ \boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^L_+,\ k = 1, \ldots, N\}.$$

Ejemplo

Ejemplo 10.3.1. Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro con $L = N = 2$ y supongamos que las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$. Supongamos, además, que las preferencias de los individuos que componen la economía están representadas por

[14] En realidad, el intercambio se efectuará si al menos uno de los dos mejora y el otro no resulta perjudicado como consecuencia del intercambio.

funciones de utilidad de tipo Cobb-Douglas: $u_1(x_1, x_2) = x_1^{1/3}x_2^{3/4}$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$. Bajo estas condiciones, ¿habrá intercambio? Ciertamente sí, pues las dotaciones iniciales de cada individuo le reportan una utilidad igual a cero; mientras que, si el individuo 1 intercambia una cantidad $x_1 \in]0, 1[$ del bien 1 a cambio de una cantidad $x_2 \in]0, 1[$ del bien 2, del individuo 2, las utilidades de ambos se tornan positivas, pues las asignaciones, después del intercambio, serían $\mathbf{x}_1 = (1 - x_1, x_2)$ y $\mathbf{x}_2 = (x_1, 1 - x_2)$, lo que generaría utilidades positivas, $u_1 = (1 - x_1)^{1/3}x_2^{3/4}$ y $u_2 = x_1^{1/2}(1 - x_2)^{1/2}$, respectivamente.

Ahora bien, con la finalidad de mejorar sus utilidades ¿qué cantidades x_1 y x_2 deberían intercambiar los agentes? Este problema no es tan sencillo como en situaciones anteriores. Por ejemplo, en el problema del consumidor, el individuo busca la canasta óptima de consumo dada su restricción presupuestaria. Qué tanto puede mejorar su utilidad depende únicamente de su ingreso, el vector de precios de los bienes y sus preferencias. En las economías de intercambio puro existen varios individuos, y la única manera de mejorar sus utilidades es intercambiando bienes con el resto. Pero entonces, el individuo depende de lo que los otros deseen intercambiar, y deben ponerse de acuerdo sobre las tasas de intercambio. En este ejemplo, dadas las dotaciones iniciales, ambos individuos tienen incentivos de intercambiar para mejorar su utilidad. Sin embargo, en el caso general, es posible que algunos de los agentes no desee intercambiar. Si en este ejemplo hubiésemos tenido $u_1(x_1, x_2) = 10x_1 + x_2$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, a ninguno de los individuos les conviene intercambiar. En efecto, dadas las dotaciones en cuestión, la canasta $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = (1,0)$ le da la mayor utilidad posible al individuo 1, sujeto a que el individuo 2 desee intercambiar, y a su vez, $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 = (0,1)$ le da la mayor utilidad posible al individuo 2, sujeto a que el individuo 1 desee intercambiar. Formalmente la solución de:

$$\max_{\mathbf{x}_1 \in [0,1]^2} 10x_{11} + x_{21}$$
$$\text{s.a } u_2(x_{12}, x_{22}) = (1 - x_{11}) + 2(1 - x_{21}) \geq u_2(\boldsymbol{\omega}_2) = 2$$

es $(1,0)$, y a su vez, $(0,1)$ resuelve:

$$\max_{\mathbf{x}_2 \in [0,1]^2} x_{12} + 2x_{22}$$
$$\text{s.a } u_1(x_{11}, x_{21}) = 10(1 - x_{12}) + (1 - x_{22}) \geq u_1(\boldsymbol{\omega}_1) = 10.$$

Las condiciones $u_2(x_{12}, x_{22}) \geq u_2(0,1)$ y $u_1(x_{11}, x_{21}) \geq u_1(1,0)$ son justamente aquellas que corresponden a las restricciones: *sujeto a que el otro individuo desee intercambiar.*

Note que hemos usado el hecho que $x_{11} + x_{12} = 1$ y $x_{21} + x_{22} = 1$. Asimismo, estamos considerando que los individuos intercambian cuando están mejor o igual que en su dotación. Esto es, consideramos desigualdades débiles en las restricciones $u_i(x_{1k}, x_{2k}) \geq u_i(\omega_{1k}, \omega_{2k})$.

Por lo tanto, dadas las dotaciones y preferencias en cuestión, a los individuos nos les conviene intercambiar (no mejoran su utilidad) y se quedan con su dotación.

Así pues, el consumo final de cada individuo dependerá de las preferencias y las dotaciones iniciales de cada agente en la economía, los individuos no optimizan individualmente. En lo que sigue abordamos justamente este problema de optimización conjunta.

◊◊◊

Las dotaciones de los individuos, después de intercambiar, no son arbitrarias, sino que están sujetas a las existencias iniciales de los bienes de consumo. Formalmente:

Definición 10.3.1. Una «dotación factible» es una colección de canastas de consumo $\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+; k = 1, \ldots, N\}$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k. \tag{10.3.1}$$

Ejemplo

Ejemplo 10.3.2. Sean $L = N = 2$ y supongamos que $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (2, 2)$. Entonces, $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = (3, 4)$. Así, las asignaciones $\{(1, 1), (2, 2)\}$ y $\{(1.5, 3), (1.5, 1)\}$ son factibles, pues en ambos casos se verifica la condición (10.3.1); en cambio, la asignación $\{(2, 2), (2, 2)\}$ no es factible, pues la suma de las primeras componentes es superior a 3, por lo que no se verifica la condición (10.3.1). Una asignación es factible si resulta de una transacción de los bienes totales que existían inicialmente.

◊◊◊

Quedamos entonces que en una economía de intercambio puro los agentes insatisfechos con sus dotaciones iniciales buscan mejorarlas a través de intercambios voluntarios de los bienes de consumo. Esto demanda que los agentes dispongan de un criterio que describa o mida esta mejora. El siguiente criterio, conocido como «Óptimo de Pareto», es ampliamente aplicado en la economía y otras disciplinas, y constituye un criterio de eficiencia para la acción de intercambio. Este concepto fue introducido por el ingeniero francés de origen italiano Wilfredo Pareto (1848-1923).

Definición 10.3.2. (Óptimo de Pareto). Se dice que una asignación factible $\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^{N}$ es un Óptimo de Pareto (PO por sus siglas en inglés) si no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{N}$, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\forall\ k \in \{1, ..., N\} : \quad \mathbf{x}_k \succeq_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \tag{10.3.2}$$

$$\exists\ k_0 \in \{1, ..., N\} : \quad \mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}. \tag{10.3.3}$$

En concreto, una asignación es PO si es factible y no existe otra asignación factible con la cual al menos un agente esté estrictamente mejor y todos los demás estén por lo menos igual o mejor que con la asignación PO.

Ejemplos

Ejemplo 10.3.3. Consideremos una economía $\mathcal{E}$ en la cual viven dos individuos, Eduardo y Alicia, y existe un único bien de consumo: el dinero (m). Las preferencias de Eduardo y Alicia están definidas por

$$m \succeq_k \hat{m} \Leftrightarrow m \geq \hat{m},\ \ k = 1, 2. \tag{10.3.4}$$

Por otro lado, supongamos que las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = 300, \boldsymbol{\omega}_2 = 700$ ¿Constituye la dotación $\{300, 700\}$ una asignación

PO? La respuesta es afirmativa, pues no existe una asignación $\{m_1, m_2\}$, tal que $m_1 + m_2 \leq 1000$ y además se cumpla que:

$$[m_1 \geq 300 \ \wedge m_2 \geq 700] \ \wedge \ [m_1 > 300 \ \vee \ m_2 > 700]. \quad (10.3.5)$$

Es sencillo notar que si $m_1 > 300$, necesariamente $m_2 < 700$ y que si $m_2 > 700$, necesariamente $m_1 < 300$. Así pues, en ninguno de estos casos se cumpliría la primera condición de (10.3.5), por lo que $\{300, 700\}$ es una asignación PO. La única forma en la que, o bien Eduardo, o bien Alicia, mejoren su felicidad es incrementando la cantidad de dinero que poseen, pero esto solo puede pasar si el otro cede una cantidad de dinero, lo cual disminuiría su felicidad.

Siguiendo el mismo argumento, el lector puede verificar que la asignación $\{m_1, m_2\}$, tal que $m_1 + m_2 = 1000$, con $m_1, m_2 \geq 0$, es una asignación PO. Este resultado tiene una consecuencia que podría juzgarse como injusta. Imaginemos que Eduardo y Alicia han sido dotados de $m_1 = 999$ y $m_2 = 1$ dólares, respectivamente. De acuerdo con lo establecido, esta asignación sería un PO, aunque Alicia desearía mucho hacer un intercambio, lo que perjudicaría a Eduardo. Aunque injusto, sin embargo, es una situación eficiente desde el punto de vista conceptual.

Ejemplo 10.3.4. Retomemos el ejemplo 10.3.1, donde $L = 2 = N$, $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$, y las preferencias de los individuos son:

$$(x_1, x_2) \succeq_1 (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^{1/3} x_2^{3/4} \geq y_1^{1/3} y_2^{3/4}.$$

$$(x_1, x_2) \succeq_2 (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^{1/2} x_2^{1/2} \geq y_1^{1/2} y_2^{1/2}.$$

¿Constituye la dotación $\{(1,0),(0,1)\}$ una asignación PO? Veamos que no. En efecto, si lo fuera, no existiría $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\succeq_1 (1,0), \\ \mathbf{x}_2 &\succeq_2 (0,1), \\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 &\leq (1,1). \end{aligned}$$

y, o bien $\mathbf{x}_1 \succ_1 (1,0)$, o bien $\mathbf{x}_2 \succ_1 (0,1)$. Sin embargo, $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ es una asignación tal que:

$$\begin{aligned} (0.5,0.5) &\succ_1 (1,0), \\ (0.5,0.5) &\succ_2 (0,1), \\ (0.5,0.5)+(0.5,0.5) &= (1,1). \end{aligned}$$

Es decir, $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ es una asignación factible con la cual ambos consumidores se encuentran estrictamente mejor que con la asignación $\{(1,0),(0,1)\}$. Luego, por definición, $\{(1,0),(0,1)\}$ no es PO. En este caso, los agentes buscarán mejorar su dotación inicial. Observe, más bien, que la asignación $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ sí constituye un PO, pues en esta situación, cualquier intercambio entre ellos implicará la mejora de uno y el empeoramiento del otro.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

Observemos que, como puede verse del ejemplo 10.3.3, para un mismo escenario, podrían existir varias asignaciones PO, incluso infinitas. El teorema 10.3.1 provee una caracterización de un PO como solución de un problema de optimización (de tipo $\mathcal{KKT}$). Para presentar el teorema, permítanos primero definir el siguiente problema:

Definición 10.3.3. (El problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$). Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro en la que cada relación de preferencias $\succeq_k$ es representada por una función de utilidad $u_k(\cdot)$ continua. Sea $k_0 \in \{1, ..., N\}$ y $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} = (\overline{u}_1, ..., \overline{u}_{k_0-1}, \overline{u}_{k_0+1}, ..., \overline{u}_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Definimos el problema de maximización $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ como sigue:

$$\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0}) : \begin{cases} \max\limits_{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+\}_{k=1}^N} & u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) \\ \text{s. a :} & u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k,\ k = 1, ..., N, k \neq k_0 \\ & \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k. \end{cases}$$

Lo que se busca en el problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ es encontrar una asignación de canastas que maximice la utilidad de alguno de los individuos (k_0) y que mantenga los niveles de utilidad del resto de agentes por encima de cierto umbral (determinado por $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0}$). En otras palabras, encontrar la mejor canasta posible para k_0 sin «empeorar» al resto de individuos. Esta maximización se hace sobre el conjunto de todas las asignaciones factibles.

Note que cuando las funciones de utilidad son continuas y el conjunto de oportunidad es no vacío, el problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ siempre tiene solución. En efecto, sea S el conjunto de oportunidad del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$. Como las funciones de utilidad u_k son continuas, cada restricción $u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k$ determina un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^L$. Puesto que el producto cartesiano de cerrados es un conjunto cerrado, el conjunto A definido por

$$A = \prod_{k \neq k_0} \underbrace{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+ : u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k\}}_{\subset \mathbb{R}^L} \times \underbrace{\{\mathbf{x}_{k_0} \in \mathbb{R}^L_+\}}_{\subset \mathbb{R}^L} \subset \mathbb{R}^{LN}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{LN}$. Por otro lado, como:

$$B = \left\{ (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}_+^{LN} : \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \overline{\boldsymbol{\omega}} \right\} \tag{10.3.6}$$

es un conjunto compacto (véase ejercicio 10.3.1) y $S = A \cap B$, concluimos que S es compacto, y el resultado se sigue del Teorema de Weierstrass.

Teorema 10.3.1. Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro, donde cada relación de preferencias $\succeq_k$ es racional, continua y fuertemente monótona. Entonces, $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$, es una asignación PO si y solamente si para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$ existe un vector $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} \in \mathbb{R}^{N-1}$, tal que $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$.

Demostración. Para la ida, supongamos que $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es una asignación PO. Entonces, por definición, no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$ en $\mathcal{E}$, tal que para todo $k \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_k \succeq_k \tilde{\mathbf{x}}_k$, y, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$. En términos de funciones de utilidad, podemos reescribir esto mismo diciendo que no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que para todo $k \in \{1, ..., N\}$, $u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$, y, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0})$. Esto implica que, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, la asignación $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$:

$$\begin{aligned} &\max_{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}_+^L\}_{k=1}^N} \; u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) \\ &\text{s. a} : u_k(\mathbf{x}_k) \geq \underbrace{u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)}_{\overline{u}_k}, \; k = 1, ..., N, \; k \neq k_0 \\ &\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k. \end{aligned}$$

Para la vuelta, supongamos que para cierto $k_0 \in \{1, ..., N\}$ existe $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} \in \mathbb{R}^{N-1}$, tal que la asignación $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$. Esto significa que $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$ maximiza la utilidad de k_0 sujeto a que $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) \geq \overline{u}_k$, $k \neq k_0$, y $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k \leq \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k = \overline{\boldsymbol{\omega}}$. Lo primero que establecemos es que para todo $k \neq k_0$, $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \overline{u}_k$ y $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k$. Supongamos, por contradicción, que para algún $k_j \neq k_0$, la desigualdad es estricta. Esto es, $u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) > \overline{u}_{k_j}$. En este caso, debido a la continuidad y monotonía fuerte de las preferencias, existen $\epsilon > 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^L$ diferente de $\mathbf{0}$, tales que:

$$u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) > u_{k_j}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}\right) = \overline{u}_{k_j}.$$

Pero entonces, para $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}$, nuevamente por la monotonía fuerte:

$$u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}).$$

Esto es una contradicción, pues $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}, ..., \tilde{\mathbf{x}}_N\}$ es una asignación tal que $u_k(\cdot) \geq \overline{u}_k$ para todo $k \neq k_0$ y es factible, ya que:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 + \cdots + (\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}) + \cdots + (\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}) + \cdots + \tilde{\mathbf{x}}_N = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k \leq \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Por otro lado, si $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k < \overline{\boldsymbol{\omega}}$, podemos definir la asignación:

$$\left\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_N\right\}.$$

Esta asignación es factible pues para $k \neq k_0$, todos alcanzan un nivel de utilidad por lo menos igual a $\overline{u}_k$ (la canasta de cada individuo $k \neq k_0$ es $\tilde{\mathbf{x}}_k$ y ya establecimos que $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \overline{u}_k$), y:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \cdots + \tilde{\mathbf{x}}_N = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Sin embargo, por la monotonía fuerte de las preferencias:

$$u_{k_0}\left(\overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}\right) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}),$$

lo cual es una contradicción, pues viola la maximalidad de $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$.

De este modo, que $\tilde{\mathbf{x}}$ sea solución de $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ implica que no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k = u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k),\ k \neq k_0, \tag{10.3.7}$$

$$u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}). \tag{10.3.8}$$

Para concluir que $\tilde{\mathbf{x}}$ es una asignación PO debemos probar que no existe otra asignación factible, tal que para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$, $u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ y para algún $k_j \in \{1, ..., N\}$, $u_{k_j}(\mathbf{x}_{k_j}) > u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j})$. Supongamos, por contradicción, que sí existe dicha asignación $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$. Por (10.3.7) y (10.3.8) sabemos que no existe dicha asignación para $k_j = k_0$, por lo que $k_j \neq k_0$. Sea entonces $k_j \neq k_0$ y $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k),$$

$$u_{k_j}(\mathbf{x}_{k_j}) > u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}),$$

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Como las preferencias son continuas, fuertemente monótonas, y $\mathbf{x}_{k_j} \neq \mathbf{0}$[15], existe $\ell \in \{1, ..., L\}$ y $\epsilon > 0$, tal que, haciendo $\hat{\mathbf{x}}_{k_j} = (x_{1k_j}, ..., x_{\ell k_j} - \epsilon, ..., x_{Lk_j})$:

$$u_{k_j}(\hat{\mathbf{x}}_{k_j}) = u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) = \overline{u}_{k_j}.$$

[15] Como $\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}_{k_j} \succ \tilde{\mathbf{x}}_{k_j}$, necesariamente $\mathbf{x}_{k_j} \neq \mathbf{0}$.

Ahora, definiendo $\hat{\mathbf{x}}_{k_0} = \mathbf{x}_{k_0} + \epsilon \mathbf{e}_\ell = (x_{1k_0}, ..., x_{\ell k_0} + \epsilon, ..., x_{Lk_0})$, nuevamente por la monotonía fuerte de las preferencias, obtenemos:

$$u_{k_0}(\hat{\mathbf{x}}_{k_0}) > u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}).$$

Esto es una contradicción, pues $\{\mathbf{x}_1, ..., \hat{\mathbf{x}}_{k_0}, ..., \hat{\mathbf{x}}_{k_j}, ..., \mathbf{x}_N\}$ es una asignación factible, tal que:

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}_k) &\geq \overline{u}_k,\ k \neq k_0, k_j, \\ u_{k_j}(\hat{\mathbf{x}}_{k_j}) &= \overline{u}_{k_j}, \\ u_{k_0}(\hat{\mathbf{x}}_{k_0}) &> u_{k_0}(\mathbf{x}_k) \geq u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{x}}_{k_j} + \cdots + \hat{\mathbf{x}}_{k_0} + \cdots + \mathbf{x}_N = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

en la que k_0 mejora su utilidad. Esto contradice la maximalidad de $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$. Así, tal $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$ no existe, i.e., $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es una asignación PO. $\square$

Ejemplo 10.3.5. Volvamos al ejemplo 10.3.3. Las preferencias de Eduardo y Alicia pueden ser asociadas, respectivamente, a las funciones de utilidad $u_1(m_1) = m_1$ y $u_2(m_2) = m_2$. Recordemos que habíamos determinado que la asignación $\{300, 700\}$ era PO. Entonces, de acuerdo con el teorema 10.3.1, existe $k_0 \in \{1, 2\}$, tal que $\{300, 700\}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{u}_{-k_0})$ para algún nivel de utilidad $\overline{u}_{-k_0}$. Para $k_0 = 1$, veamos que $\{300, 700\}$ es solución del problema $\mathcal{P}_1(700)$:

$$\mathcal{P}_1(700) : \begin{cases} \max\limits_{\{m_1, m_2 \in \mathbb{R}_+\}} & u_1(m_1) = m_1 \\ \text{s. a :} & u_2(m_2) = m_2 \geq 700 \\ & m_1 + m_2 \leq 1000. \end{cases} \tag{10.3.9}$$

Sea $\{m_1^*, m_2^*\}$ la solución de (10.3.9), y supongamos que $\{m_1^*, m_2^*\} \neq \{300, 700\}$. Si $m_2^* \neq 700$, entonces, de la primera restricción, $m_2^* > 700$. Pero entonces, como $m_1^* + m_2^* \leq 1000$, necesariamente $m_1^* < 300$, lo que es una contradicción, pues $\{300, 700\}$ es una asignación factible que cumple con la restricción y el consumidor 1 está estrictamente mejor: $u_1(300) > u_1(m_1^*)$. Puesto que $m_2^* = 700$ y el consumidor 1 quiere maximizar su utilidad, entonces, de la segunda restricción, se obtiene $m_1^* = 300$.

Ahora bien, para la vuelta, hay que verificar que si $\{m_1^*, m_2^*\} \in \mathbb{R}_+^2$ es solución de algún problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{u}_{k_0})$, entonces es una asignación PO. Por ejemplo, por los argumentos anteriores, sabemos que $\{200, 800\}$ es solución de $\mathcal{P}_1(800)$. Por otro lado, como se comentó al final del ejemplo 10.3.3, también es una asignación PO.

$\lozenge\lozenge\lozenge$

El concepto de asignación PO es central en la teoría del equilibrio general. Igual de importante es el concepto de «Equilibrio Walrasiano» (EW), que está fuertemente vinculado con el de PO, como veremos en esta sección. Para definir un EW, permítanos introducir algunas ideas preliminares.

En capítulos anteriores, hemos estudiado el problema del consumidor. En dicho problema, dado su ingreso I y el nivel de precios $\mathbf{p}$, el consumidor escogía una canasta de consumo óptima, según sus preferencias y sus posibilidades descritas por el conjunto $B(\mathbf{p}; I)$. En el contexto de las economías de intercambio puro, las dotaciones de los individuos reflejan su riqueza. Sin embargo, para poder cuantificarla, es necesario introducir precios. Así pues, consideraremos un vector de precios $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_L)$, donde $p_\ell \geq 0$ es el precio por unidad del bien ℓ.[16] La riqueza del consumidor k vendrá entonces dada por

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_k = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k}.$$

Por ejemplo, si las dotaciones iniciales fuesen $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0, 2)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (2, 2, 1)$, las riquezas serían $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = p_1 + 2p_3$ y $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 2p_1 + 2p_2 + p_3$.

Introducir un vector de precios tiene otra ventaja. El vector $\mathbf{p}$ contiene toda la información acerca de las tasas de intercambio. Si, por ejemplo, tenemos dos bienes, ℓ_1 y ℓ_2, con los precios $p_{\ell_1} = 1$ y $p_{\ell_2} = 3$, lo que estamos diciendo es que se deben intercambiar 3 unidades del bien ℓ_1 por una unidad del bien ℓ_2, que es lo mismo que decir que se intercambia $p_{\ell_1}/p_{\ell_2} = 1/3$ del bien ℓ_2 por una unidad del bien ℓ_1. Note entonces que, cuando $p_{\ell_2} = 0$ y $p_{\ell_1} > 0$, uno estaría dispuesto a intercambiar infinito del bien ℓ_2 por cualquier cantidad del bien ℓ_1. A continuación, en cualquier caso, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$; es decir, podría darse que para un bien $p_\ell = 0$, pero no para todo $\ell \in \{1, ..., L\}$.

Para que los agentes económicos puedan hacer transacciones es necesario determinar cuáles serán las tasas de intercambio p_{ℓ_1}/p_{ℓ_2}. Para esto, empezamos fijando un vector de precios arbitrario $\boldsymbol{p}$. Cada individuo maximiza su utilidad dentro de sus posibilidades, tal y como en el problema del consumidor. En este contexto, sus

[16]Cuando $p_\ell = 0$ para cierto ℓ, el bien ℓ no es valorado por los consumidores y por ende, no contribuye en nada a la riqueza de los individuos.

posibilidades vienen descritas por

$$B_k(\mathbf{p}; \boldsymbol{\omega}_k) = \left\{ \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_k \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_k \right\}. \tag{10.3.10}$$

$B_k(\cdot; \cdot)$ es la restricción presupuestaria del individuo k, su conjunto de canastas de consumo accesibles que puede obtener a través del intercambio, usando su dotación inicial. Para ello, el costo de la asignación que quiere obtener debe ser menor o igual al valor de su riqueza. Imaginemos por ejemplo que estamos en una economía 2×2 donde las dotaciones iniciales de manzanas y naranjas son $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 2)$. Supongamos también que las preferencias de los individuos vienen representadas por funciones de utilidad Cobb-Douglas, $u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}x_{21}$ y $u_2(x_{12}, x_{22}) = x_{12}x_{22}$. Dadas las dotaciones iniciales y las utilidades correspondientes, es claro que habrá intercambio. Fijamos entonces $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+$ y resolvemos el problema del consumidor 1:

$$\begin{aligned} &\max\ x_{11}x_{21} \\ &\text{s. a}: p_1x_{11} + p_2x_{21} \leq p_1\omega_{11} + p_2\omega_{21} = p_1 \\ &\qquad x_{11}, x_{21} \geq 0. \end{aligned}$$

Análogamente, para el mismo vector de precios, resolvemos el problema del consumidor 2:

$$\begin{aligned} &\max\ x_{12}x_{22} \\ &\text{s. a}: p_1x_{12} + p_2x_{22} \leq p_1\omega_{12} + p_2\omega_{22} = 2p_2 \\ &\qquad x_{12}, x_{22} \geq 0. \end{aligned}$$

Como es de esperarse, las soluciones $x^*_{11}, x^*_{21}, x^*_{12}, x^*_{22}$ serán funciones del vector de precios. Una vez obtenidas estas demandas, para obtener las tasas de intercambio, debemos resolver la ecuación:

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{2} \mathbf{x}_k^*(\mathbf{p})}_{\text{demanda}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{\omega}_k}_{\text{oferta}}}_{\text{precio que equilibra el mercado}} \quad . \tag{10.3.11}$$

El vector de precios $\mathbf{p}^*$ que se obtiene como solución de la ecuación (10.3.11) determinará completamente cuáles serán las tasas de intercambio, y cuál será el consumo de cada individuo luego de tal intercambio. Note que en este contexto, a diferencia del problema del consumidor, el vector de precios es endógeno.[17] Al par $(\{\mathbf{x}_k^*\}_{k=1}^2, \mathbf{p}^*)$ se le conoce en la literatura como EW (véase la definición 10.3.4).

Una última observación. En general, el sistema (10.3.11) es no lineal, y suele ser complicado obtener los precios $p_1, ..., p_L$. Sin embargo, es más sencillo obtener los ratios, $p_1/p_2, ..., p_1/p_L$. Para fines prácticos, esto será suficiente, pues lo que nos interesa son las tasas de intercambio y, además, las demandas quedan en términos de estas tasas (véase ejercicios 10.3.4 y 10.3.5).

Definición 10.3.4. (Equilibrio Walrasiano). Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro, y $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}_k^*\}_{k=1}^N$, una asignación específica de canastas. Un EW en $\mathcal{E}$ es un par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*) \in \mathbb{R}_+^{NL} \times \mathbb{R}_+^L$ que satisface las condiciones (10.3.12) y (10.3.13) que se dan a continuación.

Para todo $k : 1, \dots, N$ se cumple:

$$\mathbf{x}_k^* \in B_k(\mathbf{p}^*; \boldsymbol{\omega}_k) \quad \wedge \quad \mathbf{x}_k^* \succeq_k \mathbf{x}_k \;\; \forall\, \mathbf{x}_k \in B_k(\mathbf{p}^*; \boldsymbol{\omega}_k). \tag{10.3.12}$$

[17] La existencia de una solución $\mathbf{p}^*$ de la ecuación (10.3.11) no está garantizada a priori, y será necesario imponer determinadas condiciones para asegurar tal existencia. Al final de la sección se discute brevemente al respecto.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k^*(\mathbf{p}^*) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k. \tag{10.3.13}$$

Cuando se cumple (10.3.13) se dice que «se limpia el mercado», es decir, se consume todo lo disponible. Es de hecho una condición de equilibrio.

Note que cuando las preferencias vienen representadas por funciones de utilidad, en un EW cada consumidor k resuelve el problema:

$$\mathcal{P}_k : \begin{cases} \max & u_k(\mathbf{x}_k) \\ \text{s. a}: & \mathbf{x}_k \in B_k(\mathbf{p}; \boldsymbol{\omega}_k). \end{cases}$$

Cuando las funciones $u_k(\cdot)$ son continuas, por el Teorema de Weierstrass, podemos asegurar la existencia de una solución $\mathbf{x}_k^* = \mathbf{x}_k^*(\mathbf{p})$ del problema $\mathcal{P}_k$. Luego, se determina $\mathbf{p}^*$ resolviendo (10.3.13).

A modo de síntesis, podemos pensar en la economía $\mathcal{E}$ como un sistema en el que los individuos intercambian sus dotaciones con la finalidad de maximizar su utilidad, sujeto a su restricción presupuestaria B_k, determinada por su dotación inicial y el vector de precios. Este vector de precios determina las tasas de intercambio y se halla vía la condición de equilibrio. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo

Ejemplo 10.3.6. Sean $\boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_{11}, \omega_{21}) \in \mathbb{R}_+^2$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_{12}, \omega_{22}) \in \mathbb{R}_+^2$ las dotaciones iniciales de los individuos 1 y 2, respectivamente. Asumamos que las preferencias de los individuos son racionales, continuas y fuertemente monótonas, y que están representadas por funciones de utilidad Cobb-Douglas. Concretamente, para $\alpha, \beta \in]0,1[$, definamos:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}^{\alpha} x_{21}^{1-\alpha}.$$
$$u_2(x_{12}, x_{22}) = x_{12}^{\beta} x_{22}^{1-\beta}.$$

Calculemos el (los) EW(s). Para esto, debemos primero resolver los siguiente problemas de K-K-T:

$$\begin{aligned} &\max\ x_{11}^{\alpha} x_{21}^{1-\alpha} \\ &\text{s. a} : p_1 x_{11} + p_2 x_{21} \leq p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{21} \\ &\qquad x_{11}, x_{21} \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\max\ x_{12}^{\beta} x_{21}^{1-\beta} \\ &\text{s. a} : p_1 x_{12} + p_2 x_{22} \leq p_1 \omega_{12} + p_2 \omega_{22} \\ &\qquad x_{12}, x_{22} \geq 0. \end{aligned}$$

Como sabemos, para funciones de utilidad de tipo Cobb-Douglas, la solución está en la recta de presupuesto, siendo inactivas las condiciones de no negatividad. Dejamos como ejercicio al lector verificar que:

$$x_{11}^* = \frac{\alpha}{p_1}(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{21}).$$
$$x_{21}^* = \frac{(1-\alpha)}{p_2}(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{21}).$$
$$x_{12}^* = \frac{\beta}{p_1}(p_1 \omega_{12} + p_2 \omega_{22}).$$
$$x_{22}^* = \frac{(1-\beta)}{p_2}(p_1 \omega_{12} + p_2 \omega_{22}).$$

Ahora debemos determinar los precios, tales que se limpie el mercado. Como mencionamos previamente, no estamos realmente interesados en el valor numérico de p_1 y p_2, sino más bien, en el valor de la tasa p_1/p_2. Por ejemplo, $(p_1, p_2) = (2, 4)$ y $(p_1, p_2) = (1, 2)$ proveen exactamente la misma información: se intercambian dos unidades del bien 1 por una unidad del bien 2. Ahora bien, para despejar la tasa p_1/p_2, bastará con resolver (véase ejercicio 10.3.2):

$$\begin{aligned}\omega_1 - (x^*_{11}(p_1, p_2) + x^*_{12}(p_1, p_2)) &= \omega_1 - \frac{\alpha}{p_1}(p_1\omega_{11} + p_2\omega_{21}) \\ &\quad - \frac{\beta}{p_1}(p_1\omega_{12} + p_2\omega_{22}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, solo hay que resolver unas de las dos ecuaciones que impone la condición «se limpia el mercado». Así pues, resolviendo para p_1/p_2, obtenemos:

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\alpha\omega_{21} + \beta\omega_{22}}{\omega_{11}(1-\alpha) + \omega_{12}(1-\beta)}.$$

Reemplazando esta expresión en las demandas de los consumidores, obtenemos el EW de esta economía.

◊◊◊

El teorema 10.3.2, conocido en la literatura como Primer teorema del bienestar, establece que, bajo condiciones razonables para las relaciones de preferencias, un EW es un OP.

Teorema 10.3.2. (Primer teorema del bienestar). Considere una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$, donde las preferencias de los consumidores son racionales, continuas y localmente no saciadas. Bajo estas condiciones, si $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*) \in \mathbb{R}_+^{NL} \times \mathbb{R}_+^L$ es un EW, entonces la asignación $\mathbf{x}^*$ es un PO.

Demostración. Sea $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ un EW y, procediendo por contradicción, supongamos que la asignación $\mathbf{x}^*$ no es PO. En este caso, debe existir una asignación factible $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que para todo $k \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_k \succeq_k \mathbf{x}_k^*$, y al menos para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \mathbf{x}_{k_0}^*$. Probaremos que para tal asignación se verifica la desigualdad:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k > \overline{\boldsymbol{\omega}}, \tag{10.3.14}$$

lo que contradice el hecho de que $\mathbf{x}$ sea factible.

Primero, la condición $\mathbf{x}_k \succeq_k \mathbf{x}_k^*$ implica que $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k \geq \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k$. En efecto, si $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k < \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_k; \epsilon)$, $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z} < \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k$; y como las preferencias son localmente no saciadas, $\exists\ \mathbf{z}_0 \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_k; \epsilon)$ tal que $\mathbf{z}_0 \succ_k \mathbf{x}_k \succeq_k \mathbf{x}_k^*$. Sin embargo, esto contradice la maximalidad de $\mathbf{x}_k^*$, expresada en la ecuación (10.3.12).

Por otro lado, la condición $\mathbf{x}_{k_0} \succ \mathbf{x}_{k_0}^*$ implica que $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} > \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{k_0}$. En efecto, la desigualdad contraria, esto es, $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} \leq \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{k_0}$, contradice la maximalidad de $\mathbf{x}_{k_0}^*$, expresada en la ecuación 10.3.12.

De este modo, concluimos que:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k = \sum_{k \neq k_0} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} > \sum_{k \neq k_0} \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{k_0} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k. \tag{10.3.15}$$

Como $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_+^L - \{\mathbf{0}\}$, la ecuación (10.3.15) implica que no podemos tener $\sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \leq \overline{\boldsymbol{\omega}}$; es decir, se verifica (10.3.14). □

Ejemplo

Ejemplo 10.3.7. Retomemos el ejemplo 10.3.6 para verificar el teorema 10.3.2. En esta ocasión, en lugar de encontrar un EW, pretendemos encontrar un OP. Para esto, puesto que se cumplen las hipótesis, podemos aplicar el teorema 10.3.1 con $\overline{u} > 0$:[18]

$$\begin{aligned} &\max\ x_{11}^{\alpha} x_{21}^{1-\alpha} \\ &\text{s. a}: x_{12}^{\beta} x_{22}^{1-\beta} \geq \overline{u} \\ &\qquad x_{11} + x_{12} \leq \omega_{11} + \omega_{12} = \omega_1 \\ &\qquad x_{21} + x_{22} \leq \omega_{21} + \omega_{22} = \omega_2 \\ &\qquad (x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}) \in \mathbb{R}_{+}^{4}. \end{aligned}$$

El lector puede concluir que, dadas las propiedades de las funciones de utilidad, el problema se torna:[19]

$$\begin{aligned} &\text{máx}\ x_{11}^{\alpha} x_{21}^{1-\alpha} \\ &\text{s. a}: (\omega_1 - x_{11})^{\beta} (\omega_2 - x_{21})^{1-\beta} = \overline{u} \\ &\qquad x_{11}, x_{21} > 0. \end{aligned}$$

Así pues, el problema se convierte en un problema de Lagrange y podemos resolverlo siguiendo las técnicas del capítulo 8:

$$\mathcal{L}(x_{11}, x_{21}, \lambda) = x_{11}^{\alpha} x_{21}^{1-\alpha} + \lambda(\overline{u} - (\omega_1 - x_{11})^{\beta} (\omega_2 - x_{21})^{1-\beta}).$$

[18] Esto permite evitar asignaciones degeneradas ($\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$).

[19] Las condiciones de no negatividad son inactivas, ver capítulo 9, y las restricciones con desigualdad se dan con igualdad. Aquí el parámetro $\overline{u}$ es tal que las restricciones no determinen un conjunto vacío. Por ejemplo, dado que $\omega_\ell \geq x_{\ell 1}$, $\overline{u}$ no puede ser negativo, ni exceder $\omega_1 \omega_2$.

Las condiciones de primer orden proveen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{11}} = 0 \implies \alpha x_{11}^{\alpha-1} x_{21}^{1-\alpha} = -\lambda\beta(\omega_1 - x_{11})^{\beta-1}(\omega_2 - x_{21})^{1-\beta}.$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{21}} = 0 \implies (1-\alpha) x_{11}^{\alpha} x_{21}^{-\alpha} = -\lambda(1-\beta)(\omega_1 - x_{11})^{\beta}(\omega_2 - x_{21})^{-\beta}.$$

Dado que ninguno de los términos involucrados se anula en el óptimo, dividiendo ambas expresiones se obtiene:

$$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{x_{21}}{x_{11}} = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)\frac{\omega_2 - x_{21}}{\omega_1 - x_{11}}.$$

Resolviendo x_{21} en función de x_{11}, se obtiene:

$$x_{21} = \frac{(1-\alpha)\beta\omega_2 x_{11}}{\alpha(1-\beta)\omega_1 + [(1-\alpha)\beta - \alpha(1-\beta)]x_{11}}. \tag{10.3.16}$$

Combinando la ecuación (10.3.16) con las igualdades $x_{12} = \omega_1 - x_{11}$ y $x_{21} = \omega_2 - x_{22}$, logramos determinar las asignaciones PO en esta economía.[20]

Para ser más específicos, por ejemplo, si $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$, $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/2$, $\omega_{11} = 1$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{12} = 0$ y $\omega_{22} = 1$, entonces los PO corresponden a las asignaciones en las cuales:

$$x_{21} = \frac{3x_{11}}{2x_{11}+1},\ x_{22} = \frac{x_{12}}{3-2x_{12}}, \quad x_{11}, x_{12} \in [0, 1].$$

Ahora bien, con respecto a (los) equilibrio(s) walrasiano(s) de esta economía, siguiendo el ejemplo 10.3.6, tendremos que:

$$x_{11}^* = \frac{1}{4},\ x_{21}^* = \frac{3p_1}{4p_2}.$$
$$x_{12}^* = \frac{p_2}{2p_1},\ x_{22}^* = \frac{1}{2}.$$

[20]El lector podrá verificar que, si hubiésemos resuelto $\mathcal{P}_2(\overline{u})$, se encuentran las mismas asignaciones PO. Así pues, (10.3.16) nos permite caracterizar todas las asignaciones PO.

Resolviendo la ecuación:

$$\omega_1 - x_{11}^* - x_{12}^* = 1 - \frac{1}{4} - \frac{p_2}{2p_1} = 0,$$

encontramos que:

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{2}{3}.$$

Así pues, $x_{11}^* = 1/4$, $x_{21}^* = 1/2$, $x_{12}^* = 3/4$ y $x_{22}^* = 1/2$. Finalmente, note que:

$$x_{21}^* = \frac{1}{2} = \frac{3x_{11}^*}{1 + 2x_{11}^*} = \frac{1}{2}.$$

$\Diamond\Diamond\Diamond$

El Primer Teorema del Bienestar tiene consecuencias importantes en el «policy making»: nos dice que, si dejamos operar libremente al mercado (ningún agente externo asigna las dotaciones, ni determina los precios), de manera que se genere un equilibrio walrasiano, se alcanza la eficiencia en el sentido de Pareto. Esto sugiere de cierto modo que el Estado no debería intervenir en la economía, por ejemplo, redistribuyendo la riqueza. No obstante, la eficiencia en el sentido de Pareto no tiene en cuenta un factor importante en economía: la desigualdad. En el ejemplo de Eduardo y Alicia, en el que Eduardo recibe 999 dólares y Alicia recibe 1 dólar, estamos frente a una asignación PO. Sin embargo, podría decirse que esta situación es «injusta», y que tal asignación refleja «fallas del mercado». Es esto justamente lo que motiva, en parte, las políticas de redistribución. Es en este contexto donde entra en juego el Segundo Teorema del Bienestar. Veamos.

Teorema 10.3.3. (Segundo Teorema del Bienestar). Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro en la cual las preferencias $\succeq_k$

son racionales, convexas, continuas y fuertemente monótonas. Sea $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}_k^*\}_{k=1}^N$ una asignación PO tal que $x_{\ell k}^* > 0$ para todo $\ell = 1, ..., L$ y $k = 1, ..., N$ con $N \geq 2$. Entonces, existe $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_+^L$ tal que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ constituye un EW para la economía $\mathcal{E}'$, donde, para todo $k = 1, \ldots, N$, $\boldsymbol{\omega}_k' = \mathbf{x}_k^*$ y las preferencias son las mismas, respectivamente.

Lo que está diciendo el Segundo Teorema del Bienestar es que si una entidad central identifica una asignación PO $\mathbf{x}^*$ en la cual cada agente consume una cantidad positiva de cada bien, entonces, puede redistribuir las dotaciones iniciales pasando de $\{\boldsymbol{\omega}_k\}_{k=1}^N$ a $\{\boldsymbol{\omega}_k'\}_{k=1}^N$, donde $\boldsymbol{\omega}_k' = \mathbf{x}_k^*$, de forma que, para algún vector de precios $\mathbf{p}^*$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ constituye un EW para la economía $\mathcal{E}'$. De cierta forma, el Segundo Teorema del Bienestar puede ser interpretado como el recíproco del Primer Teorema del Bienestar: bajo ciertas condiciones adicionales sobre las preferencias, una asignación PO constituye, junto a cierto $\mathbf{p}^*$, un EW. Aclaremos esto con un breve ejemplo.

Ejemplo

Ejemplo 10.3.8. Consideremos una economía con 2 consumidores y 2 bienes. Los consumidores tienen preferencias representadas por funciones de utilidad Cobb-Douglas:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}x_{21}.$$
$$u_2(x_{12}, x_{22}) = x_{12}x_{22}.$$

Por otro lado, sean $\boldsymbol{\omega}_1 = (11, 11)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (1, 1)$ las dotaciones.[21] No es difícil ver que $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, (1, 1)\}$ constituye un EW. El lector podrá verificar esto usando que las demandas vienen dadas por

$$x_{11}^*(p_1, p_2) = \frac{11(p_1 + p_2)}{2p_1}, \ x_{21}^*(p_1, p_2) = \frac{11(p_1 + p_2)}{2p_2}.$$
$$x_{12}^*(p_1, p_2) = \frac{p_1 + p_2}{2p_2}, \ x_{22}^*(p_1, p_2) = \frac{p_1 + p_2}{2p_2}.$$

Ahora bien, supongamos que la entidad central considera que lo «mejor» es que los agentes consuman en $\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*\} = \{(6, 6), (6, 6)\}$. Por el ejercicio 10.3.3, esta asignación es PO. Luego, dado que las preferencias son fuertemente monótonas, convexas y continuas, el teorema 10.3.3 asegura que existe un vector de precios $\mathbf{p}^*$ para el cual $\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{p}^*\}$ será un EW. El lector puede verificar que dicho vector de precios es tal que $p_1^* = p_2^*$.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

Ahora sí, probemos el teorema 10.3.3.

Demostración. Tenemos una economía $\mathcal{E}$ donde las preferencias $\succeq_k$ son racionales, continuas, convexas y fuertemente monótonas, y, por otro lado, una asignación PO $\{\mathbf{x}_k^*\}_{k=1}^N$ donde $x_{\ell k}^* > 0$ para todo $\ell = 1, ..., L$ y $k = 1, ..., N$.

Por el teorema 10.2.3, ya sabemos que $\succeq_k$ es representada por $u_k(\cdot)$ continua, para todo k. Luego, como las preferencias son fuertemente monótonas, se consume todo lo disponible en la asignación PO, esto es:

$$\overline{\mathbf{x}}^* = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k^* = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k. \tag{10.3.17}$$

[21] Note la desigualdad de estas dotaciones.

Lo que buscamos es un vector de precios $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^L_+ - \{\mathbf{0}\}$ tal que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ sea un EW.

Para cada $k = 1, ..., N$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$A_k = \{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+ : u_k(\mathbf{x}_k) > u_k(\mathbf{x}^*_k)\}.$$

Note que, debido a la convexidad de $\succeq_k$, estos conjuntos son convexos. Luego, por el ejercicio 5.1.6:

$$A = \sum_{k=1}^{N} A_k,$$

también es un conjunto convexo.

Ahora bien, si $A \cap \{\overline{\mathbf{x}}^*\} \neq \emptyset$, existirían $\hat{\mathbf{x}}_1, ..., \hat{\mathbf{x}}_N \in A_1, ..., A_N$ tales que:

$$\overline{\mathbf{x}}^* = \sum_{k=1}^{N} \hat{\mathbf{x}}_k.$$

Pero, en dicho caso, $\{\mathbf{x}^*_k\}_{k=1}^N$ no sería PO, pues $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ sería una asignación factible tal que para todo $k = 1, ..., N$, $u_k(\hat{\mathbf{x}}_k) > u_k(\mathbf{x}^*_k)$, lo que es una contradicción. Así pues, los conjuntos A y $\{\overline{\mathbf{x}}^*\}$ son disjuntos. Luego, debido al Teorema de Separación (teorema 5.2.3), existe $\mathbf{p}^* \neq \mathbf{0}$ tal que:

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z} \geq \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}^*, \ \forall \ \mathbf{z} \in A. \tag{10.3.18}$$

Más aún, $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^L_+$. En efecto, consideremos el vector:

$$\mathbf{e}_\ell = \underbrace{(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)}_{1 \text{ en la } \ell-\text{ésima entrada}}.$$

Entonces, por la monotonía estricta de las preferencias (véase ejercicio 10.3.8):

$$\overline{\mathbf{x}}^* + \mathbf{e}_\ell \in A. \tag{10.3.19}$$

Por ende, como $\mathbf{p}^* \cdot (\overline{\mathbf{x}}^* + \mathbf{e}_\ell) \geq \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}$, se deduce que:

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_\ell = p_\ell^* \geq 0.$$

Como esto es para cualquier ℓ, $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$. Finalmente, queda únicamente por demostrar que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ constituye un equilibrio walrasiano para $\mathcal{E}'$. Para esto, debemos demostrar que $\forall\ k = 1, ..., N$:

$$\mathbf{x}_k^* \in B_k(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\omega}_k') \ \wedge\ u_k(\mathbf{x}_k^*) \geq u_k(\mathbf{x}_k),\ \forall\ \mathbf{x}_k \in B_k(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\omega}_k') \tag{10.3.20}$$

y

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k^* = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k', \tag{10.3.21}$$

donde, recordemos, $\boldsymbol{\omega}_k' = \mathbf{x}_k^*$.

La condición dada por la ecuación 10.3.21 se cumple automáticamente por como hemos definido $\{\boldsymbol{\omega}_k'\}_{k=1}^N$. Por lo mismo, también tenemos que $\mathbf{x}_k^* \in B_k(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\omega}_k')$. De este modo, lo único que hay que probar es la segunda condición de la ecuación (10.3.20). Esto último equivale a demostrar que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) > u_k(\mathbf{x}_k^*) \implies \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k > \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k^*,\ \ \forall\ k = 1, ..., N. \tag{10.3.22}$$

Para probar (10.3.22), como primer paso veamos que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) > u_k(\mathbf{x}_k^*) \implies \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_k^*,\ \ \forall\ k = 1, ..., N. \tag{10.3.23}$$

Escojamos $k_0 \in \{1, ..., N\}$ arbitrario y sea $\mathbf{x}_{k_0} \in \mathbb{R}_+^L$ tal que $\mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \mathbf{x}_{k_0}^*$. Definamos:

$$\mathbf{z}_{k_0} = \mathbf{x}_{k_0}(1-\theta),\ \ \theta \in \,]0, 1[$$

y
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k^* + \frac{\mathbf{x}_{k_0}\theta}{N-1},\ k \neq k_0.$$
Haciendo θ lo suficientemente cerca de 0, por continuidad de las preferencias, tendremos que $\mathbf{z}_{k_0} \succ_{k_0} \mathbf{x}_{k_0}^*$. Por otro lado, como las preferencias son fuertemente monótonas, $\mathbf{z}_k \succ_k \mathbf{x}_k^*$ para todo k. Por ende, de la ecuación 10.3.18, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^* \cdot \underbrace{\mathbf{z}}_{=\sum_{k\neq k_0}\mathbf{z}_k+\mathbf{z}_{k_0}} &\geq \mathbf{p}^* \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k^* \\
\mathbf{p}^* \cdot \left[\mathbf{x}_{k_0}(1-\theta) + \sum_{k\neq k_0}\mathbf{x}_k^* + \mathbf{x}_{k_0}\theta\right] &\geq \mathbf{p}^* \cdot \left[\mathbf{x}_{k_0}^* + \sum_{k\neq k_0}\mathbf{x}_k^*\right] \\
\mathbf{p}^* \cdot \left[\mathbf{x}_{k_0} + \sum_{k\neq k_0}\mathbf{x}_k^*\right] &\geq \mathbf{p}^* \cdot \left[\mathbf{x}_{k_0}^* + \sum_{k\neq k_0}\mathbf{x}_k^*\right] \\
\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} &\geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0}^*.
\end{aligned}$$

Queda solo verificar que no se tiene la igualdad: $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0}^*$. Tomemos $\xi < 1$ y hagamos ξ lo suficientemente cerca a 1 de forma que por la continuidad de las preferencias:

$$u_{k_0}(\xi\mathbf{x}_{k_0}) > u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}^*).$$

De (10.3.23), ya sabemos que:

$$\mathbf{p}^* \cdot (\xi\mathbf{x}_{k_0}) \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0}^*.$$

Ahora, si $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0}^* > 0$, entonces $\mathbf{p}^* \cdot \xi\mathbf{x}_{k_0} < \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_{k_0}^*$, lo cual es una contradicción. Así pues, como k_0 fue arbitrario, concluimos lo deseado. $\square$

Cuando las preferencias no son convexas, no es posible asegurar que toda asignación PO junto con cierto de vector de precios constituyan un EW (véase el ejercicio 10.3.9).

Antes de terminar, permítanos comentar algo acerca de las extensiones del modelo presentado. Las economías de intercambio puro se caracterizan por la ausencia de entidades productivas que generan nuevos bienes de consumo. La introducción de estas entidades en el modelo plantea nuevos retos y vuelve la teoría algo más compleja, si bien más realista también. Para ver con detalle el caso en que se incorporan estas entidades, el lector puede consultar, por ejemplo, «Existence and Optimality of Competitive Equilibria» (Aliprantis, Brown & Burkinshaw, 1989) o Microeconomic Theory (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995).

Otra característica del modelo analizado es la presencia de un número finito de bienes. Para abordar el caso contrario, esto es, el caso en el que se consideran infinitos bienes, el lector puede consultar el capítulo 5 del libro «General Equilibrium Analysis» de Monique Florenzano (Florenzano, 2003) o el mismo libro de Alliprantis, Brown y Burkinshaw (capítulo 3).

Cuando tanto las dotaciones, precios y cantidades consumidas dependen de un estado de la naturaleza, nos encontramos en el modelo de equilibrio general con incertidumbre. En dicho modelo, los agentes tranzan lo que se conoce como bienes contingentes. Este modelo es analizado en capítulo 19 de Microeconomic Theory (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995) y, para el caso dinámico, en el capítulo 8 de Recursive Macroeconomic Theory (Ljungqvist & Sargent, 2018).

Finalmente, dos preguntas de interés que hemos omitido en nuestra presentación son: ¿existe siempre un EW?, y, en este caso, ¿es único? Las respuestas pasan por herramientas matemáticas que no han sido presentadas en este texto.[22] Para abordar estas cuestiones, por ejemplo, se pueden consultar «Competitive Equilibrium: Theory and Applications» de Bryan Ellickson (Ellickson, 1994), o el mismo libro de Mas-Colell et al. (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995). Curiosamente, las estrategias empleadas en la demostración de la existencia del equilibrio walrasiano son las mismas que se usan para probar la existencia del equilibrio de Nash en estrategias mixtas en teoría de juegos. El lector interesado puede consultar Game Theory (Fudenberg & Tirole, 1991) o Game Theory for Applied Economists (Gibbons, 1992), A First Course in Game Theory (Osborne & Rubinstein 1994), para un desarrollo completo de la teoría de juegos, en donde se discute la cuestión de la existencia del equilibrio de Nash.

LISTA DE EJERCICIOS

Ejercicio 10.3.1. Demuestre que el conjunto definido en (10.3.6) es compacto.

[22] El resultado principal empleado en la demostración de la existencia del equilibrio walrasiano es el teorema del punto fijo de Brouwer: dado un conjunto convexo y compacto X y una función continua $f : X \to X$, entonces existe $\mathbf{x}^* \in X$ tal que $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. El desafío consiste en determinar X y f. Sin mucha dificultad, se llega a que $X = \Delta = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\right\}$. Con un poco más de trabajo, se llega a que $f = f(\mathbf{p})$ es tal que $f_\ell(\mathbf{p}) = (p_\ell + \text{máx}\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}) / \left(1 + \sum_{\ell=1}^L \text{máx}\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}\right)$, donde $z(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}^*_k(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_k)$.

Sugerencia. Considere la bola $\mathcal{B}(\mathbf{0}; L||\overline{\boldsymbol{\omega}}||_1)$ usando la norma $||\cdot||_1$.

Ejercicio 10.3.2. Considere una economía 2×2 en la cual los consumidores poseen preferencias monótonas y localmente no saciadas. Denotemos por $x_{\ell k}(\mathbf{p})$ la demanda por el bien ℓ del consumidor k. Demuestre que:

$$p_1 \left(\sum_{k=1}^{2} x_{1k}(\mathbf{p}) - \omega_1 \right) + p_2 \left(\sum_{k=1}^{2} x_{2k}(\mathbf{p}) - \omega_2 \right) = 0. \qquad (10.3.24)$$

Luego, explique la afirmación del ejemplo 10.3.6: «bastará con resolver»

$$\omega_1 - (x^*_{11}(p_1, p_2) + x^*_{12}(p_1, p_2)) = 0.$$

Finalmente, generalice este ejercicio para el caso de L bienes.

Sugerencia. Para lo último, tome en cuenta que si se equilibran (demanda igual a oferta) $L-1$ mercados, por una ecuación similar a (10.3.24), el $L-$ésimo también debe equilibrarse. A esto último se le conoce como la ley de Walras.

Ejercicio 10.3.3. Sitúese en una economía 2×2. Demuestre que en caso u satisface las condiciones de Inada (véase Economic Growth (Barro & Sala i Martin, 2003)), para encontrar los óptimos de Pareto, basta resolver:

$$(\partial u_1/\partial x_{11})/(\partial u_1/\partial x_{21}) = (\partial u_2/\partial x_{12})/(\partial u_2/\partial x_{22}).$$

Generalice este resultado al caso de N consumidores y L bienes.

Sugerencia. Aplique condiciones de primer orden al Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u_1(x_{11}, x_{21}) &+ \lambda_1(\overline{u} - u_2(x_{12}, x_{22})) \\ &+ \lambda_2(\omega_{11} + \omega_{12} - x_{11} - x_{12}) \\ &+ \lambda_3(\omega_{21} + \omega_{22} - x_{21} - x_{22}).\end{aligned}$$

Para la generalización del resultado, recuerde el problema de optimización de la definición 10.3.3. Asuma que las funciones de utilidad son diferenciables, estrictamente crecientes en sus argumentos y que la solución es tal que $\tilde{\mathbf{x}}_k > \mathbf{0}$. Deduzca que el problema puede ser abordado como un problema de Lagrange y aplique CPO al Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) + \sum_{k=1}^{N} \lambda(\overline{u}_k - u_k(\mathbf{x}_k)) + \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \left(\omega_\ell - \sum_{k=1}^{N} x_{\ell k} \right).$$

Ejercicio 10.3.4. En una economía de intercambio puro con 2 bienes, explique por qué es posible normalizar el precio de uno de los bienes. Generalice este resultado para el caso de L bienes.

Sugerencia. Recuerde que lo que nos interesa es la tasa a la cual se hace el intercambio. En particular $(p_1^*, p_2^*) = (4, 2)$ nos da la misma información que $(p_1^*, p_2^*) = (2, 1)$ o $(p_1^*, p_2^*) = (1, 1/2)$.

Ejercicio 10.3.5. Demuestre que la demanda marshalliana que resulta del problema del consumidor a la hora de computar un equilibrio walrasiano es homogénea de grado cero. Esto es:

$$\mathbf{x}_k^*(\alpha \mathbf{p}) = \mathbf{x}_k^*(\mathbf{p}), \ \forall\ \alpha > 0.$$

Concluya por qué las demandas marshallianas terminan siendo expresadas en el contexto de esta sección, en términos de las tasas $p_1/p_2, ..., p_1/p_L$.

Sugerencia. Para lo primero, note que si $\mathbf{x}_k^*$ resuelve:

$$\begin{cases} \max & u_k(\mathbf{x}_k) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_k \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_k, \end{cases}$$

entonces, también resuelve $\forall\ \alpha > 0$:

$$\begin{cases} \max & u_k(\mathbf{x}_k) \\ \text{s. a :} & (\alpha \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_k \leq (\alpha \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}_k. \end{cases}$$

Para lo último, note que de lo anterior se deduce que:

$$\mathbf{x}_k^*(1/p_1\mathbf{p}) = \mathbf{x}_k^*(1/p_1(p_1, ..., p_L)) = \mathbf{x}_k^*(1, p_2/p_1..., p_L/p_1).$$

Ejercicio 10.3.6. [Adaptado de Aliprantis et al.] Consideremos una economía con 3 individuos y 2 bienes. Las dotaciones y las preferencias (representadas por funciones de utilidad) son:

$$\begin{aligned} u_1(x_{11}, x_{21}) &= x_{11}^{1/2} + x_{21}^{1/2},\ (\omega_{11}, \omega_{21}) = (1, 2), \\ u_2(x_{12}, x_{22}) &= \text{mín}\{x_{12}, x_{22}\},\ (\omega_{12}, \omega_{22}) = (3, 4), \\ u_3(x_{13}, x_{23}) &= x_{23}e^{x_{13}},\ (\omega_{13}, \omega_{23}) = (1, 1). \end{aligned}$$

Demuestre que las demandas óptimas vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{p_2p_1 + 2p_2^2}{p_1^2 + p_2p_1},\ x_{21} = \frac{p_1^2 + 2p_2p_1}{p_2p_1 + p_2^2}. \\ x_{12} &= x_{22} = \frac{3p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2},\ x_{13} = \frac{p_2}{p_1},\ x_{23} = \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.3.7. Encuentre las demandas óptimas en una economía de intercambio puro con L bienes y N consumidores, donde cada consumidor k tiene preferencias representadas por

$u_k(\mathbf{x}_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}}$ con $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} = 1$, $\alpha_{\ell k} \in (0,1)$ y dotaciones $\boldsymbol{\omega}_k = (\omega_{1k}, ..., \omega_{Lk}) > \mathbf{0}$.

Sugerencia. Revise el ejemplo de la Stone-Geary. Cada individuo resuelve:

$$\begin{cases} \max & u_k(\mathbf{x}_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}} \\ \text{s.a}: & \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell x_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k} \\ & x_{\ell k} > 0. \end{cases}$$

Haga las transformaciones necesarias y aplique condiciones de primer orden para obtener que:

$$\forall\ k, \ell :\ x_{\ell k} = \frac{\alpha_{\ell k}}{p_\ell} \left(\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k} \right).$$

Ejercicio 10.3.8. Demuestre la afirmación hecha con respecto a la ecuación 10.3.19.

Ejercicio 10.3.9. Considere una economía 2×2 donde $\omega_1 = (0.5, 0.5)$ y $\omega_2 = (0.5, 0.5)$ y $u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}^2 + x_{21}^2$ y $u_2(x_{12}, x_{22}) = x_{12} + x_{22}$. Encuentre las asignaciones P.O. y analice si se verifica el teorema 10.3.3.

Sugerencia. Grafique las curvas de indiferencia de las funciones de utilidad.

Ejercicio 10.3.10. Considere una economía con N consumidores y dos bienes donde las preferencias vienen representadas por $u_k(x_{1k}, x_{2k}) = x_{1k}^2 + x_{2k}^2$ y las dotaciones son $\boldsymbol{\omega}_k = (1, 1)$. Si N es par, encuentre, si es que existe, un equilibrio walrasiano ¿Qué sucede si N es impar?

Sugerencia. Si N es par, analice la situación en la cual la mitad de los consumidores adquieren $(0, 2)$ y la otra mitad, $(2, 0)$.

Índice

Bibliografía

Acemoglu, Daron (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Adler, Sheldon (2023). *Linear Algebra Done Right*. 4th edition. Heidelberg: Springer.

Aliprantis, Charalambos, Donald Brown & Owen Burkinshaw (1990). *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*. Heidelberg: Springer.

Anton, Howard & Chris Rorres (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. 10th edition. Hoboken, NJ: Wiley.

Arrow, Kenneth & Alain Enthoven (1961). Quasi-Concave Programming. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 29(4), 779-800.

Arrow, Kenneth & Gerard Debreu (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 22(3), 265-290.

Barbolla, Rosa, Emilio Cerda & Paloma Sanz (2001). *Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. NJ: Prentice Hall.

Barro, Robert & Xavier Sala-i-Martin (1995). *Economic Growth*. 2nd edition. Cambridge, MA: MIT Press.

Bewley, Truman (2007). *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Billingsley, Patrick (1996). *Probability and Measure*. 3rd edition. New York: Wiley.

Black, Fischer & Myron Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Blanchard, Olivier (2021). *Macroeconomics*. 6th edition. London: Pearson Education.

Border, Kim (2020). *Theory of Value: EC 121a. California Institute of Technology. Lecture 5: Convex Analysis and Support Functions.* https://healy.econ.ohio-state.edu/kcb/Ec121a/Lecture05.pdf. 2024.

Boyd, Stephen & Lieven Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Brinkhuis, Jan (2020). *Convex Analysis for Optimization: A Unified Approach*. Heidelberg: Springer.

Carbajal, Juan Carlos (2019). *Intermediate Microeconomics: The Road Not Taken (Yet)*. Fundación Calle Puno.

Carlier, Guillaume, Arnaud Dupuy & Alfred Galichon (2021). SISTA: Learning Optimal Transport Costs under Sparsity Constraints. Bonn: IZA Institute of Labor Economics.

Carter, Michael (2001). *Foundations of Mathematical Economics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Cerdá, Emilio, Rosa Barbolla, & Paloma Sanz (2001). *Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. New Jersey: Prentice Hall.

Chambers, Christopher & Federico Echenique (2016). *Revealed Preference Theory*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Chambers, Christopher, Federico Echenique & Nicolas Lambert (2021). Recovering Preferences from Finite Data. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 89(4), 1633-1664.

Chambers, Christopher, Federico Echenique, & Nicolas Lambert (2023). *Recovering Utility*.
https://arxiv.org/abs/2301.11492. 2024.

Chávez, Jorge (2022). *Sistemas Dinámicos para el Análisis Económico*. Lima: Departamento Académico de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Cochrane, John (2005). *Asset Pricing: Revised Edition*. New Jersey: Princeton University Press.

Debreu, Gerard (1954). Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 22(3), pp. 367-369.

Debreu, Gerard (2013). *La Teoría del Valor*. Barcelona: Antoni Bosch.

Echenique, Federico. *Lecture Notes: General Equilibrium Theory, SS205*. California Institute of Technology.
https://eml.berkeley.edu/f̃echenique/lecture_notes/index.html, 2024.

Echenique, Federico, Joseph Root & Fedor Sandomirskiy (2024). Stable Matching as Transportation.
https://arxiv.org/abs/2402.13378, 2024.

Ellickson, Bryan (1994). *Competitive Equilibrium: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Eisenbrand, Friedrich. *Lecture Notes: Optimization, Chapter 5: Strong Duality*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
https://www.epfl.ch/labs/disopt/teaching/page-31585-en-html/page-10550-en-html/, 2024.

Florenzano, Monique (2003). *General Equilibrium Analysis: Existence and Optimality Properties of Equilibria*. Heidelberg: Springer.

Florenzano, Monique & Cuong Le Van (2001). *Finite Dimensional Convexity and Optimization*. Heidelberg: Springer.

Fraleigh, John & Raymond Beauregard (1995). *Linear Algebra*. 3rd edition. Massachusetts: Addison-Wesley.

Fuente, Ángel de la (2000). *Mathematical Models and Methods for*

Economics. Cambridge: Cambridge University Press.

Fudenberg, Drew & Jean Tirole (1991). *Game Theory*. Cambridge: MIT Press.

Gale, D., H. W. Kuhn & A. W. Tucker (1951). *Linear Programming and the Theory of Games*. In: T. C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocations*, pp. 317-329. New York: John Wiley.

Gale, David & Lloyd S. Shapley (1962). College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly* , 69(1), pp. 9-15.

Galichon, Alfred (2016). *Optimal Transport Methods in Economics*. New Jersey: Princeton University Press.

Gallardo, José (2018). *Notas en teoría de la incertidumbre*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Geary, Roy (1950). A Note on A Constant-Utility Index of the Cost of Living. *The Review of Economic Studies*, 18(1), pp. 65-66. Oxford University Press.

Gibbons, Robert (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton: Princeton University Press.

Gil, Juan (2021). *Una aplicación empresarial del Modelo de Leontief* (Trabajo de Grado). Valladolid: Universidad de Valladolid.

Gilboa, Itzhak (2009). *Theory of Decision Under Uncertainty*. Cambridge: Cambridge University Press.

Greene, William (2007). *Econometric Analysis.* 6th edition. New Jersey: Prentice Hall.

Hicks, John (1937). Mr. Keynes and the Classics: A Suggested Interpretation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 5(2), pp. 147-159.

Hiroyuki, Koide (2010). Strict and Strong Quasi-Concavity: What is the Difference? *Journal of Nagoya Gakuin University*, 46(3), pp. 1-12.

Izmailov, Alexey & Mikhail Solodov (2020). *Optimization, Volume 1: Optimality Conditions, Elements of Convex Analysis and Duality.* 3rd edition. Rio de Janeiro: SBM.

Johnson, Steven (2020). *Introduction to Numerical Methods. Lecture 4: Notes on the Equivalence of Norms* (Lecture Notes). Massachusetts Institute of Technology. https://ocw.mit.edu/, 2024.

Kahneman, Daniel & Amos Tversky (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 47(2), pp. 263-292.

Kemp, Murray & Yoshio Kimura (1978). *Introduction to Mathematical Economics.* Heidelberg: Springer.

Lagers, Elon (1999). *Curso de Análise: Volume 2.* 5th edition. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Léonard, Daniel & Ngo Van Long (1992). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics.* Cambridge: Cambridge University Press. 1st edition.

Ljungqvist, Lars & Thomas J. Sargent (2018). *Recursive Macroeconomic Theory*. Cambridge, MA: MIT Press.

Luenberger, David & Yinyu Ye (2021). *Linear and Nonlinear Programming*. Heidelberg: Springer.

Lugón, Alejandro (2022). *Equilibrio, Eficiencia e Imperfecciones del Mercado*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, Uldarico (1994). *Matemática para el Análisis Económico*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Martinelli, César (2022). *Lectures in Microeconomic Theory*. George Mason University.
https://sites.google.com/site/martinellicesar/teaching-1, 2024.

Mas-Colell, Andreu, Michael Whinston & Jerry Green (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford: Oxford University Press.

McKenzie, Lionel (1959). On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 27(1), pp. 54-71.

Mendoza, Waldo (2018). *Macroeconomía Intermedia para América Latina*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Munkres, James (2000). *Topology: A First Course*. 2nd edition. Harlow: Pearson.

Ok, Efe (2007). *Real Analysis with Economic Applications.* New Jersey: Princeton University Press.

Osborne, R., A. Rubinstein (1994). *A First Course in Game Theory.* MIT University Press.

Roy, René (1947). La Distribution du Revenu Entre Les Divers Biens. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 15(3), pp. 205-225.

Rubinstein, Ariel (2012). *Lecture Notes in Microeconomic Theory: The Economic Agent.* 2nd edition. New Jersey: Princeton University Press.

Simon, Barry (2011). *Extreme Points and the Krein-Milman Theorem.* Cambridge: Cambridge University Press.

Stokey, Nancy, Robert Lucas, and Edward Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Massachusetts: Harvard University Press.

Stone, Richard (1954). Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand. *The Review of Economic Studies*, 64(255), pp. 511-52.

Sundaram, Rangarajan (1996). *A First Course in Optimization Theory.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sydsaeter, Knut & Peter Hammond (1995). *Mathematics for Economic Analysis.* London: Pearson Education.

Turnovsky, Stephen, Haim Shalit & Andrew Schmitz (1980). Consumers Surplus, Price Instability and Consumer Welfare.

Econometrica: Journal of the Econometric Society, 48(1), pp. 135-152.

Varian, Hal (1982). The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50(4), pp. 945-973.

Varian, Hal (1993). *Análisis Microeconómico*. 3rd edition. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

Walras, Léon (1874). *Elements of Pure Economics: Or the Theory of Social Wealth*. London: Routledge Library Editions.

Wang, Susheng (2018). *Microeconomic Theory*. 4th edition. Heidelberg: Springer.

Wolitzky, Alexander (2015). *Microeconomic Theory I. Lectures 1-2: Choice, Preference, and Utility*. Massachusetts Institute of Technology. https://ocw.mit.edu/, 2024.

Yu, Kam (2019). *Mathematical Economics: Prelude to the Neoclassical Model*. Heidelberg: Springer.